应用学数和力学，第8卷第1期（1987年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

气动力学基本方程中的粘性项在非正交曲线坐标系内展开式的简化*

王仲奇　康　顺

（哈尔滨工业大学，1985年2月19日收到）

摘　要

采用任意曲线坐标系可使具有复杂边界的流场计算大大地简化，并且可提高计算精度．所以，将气体动力学基本方程中的粘性项（粘性力、粘性应力作功率和消散函数）在该座标系中展开显得十分必要．然而，适用于变粘性系数可压流体的粘性项展开式由几十项甚至上百项组成．本文经过量阶分析将粘性项展开式进行了大大地简化．

符　号　说　明

f为粘性力

g_{ij}为度量张量的协变分量；

g^{ij}为度量张量的逆变分量；

g为由g_{ij}组成的行列式；

w为速度向量；

w_i为w的协变分量；

w^i为w的逆变分量；

x^i为曲线座标轴；

Γ^i_{jk}为第二类克里斯托夫符号；

μ为动力粘性系数；

ρ为气体的密度；

Π为应力张量；

f_i为粘性力的协变分量

Φ为消散函数；

$\widetilde{W}$为由w^i组成的三维列矩阵；

$\underset{\sim}{W}$为由w_i组成的三维列矩阵；

$\underset{\sim}{F}$为由f_i组成的三维列矩阵；

D为由算符∇的分量$\partial/\partial x^i$组成的三维列矩阵；

G为由g_{ij}组成的三维方阵；

$\widetilde{G}$为由g^{ij}组成的三维方阵；

$\widetilde{G}_{;j}$为由g^{ik}对x^j的偏导数组成的三维方阵；

$i,j,k\cdots$为指定指标或求和指标；

T为转置矩阵的上角标．

一、引　言

非正交曲线坐标系在叶轮机械三元流动计算中的应用[1]，给具有任意复杂边界的内流计算带来了很大方便，并且提高了计算精度．在叶轮机械中计及全粘（不是部分地考虑粘性）的三元流动计算则是目前重要的科研方向之一．用不变性微分算子$\nabla,\nabla\cdot,\nabla\times$和$\nabla^2$表示的气动力学基本方程（含粘性项）具有简单和物理概念清楚等优点．然而，方程的数值求解要求必须将方程展开成标量形式（投影形式）．因此，将气动力学基本方程的粘性项（粘性

* 吴望一推荐．

力、粘性应力作功率和消散函数）在非正交曲线坐标系中展开就显得十分必要。我们在文献[2]中曾给出了这三个粘性项的展开式。它们是包括了几十项，甚至上百项的展开式。虽然电子数字计算机的应用解决了复杂方程的数值求解问题，但计算式的繁杂总是给计算程序的编制和计算本身带来极大的不便。因此，略去计算式中对气体运动规律不起主要作用的因素，使计算式既能反映气体运动的基本规律，又使问题易于求解，则是对解决复杂问题通常采用的一种有效的方法。本文就是通高雷诺数 Re 的条件下采用量阶分析的方法对粘性项进行了有效的简化。

二、粘性项的展开式[2]

1. 粘性力 f 的协变分量

$$f_j=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g}\,g^{ik}\mu\left[\frac{\partial w_j}{\partial x^k}+\frac{\partial w_k}{\partial x^j}-2w_n\Gamma^n{}_{jk}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\mu\frac{\partial(\sqrt{g}\,w^n)}{\sqrt{g}\,\partial x^n}\right]+\frac{1}{2}\mu\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^j}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x^k}+\frac{\partial w_k}{\partial x^i}-2w_n\Gamma^n{}_{jk}\right)\right\} \tag{2.1}$$

2. 粘性应力作功率

$$\nabla\cdot(\Pi\cdot\mathbf{w})=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^n}\left[\mu\sqrt{g}\,g^{kn}\left(w^i\frac{\partial w_k}{\partial x^i}+w_i\frac{\partial w^i}{\partial x^k}\right)\right]$$
$$-\frac{2}{3}\left\{\mu w^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial(\sqrt{g}\,w^n)}{\sqrt{g}\,\partial x^n}\right]+\frac{\partial(\sqrt{g}\,w^n)}{\sqrt{g}\,\partial x^n}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\mu w^i)}{\sqrt{g}\,\partial x^i}\right\} \tag{2.2}$$

3. 消散函数

$$\phi=\mu\left(\frac{\partial w_i}{\partial x^k}+\frac{\partial w_k}{\partial x^i}-2w_m\Gamma^m_{ik}\right)\left(g^{nk}\frac{\partial w^i}{\partial x^n}-\frac{1}{2}w^n\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^n}\right)$$
$$-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial(\sqrt{g}\,w^i)}{\sqrt{g}\,\partial x^i}\frac{\partial(\sqrt{g}\,w^n)}{\sqrt{g}\,\partial x^n} \tag{2.3}$$

以上三式中，除了式(2.1)中j是指定指标外，其余指标i,k,m,n均是求和指标。如果将各式右端按求和指标展开，则可得由几十项甚至上百项的展开式。

为了有利于编制计算程序，我们曾将以上三式用矩阵式表示[2]。它们分别是

$$F=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}[D^T\mu\sqrt{g}\,A]^T-\frac{2}{3}D\mu\frac{1}{\sqrt{g}}D^T\sqrt{g}\widetilde{W}+\frac{1}{2}\mu Q\right\} \tag{2.4}$$

$$\nabla\cdot(\Pi\cdot\mathbf{w})=\frac{1}{\sqrt{g}}D^T\{\mu\sqrt{g}\,\widetilde{G}[\widetilde{W}^TD\underset{\sim}{W}^T]^T+\mu\sqrt{g}\,\widetilde{G}D\widetilde{W}^T\cdot\underset{\sim}{W}\}$$
$$-\frac{2}{3}\mu\widetilde{W}^TD\left[\frac{1}{\sqrt{g}}D^T\sqrt{g}\,\widetilde{W}\right]-\frac{2}{3}\frac{1}{g}D^T\sqrt{g}\,\widetilde{W}\cdot D^T\mu\sqrt{g}\,\widetilde{W} \tag{2.5}$$

$$\phi=\mu H_{jj}-\frac{2}{3}\mu\frac{1}{g}(D^T\sqrt{g}\,\widetilde{W})^2 \tag{2.6}$$

上式中的矩阵$A=\widetilde{G}B^T$，而矩阵B是由下列元素表达式

$$B_{jk}=\frac{\partial w_j}{\partial x^k}+\frac{\partial w_k}{\partial x^j}-2w_n\Gamma^n_{jk}$$

$$=\frac{\partial w_j}{\partial x^k}+\frac{\partial w_k}{\partial x^j}-w^i\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$$

确定的三维方阵，所以

$$B=(D\underset{\sim}{W}^T)^T+D\underset{\sim}{W}^T-[(\widetilde{W}D^T)\underset{\sim}{G}]^T-(\widetilde{W}D^T)^T\underset{\sim}{G}^T+(\widetilde{W}^TD)\underset{\sim}{G} \tag{2.7}$$

而矩阵Q为三维列矩阵，它的三个元素$c_{aa;1}$、$c_{aa;2}$和$c_{aa;3}$分别是三个三维方阵$C_{;j}$ $(j=1,2,3)$对角线上三个元素之和。方阵$C_{;j}$等于矩阵$\widetilde{G}_{;j}(j=1,2,3)$与矩阵$B$的乘积，即$C_{;j}=\widetilde{G}_{;j}B$。式(2.6)中的$H_{jj}$是三维方阵$H$对角线上三个元素之和，而方阵$H$等于矩阵$R$和$B$的乘积。方阵$R$的元素$R_{kj}$由下式决定

$$R_{kj}=g^{ik}\frac{\partial w^j}{\partial w^i}-\frac{1}{2}w^n\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^n}$$

或者

$$R=\widetilde{G}D\widetilde{W}^T-\frac{1}{2}\widetilde{W}^TD\widetilde{G} \tag{2.8}$$

三、粘性项展开式的简化（量阶分析）

我们采用量阶分析的方法，将式(2.1)、(2.2)和(2.3)或式(2.4)、(2.5)和(2.6)中的高阶小量略去，从而使三个粘性项展开式得以简化。为此，取x^1为准流线方向，而x^2和x^3为另外方向。x^2和x^3的方向应该这样选择使得如果取度量张量的协变分量g_{11}、g_{22}和g_{33}的量阶为1，则x^1和w^1的量阶为1而x^2和x^3以及w^2和w^3的量阶均为δ。显然，动力粘性系数μ的量阶为δ^2 [3]。在此条件下，可知

$$D=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\ \frac{\partial}{\partial x^2}\\ \frac{\partial}{\partial x^3}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{\delta}\\ \frac{1}{\delta}\end{bmatrix},\quad \widetilde{W}=\begin{bmatrix}w^1\\ w^2\\ w^3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1\\ \delta\\ \delta\end{bmatrix} \tag{3.1}$$

如果令

$$D_{(1/\delta)}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{\partial}{\partial x^2}\\ \frac{\partial}{\partial x^3}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\delta}\\ \frac{1}{\delta}\end{bmatrix},\quad D_{(1)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$\widetilde{W}_{(1)}=\begin{bmatrix}w^1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad \widetilde{W}_{(\delta)}=\begin{bmatrix}0\\ w^2\\ w^3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0\\ \delta\\ \delta\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

则

$$D=D_{(1)}+D_{(1/\delta)},\quad \widetilde{W}=\widetilde{W}_{(1)}+\widetilde{W}_{(\delta)} \tag{3.4}$$

式中下标1、$1/\delta$和δ分别表示该矩阵的量阶为1、$1/\delta$和δ。

下面分别讨论粘性力、粘性应力作功率和消散函数等三个粘性项矩阵式的简化问题。

1. 粘性力

由于$\underset{\sim}{W}=\underset{\sim}{G}\widetilde{W}$，所以，式(2.7)变为

$$B=(D\widetilde{W}^T\underset{\sim}{G}^T)^T+D\widetilde{W}^T\underset{\sim}{G}^T-[(\widetilde{W}D^T)^T\underset{\sim}{G}]^T-(\widetilde{W}D^T)^T\underset{\sim}{G}^T+(\widetilde{W}^TD)\underset{\sim}{G} \tag{3.5}$$

注意到$\underset{\sim}{G}=\underset{\sim}{G}^T$，如果令$M$代表式(3.5)右端第二和第四两项代数和

$$M=D\widetilde{W}^T\underset{\sim}{G}-(\widetilde{W}D^T)^T\underset{\sim}{G}$$

则将式(3.4)代入，并略去各小量后，得

$$M=D_{(1/\delta)}\widetilde{W}^T{}_{(1)}\underset{\sim}{G}-[\widetilde{W}_{(1)}D^T{}_{(1/\delta)}]^T\underset{\sim}{G} \tag{3.6}$$

式中

$$\widetilde{W}^T{}_{(1)}\underset{\sim}{G}=w^1[g_{11}\quad g_{12}\quad g_{13}]$$

若令$\underset{\sim}{G}^T{}_{(1)}=[g_{11}\quad g_{12}\quad g_{13}]\sim 1$，则得

$$\widetilde{W}^T{}_{(1)}\underset{\sim}{G}=w^1\underset{\sim}{G}^T{}_{(1)} \tag{3.7}$$

于是，式(3.6)变为

$$M=D_{(1/\delta)}w^1\underset{\sim}{G}^T{}_{(1)}-[\widetilde{W}_{(1)}D^T{}_{(1/\delta)}]^T\underset{\sim}{G}\sim(1/\delta) \tag{3.8}$$

根据式(3.6)所示矩阵M的定义可以看出，式(3.5)右端第一和第三项之代数和为矩阵M的转置矩阵M^T，所以，矩阵M^T的量阶亦为$1/\delta$。至于式(3.5)右端的最末项，可以证明，它等于零，即

$$(\widetilde{W}^TD)\underset{\sim}{G}=\widetilde{W}^T{}_{(1)}D_{(1/\delta)}\underset{\sim}{G}=0$$

这样，矩阵B可以表示为

$$B=M+M^T\sim(1/\delta) \tag{3.9}$$

根据方阵$\widetilde{G}_{;1}$、$\widetilde{G}_{;2}$和$\widetilde{G}_{;3}$的定义，可知它们的量阶分别为1、$1/\delta$和$1/\delta$，所以

$$\widetilde{G}_{;j}=\begin{bmatrix}\widetilde{G}_{;1}\\ \widetilde{G}_{;2}\\ \widetilde{G}_{;3}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{1}{\delta}\\ \dfrac{1}{\delta}\end{bmatrix}$$

由此可见，$\widetilde{G}_{;1}$与$\widetilde{G}_{;2}$和$\widetilde{G}_{;3}$比较为小量项，故可略去不计($\widetilde{G}_{;1}=0$)。这样，$\widetilde{G}_{;j}$的量阶为$1/\delta$。由于$C_{;j}=\widetilde{G}_{;j}B$，所以$C_{;j}\sim 1/\delta^2$，而$Q$的量阶应与矩阵$C_{;j}$的相同，故$Q\sim 1/\delta^2$。矩阵$A$的量阶由矩阵$B$的量阶决定，所以$A\sim 1/\delta$。

将式(3.4)代入式(2.4)，考虑到$D^T{}_{(1/\delta)}\widetilde{W}_{(1)}=0$，并略去具有较小量阶各量后，得粘性力的矩阵表达式

$$F=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}[D^T{}_{(1/\delta)}\mu\sqrt{g}\,A]^T+\frac{1}{2}\mu Q\right\}\sim 1 \tag{3.10}$$

此式即是以矩阵表示的粘性力简化式。

为了将式(3.10)展开，应将其右端进行矩阵运算。为此，首先进行下列两项运算

$$D_{(1/\delta)}w^1\underset{\sim}{G}^T{}_{(1)}=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{\partial}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial}{\partial x^3}\end{bmatrix}w^1[g_{11}\ g_{12}\ g_{13}]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \dfrac{\partial(w^1g_{11})}{\partial x^2} & \dfrac{\partial(w^1g_{12})}{\partial x^2} & \dfrac{\partial(w^1g_{13})}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial(w^1g_{11})}{\partial x^3} & \dfrac{\partial(w^1g_{12})}{\partial x^3} & \dfrac{\partial(w^1g_{13})}{\partial x^3}\end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$[\widetilde{W}_{(1)} \quad D^T_{(1/\delta)}]^T \underset{\sim}{G} = \left(\begin{bmatrix} w^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ w^1 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} & w^1 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} & w^1 \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} \\ w^1 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} & w^1 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} & w^1 \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

由式(3.8)可知，M矩阵等于式(3.11)减去式(3.12)，即

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ g_{11} \frac{\partial w^1}{\partial x^2} & g_{12} \frac{\partial w^1}{\partial x^2} & g_{13} \frac{\partial w^1}{\partial x^2} \\ g_{11} \frac{\partial w^1}{\partial x^3} & g_{12} \frac{\partial w^1}{\partial x^3} & g_{13} \frac{\partial w^1}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

而由式(3.9)可知，B矩阵等于M矩阵及其转置矩阵M^T之和，所以

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_{11} \frac{\partial w^1}{\partial x^2} & g_{11} \frac{\partial w^1}{\partial x^3} \\ g_{11} \frac{\partial w^1}{\partial x^2} & 2g_{12} \frac{\partial w^1}{\partial x^2} & g_{12} \frac{\partial w^1}{\partial x^3} + g_{13} \frac{\partial w^1}{\partial x^2} \\ g_{11} \frac{\partial w^1}{\partial x^3} & g_{12} \frac{\partial w^1}{\partial x^3} + g_{13} \frac{\partial w^1}{\partial x^2} & 2g_{13} \frac{\partial w^1}{\partial x^3} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

由此可见，B矩阵为对称矩阵。这样，根据$\widetilde{G}_{;j}$的定义和式(3.13)，不难得到矩阵$C_{;j}$

$$C_{;j} = \widetilde{G}_{;j} B = \begin{bmatrix} \frac{\partial g^{11}}{\partial x^j} B_{11} + \frac{\partial g^{12}}{\partial x^j} B_{21} + \frac{\partial g^{13}}{\partial x^j} B_{31} & c_{12;j} & c_{13;j} \\ c_{21;j} & \frac{\partial g^{21}}{\partial x^j} B_{12} + \frac{\partial g^{22}}{\partial x^j} B_{22} + \frac{\partial g^{23}}{\partial x^j} B_{32} & c_{23;j} \\ c_{31;j} & c_{23;j} & \frac{\partial g^{31}}{\partial x^j} B_{13} + \frac{\partial g^{32}}{\partial x^j} B_{23} + \frac{\partial g^{33}}{\partial x^j} B_{33} \end{bmatrix}$$

由此得

$$c_{\alpha\alpha;j} = \frac{\partial g^{11}}{\partial x^j} B_{11} + \frac{\partial g^{22}}{\partial x^j} B_{22} + \frac{\partial g^{33}}{\partial x^j} B_{33} + 2\left(\frac{\partial g^{12}}{\partial x^j} B_{21} + \frac{\partial g^{23}}{\partial x^j} B_{32} + \frac{\partial g^{31}}{\partial x^j} B_{13} \right) \tag{3.14}$$

顾及到式 $A = \widetilde{G} B^T$，将式(3.13)和(3.14)代入式(3.10)，经过并项和整理后，得粘性力展开式的简化式

$$f_1 = \frac{1}{\rho\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\mu\sqrt{g}\, g_{11} \left(g^{22} \frac{\partial w^1}{\partial x^2} + g^{23} \frac{\partial w^1}{\partial x^3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x^3} \left[\mu\sqrt{g}\, g_{11} \left(g^{32} \frac{\partial w^1}{\partial x^2} + g^{33} \frac{\partial w^1}{\partial x^3} \right) \right] \right\} \tag{3.15}$$

$$f_2=\frac{1}{\rho\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\mu\sqrt{g}\,g_{12}\left(g^{22}\frac{\partial w^1}{\partial x^2}+g^{23}\frac{\partial w^1}{\partial x^3}\right)\right]\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^3}\left[\mu\sqrt{g}\,g_{12}\left(g^{32}\frac{\partial w^1}{\partial x^2}+g^{33}\frac{\partial w^1}{\partial x^3}\right)\right]$$

$$+\mu\left[\left(g_{11}\frac{\partial g^{12}}{\partial x^2}+g_{12}\frac{\partial g^{22}}{\partial x^2}+g_{13}\frac{\partial g^{32}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial w^1}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.\left.+\left(g_{11}\frac{\partial g^{13}}{\partial x^3}+g_{12}\frac{\partial g^{23}}{\partial x^3}+g_{13}\frac{\partial g^{33}}{\partial x^3}\right)\frac{\partial w^1}{\partial x^3}\right]\right\} \tag{3.16}$$

$$f_3=\frac{1}{\rho\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\mu\sqrt{g}\,g_{13}\left(g^{23}\frac{\partial w^1}{\partial x^3}+g^{22}\frac{\partial w^1}{\partial x^2}\right)\right]\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^3}\left[\mu\sqrt{g}\,g_{13}\left(g^{33}\frac{\partial w^1}{\partial x^3}+g^{32}\frac{\partial w^1}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$+\mu\left[\left(g_{11}\frac{\partial g^{12}}{\partial x^3}+g_{12}\frac{\partial g^{22}}{\partial x^3}+g_{13}\frac{\partial g^{32}}{\partial x^3}\right)\frac{\partial w^1}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.\left.+\left(g_{11}\frac{\partial g^{13}}{\partial x^3}+g_{12}\frac{\partial g^{23}}{\partial x^3}+g_{13}\frac{\partial g^{33}}{\partial x^3}\right)\frac{\partial w^1}{\partial x^3}\right]\right\} \tag{3.17}$$

2. 粘性应力作功率

考虑到 $\underset{\sim}{W}=\underset{\sim}{G}\widetilde{W}$，将式(3.4)代入式(2.5)，略去较小量阶各项后，则得

$$\nabla\cdot(\Pi\cdot\mathbf{w})=\frac{1}{\sqrt{g}}D^T_{(1/\delta)}\{\mu\sqrt{g}\,\widetilde{G}[D_{(1/\delta)}\widetilde{W}^T_{(1)}\underset{\sim}{G}]^T\widetilde{W}_{(1)}$$

$$+\mu\sqrt{g}\,\widetilde{G}D_{(1/\delta)}\widetilde{W}^T_{(1)}\widetilde{W}_{(1)}\} \tag{3.18}$$

可以证明

$$D^T_{(1/\delta)}\{\mu\sqrt{g}\,\widetilde{G}[D_{(1/\delta)}\widetilde{W}^T_{(1)}\underset{\sim}{G}]^T\widetilde{W}_{(1)}\}=0$$

所以，利用式(3.7)后，得

$$\nabla\cdot(\Pi\cdot\mathbf{w})=\frac{1}{\sqrt{g}}D^T_{(1/\delta)}\mu\sqrt{g}\,\widetilde{G}[D_{(1/\delta)}\widetilde{W}^T_{(1)}\cdot w^1\underset{\sim}{G}^T_{(1)}]\sim 1 \tag{3.19}$$

式中的圆点“·”表示它前面的微分算子矩阵D不对圆点后边的因子起作用。将式(3.19)展开后得

$$\nabla\cdot(\Pi\cdot\mathbf{w})=\frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\mu\sqrt{g}\,w^1g_{12}\left(g^{22}\frac{\partial w^1}{\partial x^2}+g^{23}\frac{\partial w^1}{\partial x^3}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x^3}\left[\mu\sqrt{g}\,w^1g_{13}\left(g^{32}\frac{\partial w^1}{\partial x^2}+g^{33}\frac{\partial w^1}{\partial x^3}\right)\right]\right\} \tag{3.20}$$

此式即是在任意曲线坐标系中粘性应力作功率展开式的简化式。

3. 消散函数

为了对式(2.6)所示的消散函数展开式进行简化，首先应对式(2.8)所示的矩阵R进行量阶分析。为此将式(3.4)代入式(2.8)，略去较小量阶各项后，得

$$R=\widetilde{G}D_{(1/\delta)}\widetilde{W}^T_{(1)}-\widetilde{W}^T_{(1)}D_{(1/\delta)}\widetilde{G}/2 \tag{3.21}$$

考虑到式(3.2)和(3.3)，不难证明

$$\widetilde{W}^T{}_{(1)}D_{(1/\delta)}\widetilde{G}=0$$

所以，式(3.21)变为

$$R=\widetilde{G}D_{(1/\delta)}\widetilde{W}^T{}_{(1)}\sim(1/\delta) \tag{3.22}$$

由于矩阵H等于矩阵B和R的乘积，所以，矩阵H的量阶为$1/\delta^2$。

将式(3.4)代入消散函数表达式(2.6)，略去较小量阶各项，得

$$\phi=\mu H_{jj}-\frac{2}{3}\mu\frac{1}{g}(D^T{}_{(1/\delta)}\sqrt{g}\widetilde{W}_{(1)})^2 \tag{3.23}$$

利用式(3.2)和(3.3)可以证明，$D^T{}_{(1/\delta)}\sqrt{g}\widetilde{W}_{(1)}=0$，所以，式(3.23)变为

$$\phi=\mu H_{jj}\sim 1 \tag{3.24}$$

为了获得ϕ的展开式，先计算R矩阵元素，即由式(3.22)得

$$R=\widetilde{G}D_{(1/\delta)}\widetilde{W}^T{}_{(1)}=\begin{bmatrix} g^{12}\frac{\partial w^1}{\partial x^2}+g^{13}\frac{\partial w^1}{\partial x^3} & 0 & 0 \\ g^{22}\frac{\partial w^1}{\partial x^2}+g^{23}\frac{\partial w^1}{\partial x^3} & 0 & 0 \\ g^{32}\frac{\partial w^1}{\partial x^2}+g^{33}\frac{\partial w^1}{\partial x^3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

将式(3.13)所示的B矩阵与此式所示的R矩阵相乘，不难得到H矩阵元素H_{jj}（对j作和）。所以，由式(3.24)得

$$\phi=\mu\left[g_{11}\frac{\partial w^1}{\partial x^2}\left(g^{22}\frac{\partial w^1}{\partial x^2}+g^{23}\frac{\partial w^1}{\partial x^3}\right)+g_{11}\frac{\partial w^1}{\partial x^3}\left(g^{32}\frac{\partial w^1}{\partial x^2}+g^{33}\frac{\partial w^1}{\partial x^3}\right)\right] \tag{3.26}$$

此式即是消散函数展开式的简化式。

四、结 束 语

本文给出的粘性项（包括粘性力、粘性应力作功率和消散函数）展开式的简化式对于任何坐标系都是适用的。对于具有较复杂形状的壁面边界，采用本文给出的计算公式将会大大提高计算精度。

在边界层内，气体的粘性将强烈地显示出来，因而气体动力学基本方程中的粘性项不能略去不计。本文给出的粘性项简化式适用于变粘性系数的可压缩边界层的计算。

三个粘性项简化式仅包括十项左右，它们与未简化前的包括上百项的展开式比较，确实简单多了。这无疑会给编制计算程序带来极大方便，并且节省计算时间。

参 考 文 献

[1] 吴仲华，使用非正交曲线坐标系和非正交速度分量的叶轮机械三元流动基本方程及其解法，机械工程学报，15，1 (1979)，1—23.

[2] 王仲奇、康顺，气动力学基本方程中的粘性项在非正交曲线坐标系中的展开式及其数值微分方法，工程热物理学报，6，2 (1985)，142—144.

[3] 陈乃兴，叶轮机械粘性气体气动热力学的若干问题——粘性项、传热项及基本方程的求解途径，中国科学，A辑，第10期 (1983)，956—966.

Simplification of the Expansions of Viscous Terms in Basic Aerodynamic Equations in Non-Orthogonal Curvilinear Coordinate System

Wang Zhong-qi Kang Shun

(*Haerbin Institute of Technology, Haerbin*)

Abstract

The application of non-orthogonal curvilinear system to the calculation of the flow field inside the channel, with complex boundary geometry, can effectively simplify the work of designing the calculation program and improve the accuracy of calculation[1]. Therefore, it is obviously necessary to expand the viscous terms, i. e. viscous force, rate of work done by viscous stress and dissipation, in basic aerodynamic equations in the non-orthogonal curvilinear system[2]. However, each of these expansions consists of tens or even hundreds of algebraic terms. The expansions of these three viscous terms discribed in this paper are considerably simplified by analysing their order of magnitude.