应用数学和力学，第8卷第1期（1987年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

抛物型偏微分方程奇异摄动问题的边界层方法

吴启光

（南京大学数学系，1985年11月2日收到）

摘　要

本文讨论抛物型偏微分方程奇异摄动问题，通常，为了使边界层的特性不致丧失，在边界层附近必须减小网格，当网格足够小时需要很大的运算量。

我们提出边界层格式，在边界层附近不必取很细的网格，数值例子表明采用中等步长即可满足精度。

一、问题 I

在区域R：$\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1\}$上考虑抛物型方程的混合初、边值问题：

$$\begin{cases} L_\varepsilon u(x,t)\equiv a(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial t}=f(x,t) \qquad (0<x<1;\ 0<t\leqslant 1) & (1.1)\\ u(x,0)=\varphi(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1) & (1.2)\\ u(0,t)=g_0(t),\ u(1,t)=g_1(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant 1) & (1.3)\end{cases}$$

其中$0<\varepsilon\ll 1$是一个小参数，$a(x,t)$，$f(x,t)$和$\varphi(x)$，$g_0(t)$，$g_1(t)$是给定的充分光滑的函数。

当$\varepsilon=0$时，混合问题(1.1)～(1.3)退化为以下的微分方程边值问题：

$$\begin{cases} a(x,t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f(x,t) & (1.4)\\ w(0,t)=g_0(t),\ w(1,t)=g_1(t) & (1.5)\end{cases}$$

当t给定，这是二阶偏微分方程退化为同阶的常微分方程的情形，在$t=0$处失去了初始条件，于是当$\varepsilon\to 0$时在$t=0$附近问题(1.1)～(1.3)的解不可能一致逼近于退化问题(1.4)～(1.5)的解，将产生边界层现象。

根据渐近方法的分析，问题(1.1)～(1.3)的解当$\varepsilon\to 0$时在区域R上可一致地表示为：

$$u_\varepsilon(x,t)=w(x,t)+v(x,t_1)+O(\varepsilon) \qquad (1.6)$$

其中　$t_1=t/\varepsilon$是伸长变量，w是退化问题(1.4)～(1.5)的解，v是边界层问题

$$\left.\begin{aligned} &a(x,0)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial v}{\partial t_1}\\ &v(x,0)=\varphi(x)-w(x,0)\\ &v(0,t_1)=0,\ v(1,t_1)=0,\ \lim_{t_1\to\infty} v=0\end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

的解。

因为问题(1.4)～(1.5)不包含小参数 ε，因此通常的数值方法不作任何修改可直接应用到退化问题(1.4)～(1.5)。

然而，另一方面，边界层问题(1.7)虽然在方程中ε并不明显地出现，但是半无穷区域造成了困难，因此我们的问题是将(1.7)修改为在有限区域中的类似问题(1.8)，使得可以用任何适当的数值方法求解。

因为从奇异摄动理论，边界层问题(1.7)的解，仅当t_1在零的附近产生影响，当 t_1远离零时是一个微小的量，于是我们可考虑下列修改：

$$\left.\begin{aligned}&a(x,0)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}=\frac{\partial v_1}{\partial t_1} \qquad (0<x<1;\ 0<t_1\leqslant m)\\&v_1(x,0)=\varphi(x)-w(x,0) \qquad (0<x<1)\\&v_1(0,t_1)=0,\ v_1(1,t_1)=0 \qquad (0\leqslant t_1\leqslant m)\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

其中m是一个待定常数，我们选取m使得

$$m\ll 1/\varepsilon \tag{1.9}$$

和

$$|v_1(x,m)|\leqslant\varepsilon \tag{1.10}$$

这是在区域 R_1：$\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t_1\leqslant m\}$ 上的抛物型方程的初、边值问题，可用差分方程求解。

如果我们假定

$$R=R_1+R_2$$

其中

$$R_1:\ \{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant \varepsilon m\}$$
$$R_2:\ \{0\leqslant x\leqslant 1,\ \varepsilon m<t\leqslant 1\}$$

易知当 $\varepsilon\to 0$时有

$$\left.\begin{aligned}&u_\varepsilon\approx w+v_1 \quad (\text{在}R_1\text{上})\\&u_\varepsilon\approx w \qquad (\text{在}R_2\text{上})\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

若t给定，w_h是退化问题(1.4)～(1.5)的数值解，$v_{1,h,\tau}$是在 t_1 方向取中等大小的步长、用差分方法求得边界层问题的数值解，则当$h\to 0$，$\tau\to 0$，$\varepsilon\to 0$时可用

$$u_{h,\tau}=\begin{cases}w_h+v_{1,h,\tau} & (\text{在}R_1\text{上})\\ w_h & (\text{在}R_2\text{上})\end{cases} \tag{1.12}$$

逼近奇异摄动问题(1.1)～(1.3)的解u_ε。

二、问题 Ⅱ

在区域R：$\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1\}$上考虑下列问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0<x<1;\ 0\leqslant t\leqslant 1) \tag{2.1}$$
$$u(0,t)=\alpha_1,\ u(1,t)=\alpha_2 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1) \tag{2.2}$$
$$u(x,0)=\varphi(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1) \tag{2.3}$$

其中a大于零的常数，$0<\varepsilon\ll 1$是小参数，α_1,α_2是给定的常数，$\varphi(x)$是给定的充分光滑的数。

当$\varepsilon=0$时摄动问题(2.1)～(2.3)退化为一阶双曲型方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - a\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 & (0<x<1,\ 0<t\leqslant 1) & (2.4) \\ w(x,0)=\varphi(x) & (0\leqslant x\leqslant 1) & (2.5) \\ w_1(1,t)=\alpha_2 & (0\leqslant t\leqslant 1) & (2.6) \end{cases}$$

这是二阶抛物型方程退化为一阶双曲型方程的情形，在$x=0$处失去了边界条件，于是当$\varepsilon\to 0$时在$x=0$的附近问题(2.1)～(2.3)的解不可能一致逼近于退化问题(2.4)～(2.6)的解，将产生边界层现象。

因为退化问题(2.4)～(2.6)不包含小参数ε，因此任何数值方法不作修改可直接应用。事实上，我们可取隐格式

$$\begin{cases} \dfrac{w_{k,j+1}-w_{k,j}}{\tau} - a\dfrac{w_{k+1,j+1}-w_{k,j+1}}{h} = 0 & (2.7) \\ w_{k,0}=\varphi_k,\quad w_{N,j}=\alpha_2 & (2.8) \end{cases}$$

易证此格式是无条件稳定的。

根据渐近方法的分析，当$\varepsilon\to 0$时，问题(2.1)～(2.3)的解u_ε可一致地表示为：

$$u_\varepsilon(x,t)=w(x,t)+v(z,t)+O(\varepsilon) \tag{2.9}$$

其中$z=x/\varepsilon$是伸长变量，w是退化问题(2.4)～(2.6)的解，v是边界层问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v}{dz^2} + a\dfrac{dv}{dz} = 0 & (2.10) \\ v(0,t)=\alpha_1-w(0,t) & (2.11) \\ \lim\limits_{z\to\infty} v=0 & (2.12) \end{cases}$$

的解。

考虑下列修改：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v_1}{dz^2} + a\dfrac{dv_1}{dz} = 0 & (2.13) \\ v_1(0,t)=\alpha_1-w(0,t) & (2.14) \\ v_1(m,t)=0 & (2.15) \end{cases}$$

当t给定时，这是常微分方程的二点边值问题，其中 m是待定常数，我们选取m使得

$$m\ll 1/\varepsilon \tag{2.16}$$

和

$$|v_1-v|\leqslant\varepsilon \tag{2.17}$$

令

$$v_1(z,t)=C_1+C_2\exp(-az) \tag{2.18}$$

由(2.14),(2.15)可得

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2&=\alpha_1-w(0,t) \\ C_1+C_2\exp(-am)&=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

和

$$C_1=\frac{\alpha_1-w(0,t)}{\exp(-am)-1}\exp(-am) \tag{2.20}$$

$$C_2=\frac{w(0,t)-\alpha_1}{\exp(-am)-1} \tag{2.21}$$

所以 $$v_1(z,t)=\frac{[\alpha_1-w(0,t)]\{\exp(-am)-\exp(-az)\}}{\exp(-am)-1}$$

因为

$$v(z,t)=(\alpha_1-w(0,t))\exp(-az)$$

所以 $$|v_1-v|=\left|(\alpha_1-w(0,t))\left\{\frac{\exp(-am)-\exp(-az)}{\exp(-am)-1}-\exp(-az)\right\}\right|$$

$$\leqslant\left|\alpha_1-w(0,t)\right|\frac{\exp(-am)}{1-\exp(-am)}$$

由

$$\frac{\exp(-am)}{1-\exp(-am)}\leqslant\varepsilon \tag{2.22}$$

易知可选取

$$m=\left[\frac{-\ln\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)}{a}\right]+1 \tag{2.23}$$

若假定

$$R=R_1+R_2$$

其中

$$R_1:\ \{0\leqslant t\leqslant 1,\ \varepsilon m<x\leqslant 1\}$$
$$R_2:\ \{0\leqslant t\leqslant 1,\ 0<x\leqslant \varepsilon m\}$$

当$\varepsilon\to 0$时有

$$\left.\begin{aligned}&u_\varepsilon\approx w &&(\text{在 } R_1 \text{ 中})\\&u_\varepsilon\approx w+v_1 &&(\text{在 } R_2 \text{ 中})\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

若$w_{k,\tau}$是退化问题(2.4)～(2.6)的数值解，$v_{1,h1}$是常微分方程两点边值问题(2.13)～(2.15)的数值解，可取中等大小的步长，当$h\to 0$，$\tau\to 0$，$h_1\to 0$，$\varepsilon\to 0$时可用

$$u_{k,\tau}=\begin{cases}w_{h,\tau} & (\text{在}R_1\text{中})\\ w_{h,\tau}+v_{1,h1} & (\text{在}R_2\text{中})\end{cases} \tag{2.25}$$

逼近奇异摄动问题(2.1)～(2.3)的解u_ε。

三、数 值 例 子

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}=3x-1 &&(0<x<1;\ 0<t<1)\\&u(x,0)=x^2(x-1)/2+\sin\pi x &&(0\leqslant x\leqslant 1)\\&u(0,t)=u(1,t)=0 &&(0\leqslant t\leqslant 1)\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

当$\varepsilon=0$时问题(3.1)退化为下列问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=3x-1 &&(0<x<1)\\&w(0,t)=0,\quad w(1,t)=0 &&(0\leqslant t\leqslant 1)\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

边界层问题是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial v}{\partial t_1} \qquad (0<x<1;\ 0<t_1)\\&v(x,0)=\sin\pi x \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)\\&v(0,t_1)=0,\ v(1,t_1)=0 \qquad (0<t_1)\\&\lim_{t_1\to\infty} v=0\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

可修改为下列形式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}=\frac{\partial v_1}{\partial t_1} \qquad (0<x<1;\ 0<t_1\leqslant m)\\&v_1(x,0)=\sin\pi x \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)\\&v_1(0,t_1)=0,\ v_1(1,t_1)=0 \qquad (0\leqslant t_1\leqslant m)\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

其中m是一个待定常数，我们选取m使得

$$m\ll 1/\varepsilon \tag{3.5}$$

和

$$|\exp(-\pi^2 m)\sin\pi x|\leqslant\varepsilon \tag{3.6}$$

故有

$$m\geqslant \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\Big/\pi^2 \tag{3.7}$$

若 $\varepsilon=10^{-6}$则可取

$$m=1.4 \tag{3.8}$$

下面就$\varepsilon=10^{-6}$的情形，对精确解和数值解选取若干点列于表1。

表1

点　坐　标	精　确　解	数　值　解	误　　差
$\left(\frac{1}{100},\ 10^{-6}\right)$	$0.2840922E-01$	$0.2840715E-01$	$0.2071261E-05$
$\left(\frac{9}{100},\ 10^{-6}\right)$	$0.2490855E+00$	$0.2490671E+00$	$0.1844764E-04$
$\left(\frac{17}{100},\ 10^{-6}\right)$	$0.4492073E+00$	$0.4491736E+00$	$0.3358722E-04$
$\left(\frac{25}{100},\ 10^{-6}\right)$	$0.6172144E+00$	$0.6171670E+00$	$0.4702806E-04$
$\left(\frac{33}{100},\ 10^{-6}\right)$	$0.7433665E+00$	$0.7433097E+00$	$0.5674362E-04$
$\left(\frac{41}{100},\ 10^{-6}\right)$	$0.8204541E+00$	$0.8203918E+00$	$0.6228685E-04$
$\left(\frac{49}{100},\ 10^{-6}\right)$	$0.8443456E+00$	$0.8442809E+00$	$0.6473064E-04$
$\left(\frac{57}{100},\ 10^{-6}\right)$	$0.8143448E+00$	$0.8142811E+00$	$0.6365776E-04$
$\left(\frac{65}{100},\ 10^{-6}\right)$	$0.7333305E+00$	$0.7332721E+00$	$0.5841255E-04$
$\left(\frac{73}{100},\ 10^{-6}\right)$	$0.6076727E+00$	$0.6076233E+00$	$0.4941225E-04$
$\left(\frac{81}{100},\ 10^{-6}\right)$	$0.4469279E+00$	$0.4468911E+00$	$0.3683567E-04$
$\left(\frac{89}{100},\ 10^{-6}\right)$	$0.2633370E+00$	$0.2633146E+00$	$0.2241135E-04$

由上述可知当我们在边界层附近计算精确解时必需在t方向取步长 $\tau=10^{-8}$，而在计算边界层问题的数值解时仅需在t_1方向取$\tau_1=10^{-2}$。

参 考 文 献

[1] Hsiao, G.C.and K.E. Jordan, Solutions to the difference equations of singular perturbation problems, *Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems*, edited by P. W. Hemker and J. J. H. Miller (1979).

[2] Вишик М. И. и Л. А. Люстерник, Регуляно вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, *УМН*, 12, 5 (77) (1957), 3—122.

The Boundary Layer Method for the Solution of Singular Perturbation Problem for the Parabolic Partial Differential Equation

Wu Chi-kuang

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

In this paper, we discuss the singular perturbation problem of the parabolic partial differential equation. As usual, we must reduce the mesh size in the neighbourhood of the boundary layer so that typical feature of the boundary layer will not be lost. Then we need very large operational quantity when mesh sizes are getting too small.

Now we propose the boundary layer scheme, which needn't take very fine mesh size in the neighbourhood of the boundary layer. Numerical examples show that the accuracy can be satisfied with moderate step size.