应用数学和力学，第8卷第2期（1987年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

稳定性、分叉、浑沌的泛系研究*

高隆颖

（武汉数字工程研究所，1985年9月26日收到）

摘　要

本文将不动子集划分为三种类型，重点讨论Ⅱ型不动子集的存在性，将不动子集的研究同稳定性、分叉、浑沌等非线性问题的研究联系起来，并且提出一种李雅普诺夫稳定性及其第二方法的离散拟化．

一、引　　言

泛对称是泛系方法论研究的主要内容之一．不动泛系定理就是有关泛对称的一种特化研究，主要讨论转化下相对不变的泛结构．不动子集描述了一种动静关系、一种泛对称，它是不动泛系定理所研究的一种典型的形式．

不动子集是在某个二元关系的作用下相对不动的子集．不动子集是传统的不动点，特别是Kakutani型不动点的推广．我们知道不动点理论是经典数学的一个重要的分枝，在物理学、力学、对策论、计算机科学中有着广泛的应用．虽然不动子集不具有不动点那样的精确性，但它有更广的普适性，因为不动泛系定理不需要不动点定理所要求的一些很严格的限制条件．不动泛系定理正是从整体的、定性的角度来分析事物机理，不动泛系定理与非线性问题的研究有密切的联系．

不动子集可以分为三种类型．有关Ⅰ型不动子集已有许多讨论，本文集中力量研究Ⅱ型不动子集的存在性．利用Ⅱ型不动子集，我们提出了一种李雅普诺夫稳定性及其第二方法的离散拟化，把一个系统的稳定性问题转化为Ⅱ型不动子集的存在性问题．对于一个给定的子集和一个二元关系，本文给出了一个表达式，用它可以给出某些Ⅱ型不动子集．

二、Ⅱ型不动子集的存在性

设G是一给定的集合，$f\subset G^2$是G上的二元关系，$D\subset G$，$D\neq\phi$．

定义　若$D\circ f=D$，则D称为f的Ⅰ型不动子集；若$D\circ f\subset D$，则D称为f的Ⅱ型不动子集；若$D\subset D\circ f$，则D称为f的Ⅲ型不动子集．

$F_1(f)$，$F_2(f)$和$F_3(f)$分别表示Ⅰ型，Ⅱ型，Ⅲ型不动子集之全体．由定义，$F_1(f)=F_2(f)\cap F_3(f)$．

* 吴学谋推荐．

由于本文只讨论Ⅱ型不动子集，在不引起混乱时，我们简称Ⅱ型不动子集为不动子集。

将Ⅱ型不动子集的存在性一般化，我们提出这样一个问题：对于给定的集合G，F与二元关系$g\subset G\times F$，是否存在$D\subset G$满足$D\neq\phi$，$D\circ g\subset H$，其中$H\subset F$？令$F(g,H)$表示上述D之全体。如果$F=G$，$H\in F(g,H)$，那么H就是g的一个Ⅱ型不动子集。

定理2.1 令$f\subset G^2$，$g\subset G\times F$，$g\circ g^{-1}\in E_s[G)$，$H_1,H_2\subset F$，$D_1=g\circ H_1$，$D_2=g\circ H_2$。如果$H_1\circ g^{-1}\circ f\circ g\subset H_2$，则$D_1\circ f\subset D_2$。

定理2.2 设$g\subset G\times F$，$H\subset F$，则对任意的$D_1\subset g\circ H-g\circ((g\circ H)\circ g-H)$和$D_2\subset G-g\circ F$，都有$(D_1\cup D_2)\circ g\subset H$。

证明 因为$D_2\circ g=\phi$，所以只须证明$D_1\circ g\subset H$。令$D=g\circ H-g\circ((g\circ H)\circ g-H)$。显然，$D\circ g\subset H$可推出$D_1\circ g\subset H$。

对任取的$x\in D\circ g$，存在$y\in D$使得$x\in y\circ g$。于是存在$y\in g\circ H$，$y\notin g\circ((g\circ H)\circ g-H)$，使得$x\in y\circ g$。即$x\in(g\circ H)\circ g$，$y\in g\circ x$，$y\in g\circ H$。如果$x\notin H$，则$x\in(g\circ H)\circ g-H$，$y\in g\circ((g\circ H)\circ g-H)$。矛盾，所以$x\in H$，$D\circ g\subset H$。

定理2.3 若$g\subset G\times F$，$F(g,H)\neq\phi$，则对任意的$D\in F(g,H)$，存在$D_1\subset g\circ H-g\circ((g\circ H)\circ g-H)$，$D_2\subset G-g\circ F$，使得$D=D_1\cup D_2$。

证明 对$D\in F(g,H)$，令$D_2=D-g\circ F$，$D_1=D-D_2$，则$D=D_1\cup D_2$，$D_2\subset G-g\circ F$。对任意的$x\in D_1$，有$x\in D\cap g\circ F$。因为$D\circ g\subset H$且$x\in D\cap g\circ F$，所以$x\in g\circ H$。假设$x\notin g\circ H-g\circ((g\circ H)\circ g-H)$，则$x\in g\circ((g\circ H)\circ g-H)$，即存在$y\in(g\circ H)\circ g-H$，使得$x\in g\circ y$。因此$y\in H$，不然就有$x\circ g\not\subset H$。而$y\in(g\circ H)\circ g-H$与$y\in H$矛盾，所以假设不成立。故$D_1\subset g\circ H-g\circ((g\circ H)\circ g-H)$。

由上面两个定理可导出

定理2.4 已知$g\subset G\times F$，$H\subset F$，则$F(g,H)\neq\phi$当且仅当$g\circ H-g\circ((g\circ H)\circ g-H)\neq\phi$，或者$G-g\circ F\neq\phi$。

定理2.5 对$g\subset G\times F$，$H\subset F$，有$F(g,H)=\{D_1\cup D_2|D_1\subset g\circ H-g\circ((g\circ H)\circ g-H),D_2\subset G-g\circ F\}-\{\phi\}$。

定理2.6 若$g\subset G\times F$，$G=g\circ F$，则H是使得$F(g,H)\neq\phi$的极小元的充分必要条件是对任意的$D\in F(g,H)$，都有$D\times H\subset g$。

证明 令$D'=g\circ H-g\circ((g\circ H)\circ g-H)$。对任意的$x\in D'$和$y\in H$，如果$x\notin g\circ(H-\{y\})$，则$x\circ g=\{y\}$，即$(x,y)\in g$。如果$x\in g\circ(H-\{y\})$，则$x\in g\circ((g\circ H')\circ g-H')$，$H'=H-\{y\}$，否则就有$H'\subset H$，$H'\neq H$，使得$F(g,H')\neq\phi$，这与$H$的极小性矛盾。所以$x\in g\circ((g\circ H')\circ g-H')$，$x\circ g-H'\neq\phi$。又$x\circ g\subset H$，$H'=H-\{y\}$，所以$y\in x\circ g$。故$(x,y)\in g$，即$D'\times H\subset g$。因为$D'$是$F(g,H)$中的最大元，所以必要性成立。

要证明充分性，我们先证明一个引理：如果$H_1\subset H_2$，则$g\circ H_1-g\circ((g\circ H_1)\circ g-H_1)\subset g\circ H_2-g\circ((g\circ H_2)\circ g-H_2)$。

对$x\in g\circ H_1-g\circ((g\circ H_1)\circ g-H_1)$，假设$x\notin g\circ H_2-g\circ((g\circ H_2)\circ g-H_2)$，那么$x\in g\circ((g\circ H_2)\circ g-H_2)$，$x\notin g\circ((g\circ H_1)\circ g-H_1)$，$x\in g\circ H_1$。因此，$x\notin g\circ(x\circ g-H_1)$，$x\circ g\subset H_1$。又存在$y\in(g\circ H_2)\circ g-H_2$，使得$x\in g\circ y$，即$y\notin H_2$，$x\in g\circ y$，因此$x\circ g\not\subset H_2$。这与$x\circ g\subset H_1$矛盾，所以$x\in g\circ H_2-g\circ((g\circ H_2)\circ g-H_2)$，引理成立。

根据引理，若对任意的$x\in H$，$g\circ H_1-g\circ((g\circ H_1)\circ g-H_1)=\phi$，$H_1=H-\{x\}$，则充分性就成立。假设存在$x\in H$，使得$g\circ H_1-g\circ((g\circ H_1)\circ g-H_1)\neq\phi$，$H_1=H-\{x\}$。那么存在

$y \in g \circ H_1$，$y \bar{\in} g \circ ((g \circ H_1) \circ g - H_1)$，因此$y \circ g - H_1 = \phi$。因为$y \in D'$，$\{y\} \times H \subset g$，如果$H_1 = \phi$，则$H$就是极小的；如果$H_1 \neq \phi$，就产生了矛盾。所以$g \circ H_1 - g \circ ((g \circ H_1) \circ g - H_1 = \phi$，充分性成立。

上面对$F(g,H)$作了仔细的讨论，给出了$F(g,H)$的表达式。将会看到$F(g,H)$在研究稳定性时起着重要的作用。

不动子集和分叉、浑沌有密切的联系。分叉和浑沌是非线性系统所特有的现象。它们的出现是由非线性系统的多值性引起的。对于一个Ⅰ型不动子集D，如果D稳定的且为有限的子集($|D|>1$)，那么D就对应着分叉。如果D是稳定的，从D中任一点开始运动的轨迹不再和这一点相交，那么D就对应着浑沌。

文[7]研究了稳定性、分叉、浑沌和突变等问题，给出了定义：设$g \subset G^2$，$D \subset G$，若$D^2 \cap g = \phi$，则称D对g为泛浑沌或内稳定；若对任意$x \in \bar{D}$，$x \circ g \cap D \neq \phi$，则称$D$对$g$为泛引子或外稳定；若$D$同时为泛浑沌与泛引子，则称$D$为泛怪引子或核。

三、稳定性的泛系研究

本节把不动泛系定理和稳定性的研究具体地结合了起来，类似于常微分方程的稳定性，提出了是否存在Ⅱ型不动子集，给出了李雅普诺夫稳定性及其第二方法的一种离散拟化。本节的讨论也是有关Ⅱ型不动子集的进一步研究。

如果把$f \subset G^2$视为某个方程组的离散解，$(x,y) \in f$表示从x出发(x作为初始点)，时刻t后到达y。这里就有一个稳定性问题：对于y的一个邻域$D(y)$，是否存在x的一个邻域$D(x)$，使得$D(x) \circ f \subset D(y)$？

根据前面的讨论，结合稳定性的研究，我们提出这样一个问题：设G是一给定的集合，$f \subset G^2$，$(x,x) \in f$，是否存在$D \subset G$，$x \in D$，$D - \{x\} \neq \phi$，使得$D \circ f \subset D$？进一步地，对一给定的$D \subset G$，是否存在D'满足$x \in D'$，$D' - \{x\} \neq \phi$，使得$D' \circ f \subset D$？

令$F_x(f) = \{D \mid x \in D,\ D - \{x\} \neq \phi,\ D \neq G,\ D \circ f \subset D\}$，$F_x(f,D) = \{D' \mid D' \subset G,\ x \in D',\ D' - \{x\} \neq \phi,\ D' \circ f \subset D\}$，其中$f \subset G^2$，$(x,x) \in f$。在写出$F_x(f)$和$F_x(f,D)$时，我们总认为它们是有意义的。

上节讨论的$F_2(f)$和$F(g,H)$是$F_x(f)$和$F_x(f,D)$更一般的形式。当加上某些条件时，上节的结果便可用于$F_x(f)$和$F_x(f,D)$的讨论。因此，从这两节可以看出Ⅱ型不动子集和稳定性的研究有着密切的联系。下面将讨论稳定性问题，即$F_x(f)$或$F_x(f,D)$是否非空。

命题3.1 若$f \subset G^2$，$(x,x) \in f$，$D \in F_x(f)$，则$x \circ f^t \subset D$。若$F_x(f) \neq \phi$，则存在$D \subset G$，使得$F_x(f,D) \neq \phi$。

命题3.2 如果$D_1 \in F_x(f,D)$，则对任意的$D_2 \subset D_1$，$x \in D_2$，$D_2 - \{x\} \neq \phi$，都有$D_2 \in F_x(f,D)$。

命题3.3 如果D_1，$D_2 \in F_x(f)$，$D_1 \cup D_2 \neq G$，D'，$D'' \in F_x(f,D)$，那么$D_1 \cup D_2 \in F_x(f)$，$D' \cup D'' \in F_x(f,D)$。

令$\leqslant \in T[G]$表示$\leqslant$是G上传递的序关系。

定理3.1 设$(G, \leqslant)$是一有序集，$\leqslant \in T[G]$，$f,g: G \to G$，$f(x_0) = x_0$，存在$x_1 \in G$使得$D = \{x \mid g(x) \leqslant x_1\}$满足$D \neq G$，$x_0 \in D$，$D - \{x_0\} \neq \phi$。如果对任意的$x \in G$，$g(f(x)) \leqslant g(x)$，则$F_{x_0}(f) \neq \phi$。

对A，$B\subset G$，定义$A\leqslant B$如下：对任意的$x\in A$，$y\in B$，$x\leqslant y$。这样，就把$\leqslant$诱导地定义到$P(G)$上了。同样可以诱导地定义$\leqslant$于G^2，$P(G^2)$上。

定理3.2 设f，$g\subset G^2$，$(x_0, x_0)\in f$，$\leqslant\in T[G]$，存在x_1使得$D\neq G$，$x_0\in D$，$D-\{x_0\}\neq\phi$，其中$D=\{x|x\circ g\leqslant x_1\}$。如果对任意的$x\in G$，$x\circ f\circ g\leqslant x\circ g$，则$F_{x_0}(f)\neq\phi$。

G上存在传递的序关系是一个较强的限制。例如，一维欧氏空间上的传递关系就不能直接给出合理的n维欧氏空间上的传递关系。然而，欧氏空间又是数学所研究的基本空间之一。因此，有必要删去G上有传递关系这个条件。

定理3.3 设$f\subset G^2$，$g\subset G\times F$，$(x_0,x_0)\in f$，$\leqslant\in T[F]$，存在c使得$D=\{x\in G|g(x)\leqslant c\}$满足$D\neq G$，$x_0\in D$，$D-\{x_0\}\neq\phi$。如果对任意的$x\in G$，$x\circ f\circ g\leqslant x\circ g$，则$F_{x_0}(f)\neq\phi$。

定理3.3显然可推出定理3.1和定理3.2。这些定理用一个二元关系g判断f的稳定性。这个二元关系g是李雅普诺夫函数的拟化。

定理3.3′ 设$f\subset G^2$，$g\subset G\times F$，$(x_0,x_0)\in f$，$\leqslant\in T[F]$，存在c使得$D=\{x\in G|g(x)\geqslant c\}$满足$D\neq G$，$x_0\in D$，$D-\{x_0\}\neq\phi$。如果对任意的$x\in G$，$x\circ f\circ g\geqslant x\circ g$，则$F_{x_0}(f)\neq\phi$。

在利用传递的序关系讨论$F_x(f)$之后，我们将在没有序关系的条件下讨论$F_x(f)$和$F_x(f, D)$。

定理3.4 令$f\subset G^2$，$g\subset G\times F$，$F_{x_0}(f,D)$有意义，对任意的$x\in D$，$x\circ g-D\circ g\neq\phi$。如果存在$D'$满足$x_0\in D'$，$D'-\{x_0\}\neq\phi$，$D'\circ f\circ g\subset D\circ g$，则$D'\in F_{x_0}(f,D)$。

由定理2.1可推出

定理3.5 设$f\subset G^2$，$g\subset G\times F$，对任意的$x\in G$，$x\circ g\neq\phi$，并且存在$H\subset F$，使得$D=g\circ H$满足$x_0\in D$，$D-\{x_0\}\neq\phi$，$D\neq G$。如果$H\circ g^{-1}\circ f\circ g\subset H$，则$D\in F_{x_0}(f)$。

上面的定理是否成立与$(x_0,x_0)\in f$无关。加上这个条件是为了强调定理的背景意义。这些讨论也可视为不动泛系定理的进一步发展。

从定理3.4可以看出类似于李雅普诺夫函数的二元关系g在分析f的稳定性时起着重要的作用。对于给定的f，有必要研究满足$f\circ g\subset g$的二元关系g。同时，具有$f\circ g\subset g$这种守恒性的泛结构也是不动泛系定理所研究的对象之一。

定理3.6 设$f\subset G^2$，$g\subset G\times F$。如果$f\circ g\subset g$，则$(f\circ x)\circ g\cap x\circ g\neq\phi$，其中$x\in G$，$f\circ x\neq\phi$，$x\circ g\neq\phi$。如果$f$是赋形，$g$是投影，对$x\in G$，$f\circ x\neq\phi$，$x\circ g\neq\phi$，有$(f\circ x)\circ g\cap x\circ g\neq\phi$，则$f\circ g\subset g$成立。

证明 若$f\circ g\subset g$，$f\circ x\neq\phi$，$x\circ g\neq\phi$，则存在$(y,z)\in g$，$y\in f\circ x$，$z\in x\circ g$。所以$z\in(f\circ x)\circ g$，$z\in x\circ g$，即$(f\circ x)\circ g\cap x\circ g\neq\phi$。

对于$(x,y)\in f\circ g$，存在u使得$(x,u)\in f$，$(u,y)\in g$。由条件知，存在$z\in(f\circ u)\circ g\cap u\circ g$，那么就有$v$，使得$(v,u)\in f$，$(v,z)\in g$，$(u,z)\in g$。因为$f$是赋形，$g$是投影，所以$x=v$，$y=z$。又$(v,z)\in g$，所以$(x,y)\in g$。故$f\circ g\subset g$，命题成立。

命题3.4 若对任意的$(x,y)\in g$，有$(f\circ x)\times\{y\}\subset g$，则$f\circ g\subset g$。若对任意的$(x,y)\in f$，有$\{x\}\times(y\circ g)\subset g$，则$f\circ g\subset g$。

定理3.7 令$h\in P(F)\uparrow G$，$D\subset G$。如果$g=\bigcup((f^t\circ x)\times h(x))$ $(x\in D)$，则$f\circ g\subset g$。（$A\uparrow B$表示从B到A的投影。）

定理3.8 如果$f\subset G^2$，$g\subset G\times F$，$f\circ g\subset g$，则对任意的$(x,y)\in g$，有$(f^t\circ x)\times\{y\}\subset g$。

证明 设$f\circ g\subset g$，$(x,y)\in g$，$z\in f^t\circ x$，那么存在$n\in\mathbf{N}$，$z\in f^{(n)}\circ x$。$n=1$时，显然有$(z, y)\in g$。$n=k$时，假设$(z,y)\in g$。$n=k+1$时，$z\in f\circ f^{(k)}\circ x$，存在$u\in f^{(k)}\circ x$，$z\in f\circ u$。由假设知，

$(u,y)\in g$。所以$(z,y)\in g$，即$(f^t\circ x)\times\{y\}\subset g$。

定理3.9 令$h,l\in P(F)\uparrow G$，$l(x)\subset h(x)$，$D\subset G$。如果$g=\bigcup[((f^t\circ x)\times h(x))\bigcup(\{x\}\times l(x))]$ $(x\in D)$，则$f\circ g\subset g$。

证明 对任取的$(x,y)\in f\circ g$，存在$z\in G$，$x\in f\circ z$，$y\in z\circ g$。从而，存在$u\in D$，使得$x\in f\circ z$，$(z,y)\in((f^t\circ u)\times h(u))\bigcup(\{u\}\times l(u))$。于是$x\in f^t\circ u$，$y\in h(u)$，即$(x,y)\in(f^t\circ u)\times h(u)\subset g$。所以$f\circ g\subset g$。

h的定义域限制在D中可以删去，因为当$h(x)=\phi$，$x\in\bar{D}$时，就相当于h定义在D中。

定理3.10 令$f\subset G^2$，$S=\{\bigcup[((f^t\circ x)\times h(x))\bigcup(\{x\}\times l(x))]\ (x\in G)\,|\,h,\ l\in P(F)\uparrow G,\ l\subset h\}$。$S$是$f\circ g\subset g$的解空间。

我们在下面将从泛系的观点出发研究不稳定性。

假设$f\subset G^2$是某个系统的解，$(x_0,x_0)\in f$是一个定常解，D是x_0的邻域。若对x_0的任意的邻域D'，$D'\circ f\not\subset D$，则x_0就称为一个不稳定解。

定理3.11 设$f\subset G^2$，$g\subset G\times F$，$\leqslant\in T[F]$，存在$c\in F$，使得$D=\{x|g(x)\leqslant c\}$($D=\{x|g(x)\geqslant c\}$)满足$x_0\in D$，$D\bigcap g\circ c\neq\phi$。如果对任意的$x\in D$，有$x\circ f\circ g>x\circ g$ ($x\circ f\circ g<x\circ g$)，则$D\circ f\not\subset D$。

参 考 文 献

[1] Wu Xue-mou, Pansystems methodology: Concepts, theorems and applications (Ⅰ)—(Ⅳ)，科学探索，1,2,4 (1982), 1,4 (1983), 1 (1984).

[2] 吴学谋，生态学、医学与诊断学的泛系元理论(Ⅰ)—(Ⅱ)，大自然探索，2,3 (1983), 1 (1984).

[3] Istratescu, Vasile I., *Fixed Point Theory*, D. Reidel Publishing Company (1981).

[4] 高隆颖、王书基，泛对称与不动泛系定理，应用数学和力学，5，5 (1984)，743—747.

[5] Gao Long-ying, Fixed pansystems theorems and fuzzy fixed point, *BUSFAL*, 1 (1984).

[6] 许淞庆，《常微分方程稳定性理论》，上海科技出版社 (1962).

[7] Wu Xue-mou, Pansystems methodology and non-linear analysis: New studies of bifurcation, catastrophe, chaos and stability, *Proceedings of International Conference of Non-Linear Mechanics* (1985).

[8] 朱照宣，非线性动力学中的浑沌，分叉、突变与稳定性学术会议（中国）(1983).

Pansystems Studies in Stability, Bifurcation and Chaos

Gao Long-ying
(*Wuhan Digital Engineering Institute, Wuhan*)

Abstract

This paper divides fixed subsets into three kinds, mainly discusses the existence of Ⅱ-type fixed subset, connects the investigations in fixed subsets with the studies in non-linear problems, such as stability, bifurcation, chaos, etc., and proposes a kind of discrete simulation to Liapunov stability and his second method.