

# 弹性平面孔洞形状优化复变函数方法

孙焕纯 张巨勇 严国梅 张积珠

(大连工学院) (合肥工业大学力学所) (大连工学院) (大连工学院)

(1985年10月25日收到)

## 摘 要

本文提出了弹性平面孔洞形状优化的复变函数方法,充分利用了复变函数方法分析孔洞应力的有效性,进行应力分析.对孔洞形状的优化,是将保角变换函数中的一些系数做为设计变量,采用敏度分析和梯度法降低绝对值最大的周向应力,同时使绝对值次大的周向应力不超过绝对值最大的周向应力(这两个周向应力实际是周向应力的两个极值点处的周向应力值)逐次迭代修正保角变换函数中的系数值,直至绝对值最大的周向应力降低至绝对值次大的周向应力相等为止.这个方法保证了应力解在边界上的连续性、可微性和高精度性,比差分法和有限元法有着明显的优越性.

## 一、弹性平面多孔洞应力分析的一般理论和方法

根据文献[1],[2],[3]我们对图 1 所示的弹性平面有任意多个、呈任意形状、任意排列的孔洞,在外力作用下应力分析问题提出了一般解法.

应力函数取下述形式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\sum_{k=1}^{s-1} \frac{X_k + iY_k}{2\pi(1+\kappa)} \ln \zeta_k + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \zeta_k^{-j} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{sj} \zeta_s^j \\ \psi(z) &= \kappa \sum_{k=1}^{s-1} \frac{X_k - iY_k}{2\pi(1+\kappa)} \ln \zeta_k + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{\infty} b_{kj} \zeta_k^{-j} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{sj} \zeta_s^j \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

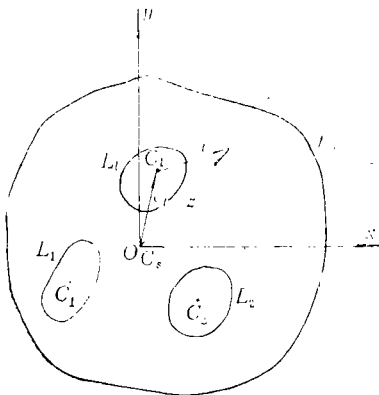


图 1

式中  $X_k, Y_k$  分别表示在第  $k$  个孔边作用外力的主矢量的  $x$  方向和  $y$  方向的分量,  $\kappa=3-4\nu$  (或  $(3-\nu)/(1+\nu)$ ) 对平面应变问题 (或平面应力问题),  $\nu$  为材料的泊松比, 且

$$\zeta_k = \omega_k^{-1}(z_k) \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (1.2)$$

$$z_k = z - c_k = \omega_k(\zeta_k) \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (1.3)$$

边界条件 (在  $L_i$  上)

将坐标原点平移至  $C$  点, 有  $z = z_l + c_l$ , 这时在  $L_l$  边界上  $z_l = t_l$ , 边界条件为:

$$\varphi(t_l) + \overline{(t_l + c_l)} \overline{\varphi'(t_l)} + \overline{\psi(t_l)} = f_{1l} + i f_{2l} + \overline{C}_l \quad (l=1, 2, \dots, s) \quad (1.4)$$

式中  $\bar{C}_l$  为  $s$  个未定常数, 其中可任意确定一个为零,  $f_{2l}$  前  $i = \sqrt{-1}$ ,  $t_l$  为  $L_l$  边界上的对图 1 中坐标原点平移至  $C_l$  时的复坐标,  $t_l = z|_{L_l} - c_l = \omega_l(\sigma_l)$ . 在  $L_l$  边界上有:

$$\xi_k = \omega_k^{-1}(z_k|_{L_l} - c_k) = \omega_k^{-1}[\omega_l(\sigma_l) + c_l - c_k]$$

于是(1.4)式成为:

$$\varphi(\sigma_l) + \left( \frac{\omega_l(\sigma_l) + c_l}{\omega'(\sigma_l)} \right) \overline{\varphi'(\sigma_l)} + \overline{\psi(\sigma_l)} = f_{1l} + i f_{2l} + \bar{C}_l \quad (1.5)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\sigma_l) &= - \sum_{k=1}^{s-1} \frac{X_k + iY_k}{2\pi(1+\kappa)} \ln\{\omega_k^{-1}(\omega_l(\sigma_l)) + c_{lk}\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \{\omega_k^{-1}(\omega_l(\sigma_l)) + c_{lk}\}^{-j} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} a_{sj} \{\omega_s^{-1}(\omega_l(\sigma_l)) + c_{ls}\}^j \\ \psi(\sigma_l) &= \kappa \sum_{k=1}^{s-1} \frac{X_k - iY_k}{2\pi(1+\kappa)} \ln\{\omega_k^{-1}(\omega_l(\sigma_l)) + c_{lk}\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{\infty} b_{kj} \{\omega_k^{-1}(\omega_l(\sigma_l)) + c_{lk}\}^{-j} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} b_{sj} \{\omega_s^{-1}(\omega_l(\sigma_l)) + c_{ls}\}^j \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

式中:

$$c_{lk} = c_l - c_k$$

由于  $\bar{\sigma}_l = 1/\sigma_l$ , 所以将(1.6)代入(1.5)

有:  $f(\sigma_l) = f_l(\sigma_l) = f_{1l} + i f_{2l} + \bar{C}_l$

应用柯西积分公式有:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\sigma_l)}{\xi_l - \sigma_l} d\sigma_l = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f_l(\sigma_l)}{\xi_l - \sigma_l} d\sigma_l$$

因  $\xi_l$  在  $\sigma_l$  之外, 即  $\|\xi_l\| > 1$ , 将上式两边分别展成  $\xi_l$  的幂级数, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\sigma_l)}{\xi_l(1 + \sigma_l/\xi_l)} d\sigma_l &= \frac{1}{2\pi i} \oint f_l(\sigma_l) \left( \frac{1}{\xi_l} + \frac{\sigma_l}{\xi_l^2} + \frac{\sigma_l^2}{\xi_l^3} + \dots \right) d\sigma_l \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint f_l(\sigma_l) \left( \frac{1}{\xi_l} + \frac{\sigma_l}{\xi_l^2} + \frac{\sigma_l^2}{\xi_l^3} + \dots \right) d\sigma_l \end{aligned}$$

对比左右两边关于  $\xi_l^{-(p+1)}$  ( $p \geq 0$ ) 的系数有:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(\sigma_l) \sigma_l^p d\sigma_l = \frac{1}{2\pi i} \oint f_l(\sigma_l) \sigma_l^p d\sigma_l \quad (1.7)$$

其中:  $p = 0, 1, 2, \dots$ ;  $l = 1, 2, \dots, s$ .

同理, 由共轭边界条件得到:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \overline{f(\sigma_l)} \sigma_l^p d\sigma_l = \frac{1}{2\pi i} \oint \overline{f_l(\sigma_l)} \sigma_l^p d\sigma_l \quad (1.8)$$

其中:  $p=0, 1, 2, \dots$ ;  $l=1, 2, \dots, s$ .

这样共得到  $2s$  个无穷项线性代数方程组, 恰好可解得  $2s$  组无穷项系数  $a_{lj} = a_{ljR} + i a_{ljI}$ ,  $b_{lj} = b_{ljR} + i b_{ljI}$  ( $l=1, 2, \dots, s; j=1, 2, \dots, \infty$ ),  $a_{ljI}, b_{ljI}$  前的  $i = \sqrt{-1}$ .

由(1.7), (1.8)求关于  $a_{lj}, b_{lj}$  的方程组的系数时, 采用留数定理.  $a_{lj}$  和  $b_{lj}$  已知后, 便可求得域内任意点( $z$ )的应力:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re}\varphi'(z) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

## 二、弹性平面多孔洞形状优化一般方法

在弹性平面多孔洞问题中, 反映孔洞的形状的是(1.2), (1.3)二式中的两个保角变换函数,  $z_k = z - c_k = \omega_k(\xi_k)$ , 这里称为正变换函数,  $\xi_k = \omega_k^{-1}(z_k)$ , 称为反变换函数. 在应力分析中, 正变换函数精度要求高. 而反变换函数的精度却要求不高, 因为这个函数只是在满足其它孔的边界条件时, 反映该函数所代表的孔的影响, 而它所代表的孔边形状的某些变化, 对其它孔边应力的影响相当小(当各边不是非常接近时), 一般, 采用近似方法计算<sup>[3]</sup>; 影响一个孔边应力的主要因素仍然是该孔自身的边界形状. (1.3)式的一般形式取为:

$$z_k = \omega_k(\xi_k) = R_k \cdot (C_k \xi_k + C_0 + C_{1,k} \xi_k^{-1} + C_{2,k} \xi_k^{-2} + \dots + C_{n,k} \xi_k^{-n_k}) \quad (k=1, 2, \dots, s-1)$$

$$z_s = \omega_s(\xi_s) = R_s \cdot \sum_{i=1}^{n_s} C_i \xi_s^i$$

式中  $C_i$  或  $C_{i,k}$ , 当孔洞形状不对称于通过孔洞中心的坐标时为复数; 对称于  $O_k x_k$  轴时为实数; 对称于  $O_k y_k$  轴时,  $\xi_k$  的奇次幂所对应的系数为实数,  $\xi_k$  的偶次幂所对应的系数为纯虚数; 当对称  $O_k x_k$  和  $O_k y_k$  轴时, 只有  $\xi_k$  的奇次幂项, 且相应的系数为实数.

孔洞优化的数学模型是:

$$\min\{\max|\sigma_{\theta,k}|\} \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{s.t.} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint f(\sigma_k) \sigma_k^p d\sigma_k &= \frac{1}{2\pi i} \oint f_k(\sigma_k) \sigma_k^p d\sigma_k \\ \frac{1}{2\pi i} \oint \overline{f(\sigma_k)} \sigma_k^p d\sigma_k &= \frac{1}{2\pi i} \oint \overline{f_k(\sigma_k)} \sigma_k^p d\sigma_k \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta + \sigma_\rho &= 4\operatorname{Re}[\varphi'(\xi_k)/\omega'_k(\xi_k)] \\ \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} &= \frac{2\xi_k^2}{\rho_k^2 \omega'_k(\xi_k)} \left\{ \overline{\omega_k(\xi_k)} \phi'(\xi_k) + \psi'(\xi_k) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\text{式中} \quad \phi'(\xi_k) = \frac{d}{d\xi_k} [\varphi'(\xi_k)/\omega'_k(\xi_k)]$$

$$\bar{X}_k(0^\circ) = a_k, \quad \bar{Y}_k(90^\circ) = b_k \quad (2.4)$$

$a_k, b_k$  分别表示边界上  $0^\circ$  处和  $90^\circ$  处至孔心的距离, 是给定的值.

**解法** 采用迭代法,先按 $L_k(k=1,2,\dots,s)$ 的某一初始边界形状求得 $\omega_k^{(0)}(\xi_k)$ 和相应 $\omega_k^{(0)-1}(z_k)$ ,代入边界条件(1.7)和(1.8)得到关于求应力函数系数的线性方程组。解得后,可求出孔边任意一点的周向应力 $\sigma_{\theta,k}$ 利用差分法求 $\sigma_{\theta,k}$ 的近似导数,令其为零,求出 $|\sigma_{\theta,k}|_{\max}$ 所在的位置 $\theta_1$ (也可以用数值分析法求 $\theta_1$ ),且求得 $|\sigma_{\theta,k}|_{\max}=|\sigma_{\theta_1,k}|$ ;为了满足孔边的尺寸约束条件 $X_k(0^\circ)=a_k$ 和 $Y_k(90^\circ)=b_k$ 得到关于映射函数系数间的两个方程式,以 $\omega_k(\xi_k)=R_k(C_k\xi_k)+C_{1,k}\xi_k^{-1}+C_{3,k}\xi_k^{-3}+C_{5,k}\xi_k^{-5}+\dots$ 为例有:

$$\left. \begin{aligned} C_k &= C_k(C_{3,k}, C_{5,k}, \dots, C_{n,k}) \\ \text{和} \quad C_{1,k} &= C_{1,k}(C_{3,k}, C_{5,k}, \dots, C_{n,k}) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

由(2.5)两个线性函数关系式消去 $C_k$ 和 $C_{1,k}$ ,保留以后的系数 $C_{3,k}, C_{5,k}, \dots, C_{n,k}$ 为独立设计变量,再用差分法求得周向应力 $\sigma_{\theta,k}$ 的几个局部极值关于这些设计变量的敏度值,即

$$\frac{\partial \sigma_{\theta_j,k}}{\partial C_{i,k}} \quad (i=3,5,\dots,n; j=1,2,3)$$

的近似值,其中 $\sigma_{\theta_1,k}, \sigma_{\theta_2,k}, \sigma_{\theta_3,k}$ 为绝对值最大、次大、再次的周向应力值。然后按梯度下降法修改 $C_{i,k}$  ( $i=3,5,\dots,n$ ):

优化步骤:

$$1) \quad C_{i,k}^{(1)} = C_{i,k}^{(0)} - \nabla \sigma_{\theta_1,k} \cdot \delta_k \quad (2.6)$$

$$\text{式中, } \nabla \sigma_{\theta_1,k} = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\Delta \sigma_{\theta_1,k}}{\Delta C_{3,k}}, \frac{\Delta \sigma_{\theta_1,k}}{\Delta C_{5,k}}, \dots, \frac{\Delta \sigma_{\theta_1,k}}{\Delta C_{n,k}} \right)^T \quad n \text{ 为奇数}$$

$$\frac{\Delta \sigma_{\theta_1,k}}{\Delta C_{i,k}} = \left( \frac{\Delta \sigma_{\theta_1,k}}{\Delta C_k} \cdot \frac{\partial C_k}{\partial C_{i,k}} + \frac{\Delta \sigma_{\theta_1,k}}{\Delta C_{1,k}} \cdot \frac{\partial C_{1,k}}{\partial C_{i,k}} + \frac{\Delta \sigma_{\theta_1,k}}{\Delta C_{i,k}} \right) \quad (i=3,5,\dots,n) \quad (2.7)$$

$$\Delta = \sqrt{\sum_{i=3,5,\dots}^n \left( \frac{\Delta \sigma_{\theta_1,k}}{\Delta C_{i,k}} \right)^2}$$

2) 求步长 $\delta_k$ ,由下述条件:

$$\sigma_{\theta_1,k}^{(1)}(C_k^{(1)}, C_{1,k}^{(1)}, \dots, C_{n,k}^{(1)}) = \sigma_{\theta_2,k}^{(1)}(C_k^{(1)}, C_{1,k}^{(1)}, \dots, C_{n,k}^{(1)})$$

当 $\sigma_{\theta_1,k} \cdot \sigma_{\theta_2,k} > 0$ 时;

$$\text{或} \quad \sigma_{\theta_1,k}^{(1)}(C_k^{(1)}, C_{1,k}^{(1)}, \dots, C_{n,k}^{(1)}) = -\sigma_{\theta_2,k}^{(1)}(C_k^{(1)}, C_{1,k}^{(1)}, \dots, C_{n,k}^{(1)})$$

当 $\sigma_{\theta_1,k} \cdot \sigma_{\theta_2,k} < 0$ 时;

求出 $\delta_k = \delta_{1,k}$ 。再由下式确定 $\delta_k = \delta_{2,k}$ ;

$$\sigma_{\theta_1,k}^{(1)}(C_k^{(1)}, C_{1,k}^{(1)}, \dots, C_{n,k}^{(1)}) = -\sigma_{\theta_3,k}^{(1)}(C_k^{(1)}, C_{1,k}^{(1)}, \dots, C_{n,k}^{(1)})$$

当 $\sigma_{\theta_1,k} \cdot \sigma_{\theta_3,k} < 0$ 时。

一般取: 1)  $\sigma_{\theta_1,k} > 0, \sigma_{\theta_2,k} > 0, \sigma_{\theta_3,k} < 0$ ; 或2)  $\sigma_{\theta_1,k} < 0, \sigma_{\theta_2,k} < 0, \sigma_{\theta_3,k} > 0$ 。

最后取:

$$\delta_k = \begin{cases} \delta_{1,k}, & \text{当 } 0 < \delta_{1,k} < \delta_{2,k} \\ \delta_{2,k}, & \text{当 } 0 < \delta_{2,k} < \delta_{1,k} \end{cases} \quad (2.8)$$

完成了对第 $k$ 个孔的第一次优化。

3) 对  $k$  以外的各孔分别进行上述优化之后, 再进行应力重分析, 再重复上述优化步骤, 直至相邻二次优化结果, 孔形变化达到预计的要求, 即达到  $\min\{\max|\sigma_{\theta,k}|\}$  ( $k=1, 2, \dots, s-1$ ) 为止。

### 三、例 题

**例题 1** 无限大弹性平面内, 有一长半径为  $a(X(0^\circ)=a)$ , 短半径为  $b(Y(90^\circ)=b)$  的初始椭圆孔, 在无限远处沿短半径方向受到单向拉伸应力  $\sigma_y=p$  的作用, 使孔边最大周向应力最小, 试寻求最优孔形。取保角映射函数为:

$$z = \omega(\zeta) = R(C\zeta + C_1/\zeta + C_3/\zeta^3 + C_5/\zeta^5) \quad (3.1)$$

(3.1) 式是将  $\zeta$  平面 (数学平面) 单位圆的外域映射为  $z$  平面 (物理平面) 孔洞外域的映射函数。此时 (2.4) 的尺寸约束条件成为:

$$\zeta=1, z=a=2; \quad \zeta=i, z=ib=i \quad (3.2)$$

$$\text{令 } R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} \quad (3.3)$$

将 (3.2), (3.3) 代入 (3.1) 式得到具体形式如下:

$$C = C(C_3, C_5) = 1 - C_3, \quad C_1 = C_1(C_3, C_5) = m - C_5 \quad (3.4)$$

由对称得知:  $C, C_1, C_3, C_5$  皆为实数。

$$\omega'(\zeta) = R(C - C_1/\zeta^2 - 3C_3/\zeta^4 - 5C_5/\zeta^6)$$

$$\omega''(\zeta) = R(2C_1/\zeta^3 + 12C_3/\zeta^5 + 30C_5/\zeta^7)$$

在  $\zeta$  平面的单位圆边界上有  $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$  和  $\bar{\zeta} = e^{-i\theta} = 1/\sigma$ 。

$$\therefore \omega'(\sigma) = R(C - C_1/\sigma^2 - 3C_3/\sigma^4 - 5C_5/\sigma^6)$$

$$\overline{\omega'(\sigma)} = R(C - C_1\sigma^2 - 3C_3\sigma^4 - 5C_5\sigma^6)$$

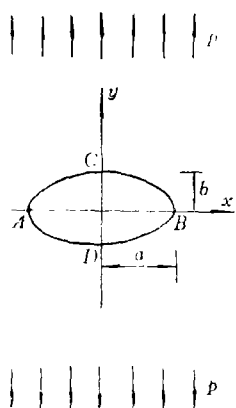


图 2

因  $X_1=Y_1=0$ , 故 (1.1) 式取下述形式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} a_k \zeta^{-k} + A \cdot R \cdot C \cdot \zeta \\ \psi(\zeta) &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_k \zeta^{-k} + B \cdot R \cdot C \cdot \zeta \\ \varphi'(\zeta) &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} -k a_k \zeta^{-(k+1)} + A \cdot R \cdot C \\ \varphi''(\zeta) &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} k(k+1) a_k \zeta^{-(k+2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

在单位圆周上有:

$$\varphi'(\sigma) = \sum -k a_k \sigma^{-(k+1)} + A \cdot R \cdot C$$

$$\overline{\varphi'(\sigma)} = \sum -k a_k \sigma^{(k+1)} + A \cdot R \cdot C$$

$$\psi(\sigma) = \sum b_k \sigma^{-k} + B \cdot R \cdot C \cdot \sigma$$

$$\overline{\psi(\sigma)} = \sum b_k \sigma^k + B \cdot R \cdot C / \sigma$$

由于应力状态对称于  $Ox, Oy$  轴, 所以  $a_k, b_k, A, B$  皆为实数, 且  $k=1, 3, 5, \dots$  由无

穷远外的条件  $\sigma_y = p$ ,  $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ , 求得:

$$A = \frac{p}{4}, \quad B = \frac{p}{2}$$

孔边的边界力为零, 所以(1.5)式为:

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0$$

(1.7)式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \varphi(\sigma) \sigma^p d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} \sigma^p d\sigma \\ + \frac{1}{2\pi i} \oint \overline{\psi(\sigma)} \sigma^p d\sigma = 0 \end{aligned}$$

上述积分分项计算如下:

$$\begin{aligned} \text{第一项: } I_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint \varphi(\sigma) \sigma^p d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint (\sum a_k \sigma^{-k} + A \cdot R \cdot C \cdot \sigma) \sigma^p d\sigma = a_{p+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第三项: } I_3 &= \frac{1}{2\pi i} \oint \overline{\psi(\sigma)} \sigma^p d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint (\sum b_k \sigma^k + B \cdot R \cdot C / \sigma) \sigma^p d\sigma \\ &= \begin{cases} B \cdot R \cdot C, & p=0 \\ 0, & p=1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第二项: } I_2 &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\omega(\sigma) \overline{\varphi'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \sigma^p d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(C\sigma + C_1/\sigma + C_3/\sigma^3 + C_5/\sigma^5)}{(C - C_1\sigma^2 - 3C_3\sigma^4 - 5C_5\sigma^6)} \cdot [\sum -ka_k \cdot \sigma^{k+1} \\ &\quad + A \cdot R \cdot C] \sigma^p \cdot d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } p=0 \text{ 时: } I_2 &= AR \left( C_1 + \frac{C_1 C_3}{C} + \frac{C_1^2 C_5}{C^2} + \frac{3C_3 C_5}{C} \right) - a_1 \left( \frac{C_3}{C} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_1 C_5}{C^2} \right) - 3a_3 \frac{C_5}{C} \end{aligned}$$

当  $p=1, 3$  时,  $I_2=0$

$$\text{当 } p=2 \text{ 时, } I_2 = AR \left( C_3 + \frac{C_1 C_5}{C} \right) - \frac{C_5}{C} a_1$$

$$\text{当 } p=4 \text{ 时, } I_2 = ARC_5$$

$$\text{当 } p \geq 5 \text{ 时, } I_2 = 0$$

由边界条件(1.7), (1.8)可以得到关于  $a_k$ ,  $b_k$  联立线性代数方程组。但由于该问题的特殊性, 为求出孔边周向应力, 用以优化孔形, 只要求得应力函数  $\varphi(\zeta)$ , 即只要求得未定系数  $a_k$  即可, 这可由上述的(1.7)边界条件得到的方程组直接求得。因此在本问题中(1.8)的边界条件就不需要了。将由(1.7)得到的结果整理如下:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 \\ A_{31} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_3 \\ B_5 \end{Bmatrix} \cdot A \cdot R \quad (3.6)$$

其中, 令  $p=1$ , 并考虑到

$$\begin{aligned} B &= 2A, \quad A_{11} = 1 - \frac{C_3}{C} - \frac{C_1 C_5}{C^2} \\ A_{13} &= -3C_5/C, \quad A_{31} = -C_5/C \\ B_1 &= -C_1 - \frac{C_1 C_3}{C} - \frac{C_1^2 C_5}{C^2} - \frac{3C_3 C_5}{C} - 2C \\ B_3 &= -C_3 - \frac{C_1 C_5}{C}, \quad B_5 = -C_5 \end{aligned}$$

由(3.6)解得,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_1}{R} = \frac{B_1 - B_3 \cdot A_{13}}{A_{11} - A_{13}^2/3} \cdot A \\ a_3 &= \frac{a_3}{R} = B_3 \cdot A - \frac{a_1 A_{13}}{3} \\ a_5 &= \frac{a_5}{R} = -C_5 \cdot A \end{aligned}$$

由于在孔边上  $\sigma_r=0$ , 所以孔边的周向应力  $\sigma_\theta$  为

$$\sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \left[ \frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right] = 4 \cdot \frac{T_1 + T_2 \cos 2\theta + T_3 \cos 4\theta + T_4 \cos 6\theta}{P_1 + P_2 \cos 2\theta + P_3 \cos 4\theta + P_4 \cos 6\theta} \quad (3.7)$$

其中;

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= AC^2 + \alpha_1 C_1 + 9\alpha_3 C_3 + 25\alpha_5 C_5 \\ T_2 &= -ACC_1 + (3C_3 - C)\alpha_1 + 3(C_1 + 5C_5)\alpha_3 + 15\alpha_5 C_3 \\ T_3 &= -3AC \cdot C_3 + 5\alpha_1 C_5 + 5\alpha_3 C_1 - 3C\alpha_3 \\ T_4 &= -5C\alpha_5 - 5AC \cdot C_5 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= C^2 + C_1^2 + 9C_3^2 + 25C_5^2 \\ P_2 &= 2(-C \cdot C_1 + 3C_1 C_3 + 15C_3 C_5) \\ P_3 &= 10C_1 C_5 - 6CC_3 \\ P_4 &= -10C \cdot C_5 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

很容易验证, 当  $C=1$ ,  $C_1=m$ ,  $C_3=C_5=0$  时, (3.7) 式即退化为椭圆孔的已知结果:

$$\sigma_\theta = \frac{1-m^2-2m+2\cos\theta}{1+m^2-2m\cos 2\theta} p \quad (p \text{ 为无穷远处均匀拉应力})$$

孔洞形状优化结果如表 1 和图 3, 4 所示。

**例题 2** 无穷远处为零应力状态, 孔边受均匀水压力  $p$  作用, 试求最优孔形。

应力函数仍应用(3.5)式, 但  $A=B=0$ , 此时孔边的边界条件(1.7)的右端项为:

$$\begin{aligned} f_1 + i f_2 &= i \int_S (X + iY) dS = -pt \\ &= -pR(C\sigma + C_1/\sigma + C_3/\sigma^3 + C_5/\sigma^5) \end{aligned}$$

式中  $X$ ,  $Y$  分别为边界力的  $x, y$  方向的分量,  $t$  为边界点的复坐标。所以(1.7)成为:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \varphi(\sigma) \sigma^2 d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} \sigma^2 d\sigma$$

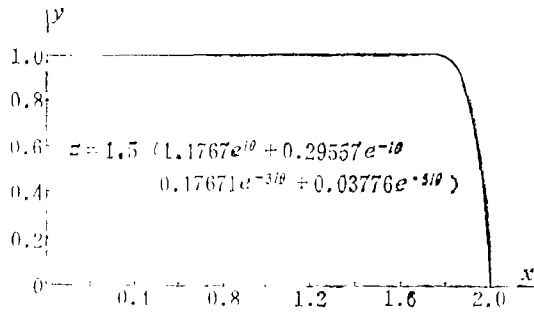


图3 无限远处均匀受拉最优孔形

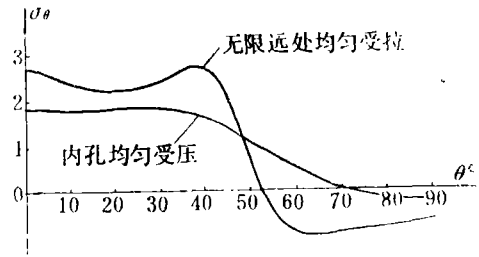


图4 优化孔形孔边应力 $\sigma_\theta$ 的分布曲线

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint \overline{\psi(\sigma)} \sigma^2 d\sigma = - \frac{pR}{2\pi i} \oint (C\sigma + C_1/\sigma + C_3/\sigma^3 + C_5/\sigma^5) \sigma^2 d\sigma$$

上式右端项的积分可由例题1得到，只要令例1结果中的  $A=B=0$  即可。右端项积分  $I_R$  为：

- 当  $p=0$  时,  $I_R = -pRC_1$
- 当  $p=1, 3$  时,  $I_R = 0$
- 当  $p=2$  时,  $I_R = -pRC_3$
- 当  $p=4$  时,  $I_R = -pRC_5$
- 当  $p=5$  时,  $I_R = 0$ ,

采用(3.6)式，但  $B_1 \cdot A = -C_1$ ,  $B_3 \cdot A = -C_3$ ,  $B_5 \cdot A = -C_5$  解得：

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{R} = \frac{-C_1 + C_3 \cdot A_{13}}{A_{11} - A_{13}^2/3}$$

$$\alpha_3 = \frac{a_3}{R} = -C_3 - \frac{C_5}{C} \alpha_1$$

$$\alpha_5 = \frac{a_5}{R} = -C_5$$

因为孔边应力  $\sigma_\rho = -p$ ，令  $p=1$ ，又：

$$\therefore \sigma_\theta + \sigma_\rho = 4\text{Re} \left[ \frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right]$$

$$\therefore \sigma_\theta = 1 + 4\text{Re} \left[ \frac{-\alpha_1/\sigma^2 - 3\alpha_3/\sigma^4 - 5\alpha_5/\sigma^6}{C - C_1/\sigma^2 - 3C_3/\sigma^4 - 5C_5/\sigma^6} \right]$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{T_1 + T_2 \cos 2\theta + T_3 \cos 4\theta + T_4 \cos 6\theta}{P_1 + P_2 \cos 2\theta + P_3 \cos 4\theta + P_4 \cos 6\theta} \quad (3.10)$$

式中的  $T_1, T_2, T_3, T_4, P_1, P_2, P_3, P_4$  仍采用(3.8), (3.9)式，只是  $A=B=0$  而已。

当  $C=1, C_1=m, C_3=C_5=0$  时，(3.10)式退化为为椭圆孔时的已知结果：

$$\sigma_\theta = \frac{1 - 3m^2 + 2m \cos 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta} p \quad (p \text{ 为孔边均匀法向压应力值})$$

孔边形状优化方法仍如前述，结果示于表1和图4，图5上。我们将陆续做出其它更复杂一些问题的孔形优化的结果。



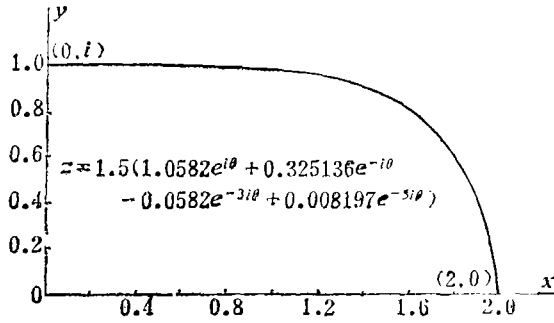


图 5 内孔均匀受压最优孔形

### 四、结 论

本方法是解析解，所以具有很高的精度。第一个例题中优化结果，最大拉应力降低  $(5-2.733)/5=45.3\%$ ，第二个例题最大拉应力降低  $38.3\%$ 。其它的方法如差分法和有限元法不仅工作量大，且孔形曲线沿周向是不可微的，因此应力集中系数的差异颇大，这也是差分法，有限元法分析应力集中问题的最大弱点。在本文的例题中，即使增加保角映射函数的项数，也不会对周向应力产生多大的改善。当然本法的局限性是要求材料相同，如果是平面应力问题，且要求板厚相同。从这方面来看没有有限元法灵活。

表 1

		沿短半径方向无穷远处均匀受拉	内孔受均匀压力
椭圆		$\sigma(0^\circ)=5, \sigma(90^\circ)=-1$	$\sigma(0^\circ)=3, \sigma(90^\circ)=0$
优 化	映 射 函 数 系 数	$C=1.17671$	$C=1.05820$
		$C_1=0.29557$	$C_1=0.325136$
		$C_3=-0.17671$	$C_3=-0.05823$
		$C_5=0.037760$	$C_5=0.0081971$
孔 形	局 部 极 限 值	$\sigma(0^\circ)=2.733$	$\sigma(0^\circ)=1.836$
		$\sigma(36^\circ)=2.733$	$\sigma(24^\circ)=1.836$
		$\sigma(61^\circ)=-0.9848$	
		$\sigma(90^\circ)=-0.7101$	$\sigma(90^\circ)=-0.2911$

### 参 考 文 献

- [1] Мухелишвили Н. И., *Некоторые Основные Задачи Математической Теории Упругости*, Изд. АН СССР (1954). 中译本, 《数学弹性力学的几个基本问题》, 赵惠元译, 科学出版社 (1958).
- [2] 唐立民, 弹性平面上相邻几个圆孔的应力分析, 科学记录, 10 (1959).
- [3] 孙焕纯, 无限长条内有方形孔洞的应力集中问题, 大连工学院工程力学系科研资料 (1965). (未发表)
- [4] Tang Li-min (唐立民) and Sun Hwan-chun (孙焕纯), Three-dimensional elasticity problems solved by complex variable method, *Scientia Sinica*, 12, 11, Nov. (1963).

# Complex Variable Function Method for Hole Shape Optimization in an Elastic Plane

Sun Huan-chun

*(Department of Engineering Mechanics, Dalian Institute of Technology, Dalian)*

Zhang Ju-yong

*(Research Institute of Engineering Mechanics, Hefei Industry University, Hefei)*

Yan Guo-mei      Zhang Ji-zhu

*(Department of Engineering Mechanics, Dalian Institute of Technology, Dalian)*

## Abstract

In this paper, a complex variable function method for solving the hole shape optimization problem in an elastic plane is presented. In this method, the stresses in hole problems are analysed by taking advantage of the efficiency of the complex variable function method. To optimize the hole shape, the coefficients in conformal mapping functions are taken as design variables, and the sensitivity analysis and gradient methods are used to reduce the largest circumferential stress in absolute value and at the same time to make the second largest circumferential stress in absolute value not exceed the largest one (in fact, these two stresses are the stationary values of the circumferential stresses). The coefficients in conformal mapping function are revised by iteration step by step until the largest circumferential stress in absolute value is reduced to the second largest stress. This method guarantees the continuity, differentiability and accuracy of the stress solution along the boundary, and it is evident that this method is better than either the difference method or the finite element method.