

# 非线性系统周期解不动点迭代法

刘铁牛 王 伟

(大连工学院) (郑州工学院)

(李骊推荐, 1985年1月14日收到)

## 摘 要

本文提出一种求解非线性系统周期解的数值方法。首先对非线性自治系统和非自治系统给出不同的点映射定义。其次指出用线性映射逼近原非线性映射, 而线性映射是由非线性映射插值获得的。继而求取线性映射的不动点, 作为原系统不动点的近似解。如不满足精度则作为下次映射的初始点。本文还提出了研究周期解稳定性的相应方法。

## 一、引 言

非线性微分方程没有一般可行的解析解法。即便是种类众多的近似解析方法, 其公式的繁杂, 计算量的庞大也随解的近似阶数的提高, 变得令人望而生畏。近年来随着计算机的普及, 数值方法得到了迅速发展。用数值方法求解一般初值问题, 已不成为困难, 若求解其中的周期解却远非易事。六十年代末, 国外先后建立了“点映射法”和“打靶法”, 我国的一些科技工作者近年来在这方面也做了不少研究工作<sup>[1][2]</sup>, 本文提出的不动点迭代法, 是计算非线性系统周期解的新方法, 它将点映射与推断线性映射不动点相结合, 通过渐近迭代直到线性映射的不动点收敛到周期解上, 并能随即给出周期解稳定性的判断。

这一算法及相应程序简便可靠, 不论自治与非自治系统, 不论稳定或不稳定的周期解, 都可用此方法快速而有效的算出。它能将周期解计算和稳定性判断一举解决, 也可用来计算非周期解。此法已在程序上得到实现<sup>[6],[7]</sup>。大量的计算表明此法用于求解非线性系统的数值解特别是周期解看来是很有效的, 是具有发展希望的。

## 二、不动点迭代法的基本原理与步骤

对  $n$  阶自治的非线性振动系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in R^n; \quad \mathbf{f}: R^n \rightarrow R^n \quad (2.1)$$

和非自治的非线性振动系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in R^n; \quad t \in R; \quad \mathbf{f}: R \times R^n \rightarrow R^n \quad (2.2)$$

设它们均满足解的存在、唯一和连续依赖初值的条件。现研究如果 (2.1) 与 (2.2) 存在周期解, 我们可否给出一种方法, 在一定精度要求下简便而有效地找到这些周期解的数值解答。

先研究自治系统(2.1). 在  $n$  维空间  $R^n$  中的  $n-1$  维超曲面上取一开子集  $D \subset R^{n-1}$ . 我们研究(2.1)的由某初始点  $\mathbf{x}^{(0)} \in D$  开始的解曲线  $\mathbf{x}(t)$  与  $D$  的交点序列  $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k+1)}, \dots$  的变化趋势. 即向量序列  $\{\mathbf{x}^{(k)}\} : \{\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}(t) \cap D, t_0 < t < t_1\}$ , 取时域  $|t - t_0| = \infty$ . 由于解对初值的连续依赖性,  $\mathbf{x}^{(1)}$  与  $\mathbf{x}^{(0)}$ 、 $\mathbf{x}^{(2)}$  与  $\mathbf{x}^{(1)}$ 、 $\dots$ 、 $\mathbf{x}^{(k+1)}$  与  $\mathbf{x}^{(k)}$  等均一一对应, 因此存在函数  $\varphi_1: R^{n-1} \rightarrow R^{n-1}$  使得

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi_1(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

我们称(2.3)为系统(2.1)的点映射.

例如一个二阶系统, 设它的一个奇点在  $(0, 0)$  处, 求此奇点附近的周期解. 可取  $D$  为射线  $x_2 = 0, x_1 > 0$ . 其映射关系  $x_1^{(0)} \rightarrow x_1^{(1)} \rightarrow x_1^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow x_1^{(k)} \rightarrow x_1^{(k+1)} \rightarrow \dots$ , 如图 1 所示.

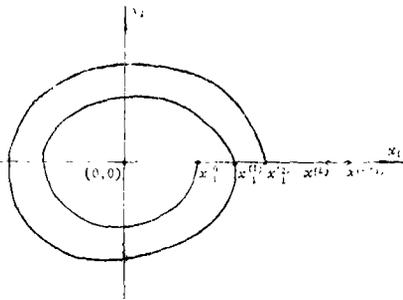


图 1

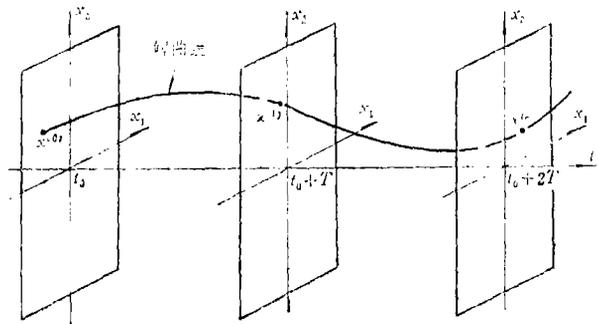


图 2

其次研究  $n$  阶非自治系统(2.2). 试观察从某初始点  $\mathbf{x}^{(0)} \in R^n$  开始的解曲线  $\mathbf{x}(t)$  上的每间隔时间为  $T$  的点序列  $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k+1)}, \dots$ , 即向量序列  $\{\mathbf{x}^{(k)}\} : \{\mathbf{x}^{(k)} | \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}(t_0 + kT), k=0, 1, 2, \dots\}$  同样根据解对初值的连续依赖性将  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  与  $\mathbf{x}^{(k)}$  的对应关系写成函数:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= \varphi_2(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (k=0, 1, 2, \dots) \\ \varphi_2: R^n &\rightarrow R^n \end{aligned} \quad (2.4)$$

我们称(2.4)是系统(2.2)的点映射.

例如一个二阶非自治系统, 它的点映射关系如图 2 所示.

不论对(2.3)或(2.4), 如果得到解向量  $\mathbf{x}^*$ , 能满足

$$\mathbf{x}^* = \varphi_1(\mathbf{x}^*) \quad (2.5)$$

或

$$\mathbf{x}^* = \varphi_2(\mathbf{x}^*) \quad (2.6)$$

则称  $\mathbf{x}^*$  是(2.3)或(2.4)的不动点. 显然通过不动点  $\mathbf{x}^*$  的解  $\mathbf{x}(t)$  是系统(2.1)或(2.2)的周期解. 方程(2.5)和(2.6)除了它们的阶数不同((2.5)为  $n-1$ , (2.6)为  $n$ )之外, 没有任何不同. 因此后面的讨论里将统一使用下式:

$$\mathbf{x}^* = \varphi(\mathbf{x}^*) \quad (2.7)$$

及

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (2.8)$$

由于一般无法得到非线性微分方程的封闭解, 所以我们不可能建立  $\varphi(\mathbf{x})$  的解析表达式. 现在, 我们采取如下的步骤, 取(2.8)的线性近似表达式为

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}^{(k)}) &= \Phi \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \Phi \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \end{aligned} \quad (2.9)$$

亦即

其中待定的方阵  $\Phi$  和矢量  $\mathbf{c}$ , 对自治系统是  $n-1$  阶的, 对非自治系统是  $n$  阶的. 令:

$$m = \begin{cases} n-1 & (\text{自治系统}) \\ n & (\text{非自治系统}) \end{cases}$$

由(2.8)和(2.9)可知存在如下关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \varphi(\mathbf{x}^{(0)}) = \Phi \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{c} = [\Phi, \mathbf{c}] \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \varphi(\mathbf{x}^{(1)}) = \varphi^2(\mathbf{x}^{(0)}) = \Phi \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{c} = [\Phi, \mathbf{c}] \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{x}^{(m+1)} &= \varphi(\mathbf{x}^{(m)}) = \varphi^{m+1}(\mathbf{x}^{(0)}) = \Phi \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c} = [\Phi, \mathbf{c}] \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{(m)} \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

将上  $m+1$  式子合并, 得

$$[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(m+1)}] = [\Phi, \mathbf{c}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)} & \mathbf{x}^{(1)} & \dots & \mathbf{x}^{(m)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

或

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)\tau} & 1 \\ \mathbf{x}^{(1)\tau} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{(m)\tau} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^\tau \\ \mathbf{c}^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)\tau} \\ \mathbf{x}^{(2)\tau} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(m+1)\tau} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

其中  $\tau$  表示转置. 据此得

$$\begin{bmatrix} \Phi^\tau \\ \mathbf{c}^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)\tau} & 1 \\ \mathbf{x}^{(1)\tau} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^{(m)\tau} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)\tau} \\ \mathbf{x}^{(2)\tau} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(m+1)\tau} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

如果选定  $\mathbf{x}^{(0)}$ , 按照系统(2.1)或(2.2)各自的点映射定义, 利用初值问题的数值解法, 足够精确地算出  $m+1$  个映射点:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \varphi^k(\mathbf{x}^{(0)}) \quad (k=1, 2, \dots, m+1) \quad (2.13)$$

则代入(2.12), 就可得到线性映射(2.9)中的  $\Phi$  和  $\mathbf{c}$ .

根据(2.9)式, 其不动点应为

$$\mathbf{x}^{**} = \Phi \mathbf{x}^{**} + \mathbf{c} \quad (2.14)$$

或

$$[E - \Phi] \mathbf{x}^{**} = \mathbf{c}$$

从而

$$\mathbf{x}^{**} = [E - \Phi]^{-1} \mathbf{c} \quad (2.15)$$

由此所得的线性映射(2.9)的不动点  $\mathbf{x}^{**}$  是非线性映射(2.8)的不动点  $\mathbf{x}^*$  的一个近似解答. 现将上述不动点迭代法计算的主要步骤总结如下.

- (1) 选定初始点  $\mathbf{x}^{(0)}$ ;
- (2) 利用数值方法 (例如尼格库塔法) 计算下一个映射点  $\mathbf{x}^{(1)}$ ;
- (3) 每算出一个映射点  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ , 便与前一点  $\mathbf{x}^{(k)}$  做范数检查, 看其是否满足

$$\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \| / \| \mathbf{x}^{(k+1)} \| < 10^{-\alpha} \quad (2.16)$$

其中  $\| \cdot \|$  乃范数,  $\alpha > 0$  乃精度指标. 如果(2.16)式被满足, 则  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  即可足够精确地视为不动点, 过  $\mathbf{x}^{(k)}$  及  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  的解即可视为系统的周期解. 对于非自治系统而言, 此周期解的周期即为前述的两个顺次映射的时间间隔  $T$ , 对于自治系统而言, 即为由  $\mathbf{x}^{(k)}$  到  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  所耗去的时间

间。这时，可中止迭代计算。如果(2.16)式不被满足，则继续计算下一个映射点  $\mathbf{x}^{(k+2)}$ ，直到算出  $\mathbf{x}^{(m+1)}$ ，并转入下一步(4)；

(4) 将  $\mathbf{x}^{(0)}$ ， $\mathbf{x}^{(1)}$ ， $\dots$ ， $\mathbf{x}^{(m+1)}$ 代入(2.12)式并求出线性映射二个近似表示  $\Phi_1$ ，及  $\mathbf{c}_1$ ；

(5) 将  $\Phi_1$ ， $\mathbf{c}_1$ 代入(2.15)求得  $\mathbf{x}_1^{**}$ ，它们的下标 1 表示是取得第一次近似不动点的迭代计算结果。以  $\mathbf{x}_1^{**}$ 做为新的初始点  $\mathbf{x}^{(0)}$ 并转向(2)，以继续迭代计算，算出  $\Phi_2$ 、 $\mathbf{c}_2$ 、 $\mathbf{x}_2^{**}$ ……直到收敛。

下面说明不动点迭代法的几何意义。为此将(2.8)式写成分量的形式：

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \varphi_1(x^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \varphi_2(x^{(k)}) \\ \vdots & \\ x_m^{(k+1)} &= \varphi_m(x^{(k)}) \end{aligned} \right\} \quad (k=0, 1, 2, \dots, m) \quad (2.17)$$

(2.17)中的每一式，都是一个  $m+1$  维空间内的超曲面方程，共计有  $m$  个这样的空间。我们以分量  $x_i^{k+1}$  与  $x^{(k)}$  的全部  $m$  个分量组成的  $m+1$  维空间记作  $R_i^{m+1}$ ，即，

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^{(k+1)} \\ x^{(k)} \end{array} \right\} \in R_i^{m+1}$$

此外由方程  $x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x^{(k)})$ ， $(i=1, 2, \dots, m)$  (2.18)

定义的超曲面记作  $Q_i$ 。由于函数  $\varphi_i$  是未知的， $Q_i$  的性状无从知晓。但是任给初值  $\mathbf{x}^{(0)}$ ，依赖于初值问题的计算我们依次可以得到映射点  $\mathbf{x}^{(1)}$ 、 $\mathbf{x}^{(2)}$ 、 $\dots$ 、 $\mathbf{x}^{(k)}$ 、 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 、 $\dots$ 、 $\mathbf{x}^{(m+1)}$ 。根据它们，我们在  $R_i^{m+1}$  空间里获得了超曲面  $Q_i$  上的  $m+1$  个点：

$$[x_i^{(k+1)}, x^{(k)*}] \quad (k=0, 1, \dots, m; i=1, 2, \dots, m) \quad (2.19)$$

利用此  $m+1$  个点进行线性插值，即构造超平面  $p_i$  来逼近超曲面  $Q_i$ ，并以平面  $p_i$  代替曲面  $Q_i$ 。这一代替相当于以(2.9)式替换(2.8)式。插值部分相当于(2.10)或(2.12)所对应的步骤。为了确定不动点，取  $p_i$  与  $R_i^{m+1}$  空间中的超平面  $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)}$  的  $m-1$  维交线  $H_i$ 。  $H_i$  在空间  $\{x^{(k)}\} \in R^m$  上的投影记为  $H_i^*$ 。因  $i=1, 2, \dots, m$ ，所以共有  $m$  个投影  $H_i^* (i=1, 2, \dots, m)$ 。它们的交记为

$$\mathbf{x}^{**} = \bigcap H_i^* \quad (i=1, 2; \dots, m) \quad (2.20)$$

则所得到的  $\mathbf{x}^{**}$ ，就是对映射线性化之后得到的近似不动点，这一步骤相当于求解线性方程组(2.15)。

为将上述表达得形象直观起见，特以最简单情况  $m=1$  时为例，简示于图 3。其中①是具有稳定不动点  $\mathbf{x}^*$  情况，②是具有不稳定不动点  $\mathbf{x}^*$  情况。从给定的初位置  $x^{(0)}$  出发，连续取得  $m+1=2$  次点映射： $[x^{(0)}, x^{(1)}] \rightarrow$  点 1， $[x^{(1)}, x^{(2)}] \rightarrow$  点 2。1、2 均是未知映射函数  $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$  规定的曲线  $Q$  上的点。现以 1、2 的联线  $P_1$  代替  $Q$ 。  $P_1$  与  $x^{(k+1)} = x^{(k)}$  的交点  $H_1$  在  $x^{(k)}$  轴上的投影  $H_1^*$  便是第一个近似不动点  $x_1^{**}$ 。从  $x_1^{**}$  出发再进行点映射，得到点 3、4 以及直线  $P_2$ 、交点  $H_2$ 、第二个近似不动点  $x_2^{**}$ ……。如此继续下去，便有  $x_j^{**} \rightarrow x^*$ 。由图 3 可以看出，不论不动点  $x^*$  稳定或不稳定， $x_2^{**}$  就已大大靠近  $x^*$  了。此外，从图 3 也可以看出，对  $m=1$  这一简单情况而言，本文所给出的不动点迭代法与求根的牛顿迭代法相类似，牛顿迭代法中的切线此处则用两顺次映射点的连线所代替。因此，对于  $x_j^{**} \rightarrow x^*$ ，可用与证明牛顿迭代法收敛性的类似方法证明之。

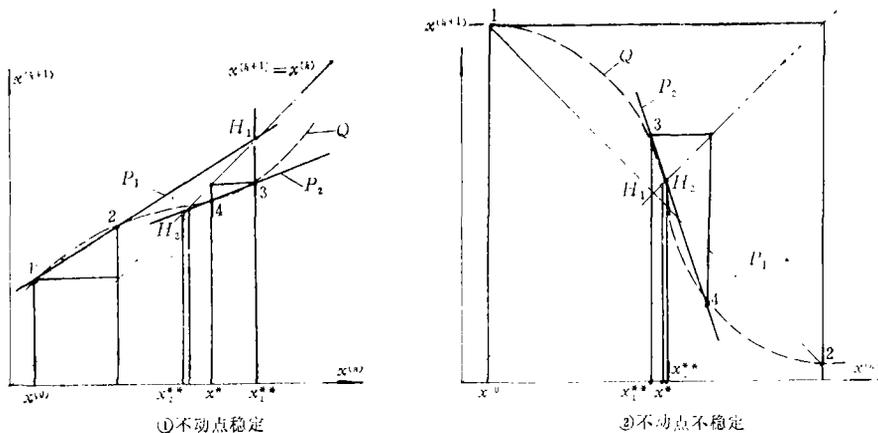


图 3

### 三、周期运动的稳定性

本节研究不动点的稳定性判断。

若经过  $j$  次迭代过程获得不动点近似解向量  $x_j^{**}$ ，且已满足精度要求，那么从数值意义上可以认为它与精确解  $x^*$  只相差一可忽略的高阶小量，因此可将式

$$x_j^{**} = \Phi_j x_j^{**} + c_j \tag{3.1}$$

替换为

$$x^* = \Phi_j x^* + c_j \tag{3.2}$$

而不影响问题的精度。假设周期运动受一小扰动，即在相空间  $R^m$  内相点相对不动点  $x^*$  有某一小量偏差  $y$ ，则其下一个映射可表示为

$$(x^* + y') = \Phi_j(x^* + y) + c_j$$

根据(3.2)可得

$$y' = \Phi_j y \tag{3.3}$$

所以不动点  $x^*$  即周期解的稳定性可由下式判定

$$\begin{cases} \|y'\| < \|y\| & \text{渐近稳定} \\ \|y'\| > \|y\| & \text{不稳定} \end{cases} \tag{3.4}$$

设  $\lambda$  为线性仿射矩阵  $\Phi_j$  的特征值，则(3.4)等价于

$$\max_{(i=1,2,\dots,m)} |\lambda_i| \begin{cases} < 1 & \text{渐近稳定} \\ > 1 & \text{不稳定} \end{cases} \tag{3.5}$$

至于当  $\max |\lambda_i| = 1$  时，由于  $\Phi_j$  乃近似线性表达式，故此时稳定性无法判定。由此可见，应用不动点迭代法获得周期解之后，只要对本次迭代得到的仿射矩阵  $\Phi_j$ ，计算其特征值的最大模，按(3.5)即可得到关于稳定性的结论。

### 四、结束语

本文所给出的不动点迭代法有如下特点。

1. 本方法的思想直观，计算步骤简明，易于编制程序，对计算机要求不高，存量和机

时消耗均少。

2. 由于对自治、非自治系统的点映射作了不同的定义,使两种不同系统求周期解问题,均导致在 $R^m$ 空间内搜索不动点。故此法对两种系统均适用,通用性强。而“点映射法”只能求周期已知(非自治系统)的情况。对于自治系统,“打靶法”是在 $n$ 维参数空间内( $n-1$ 个初始坐标和周期 $T$ )搜索周期解,而此法是在 $m=n-1$ 维空间内搜索不动点,所需计算量更少。

3. 此法既用来计算稳定周期解,也可用来计算不稳定周期解。“点映射”法只能计算稳定的周期解。

4. 对于小阻尼系统,“点映射”法收敛极慢,对无阻尼系统不能用来计算周期解,但用此法却不存在障碍,且收敛较快。

5. “打靶法”使用牛顿迭代,给加快收敛带来了好处,但为此要计算边值向量对参数向量的导数矩阵,这又带来 $n$ 个 $n$ 阶新常微分方程初值问题。为求一个 $n$ 阶系统的周期解,在一次迭代中总共要计算 $n+1$ 个 $n$ 阶常微分方程组的初值问题。而此法只需对原 $n$ 阶常微分方程组,连续做 $m+1$ 次初值问题计算即可。计算工作量比打靶法减少了。

6. 利用此法,判断周期解稳定性是简单容易的。在几乎获得周期解的同时,马上便能给出关于稳定性的结论。

7. 由于此法包含“点映射”过程,因此据此法编制的程序不仅用来计算周期解,而且能计算“点映射”法所能研究的一切问题。例如系统的各态历经、混沌等非周期过程。

综上所述不动点迭代法,避开了“点映射”法的缺点,而兼有“点映射”法、“打靶法”的优点。我们用根据此法编制的程序,对自治系统和非自治系统的各种典型非线性方程,都进行了计算。大量计算实例证明此法是很有效的。例如可抽象为五阶强非线性复杂系统的气动震击机械,利用此法比“点映射法”的收敛速度快了几乎十倍。有关程序结构计算例题,以及为克服计算中的困难采取的对策可参看[6]、[7]。

功 能 方 法	周 期 解					非周期解		稳定性判断 (周期解)
	自治 系统	非自治系统(已知 $T$ )			各态历经	混沌		
		大阻尼	小阻尼	无阻尼				
点映射法	不可以	快	慢	不可以	可以	可以		
打靶法	快	快	快	快	不可以	不可以		
不动点迭代法	快	快	快	快	可以	可以	方便	

### 参 考 文 献

- [1] 凌复华, 非线性振动周期解的数值分析, 应用数学和力学, 4, 4 (1983), 489—506.
- [2] 凌复华等, 非线性振动论文选, 全国第三届非线性振动学术交流会资料, (1983, 10).
- [3] 古屋茂、南云仁一, 《非线性振动论》, (1957).
- [4] 秦元勋, 《微分方程定义下的积分曲线》, (1959).
- [5] 安德罗诺夫 A. A., A. A. 维特, C. E. 依哈金, 《振动理论》, 科学出版社 (1974), 304—314, 497—507.
- [6] 闫国奎, 刘铁牛, 非线性自治系统周期解的数值分析, 大连工学院工程力学系学士论文 (1984).
- [7] 王平、刘铁牛, 非线性自治系统周期解的数值分析, 大连工学院工程力学系学士论文 (1984).

## Stationary Points Iteration Method for Periodic Solution to Nonlinear System

Liu Tie-niu

*(Department of Engineering Mechanics, Engineering  
Institute of Dalian, Dalian)*

Wang Wei

*(Department of Mathematics and Mechanics, Engineering  
Institute of Zhengzhou, Zhengzhou)*

### Abstract

The value method which is used to obtain the periodic solution to nonlinear system is mentioned in this article. Different point reflection is defined in the nonlinear autonomous and nonautonomous system firstly and then that linear reflection obtained from the inserting value of nonlinear reflection is asymptotic to original nonlinear reflection. The stationary points obtained by linear reflection are regarded as the asymptotic solution of the stationary points of original system. If this asymptotic solution of the stationary points is not satisfactorily accurate it can be used as the initial point of the next reflection. In addition, a corresponding method of researching the stability of periodic solution is put forward in this article.