应用数学和力学，第 8 卷第3 期（1987年 3 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

变厚度圆薄板在集中荷载下的非线性问题*

王 晋 莹

（西安公路学院，1986年6月15日收到）

摘 要

本文研究了厚度按线性规律变化的圆薄板在中心集中力作用下的非线性弯曲问题。

一、引 言

变厚度圆薄板的大挠度问题是个非线性问题，由于数学上的极其复杂性，很难用一般的方法来完成解析过程。本文采用变厚度圆薄板大挠度理论的修正迭代法[1][2]，对集中荷载作用于圆板中心，厚度按线性规律变化，在固定夹紧边界条件下求解，得到二次近似解，给出特征曲线，为了比较，将本文的结果退化到特殊情况，即等厚度板的大挠度解，所得结果与文[3]完全一样。

二、轴对称变厚度大挠度理论的基本方程

考虑一个半径为 a 的圆板，圆心受集中力P 的作用（图1）。

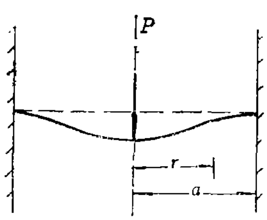

图 1

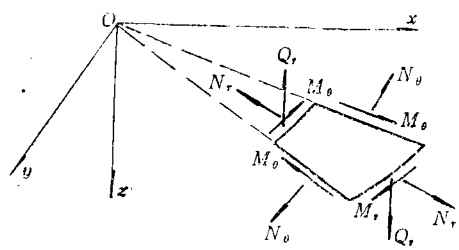

图 2

图 2 表示圆薄板的一个微分元的中面，在图示符号系统下，变厚度圆薄板大挠度理论的基本方程如下：

$$D\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]+\frac{dD}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right)=\sigma_r h\frac{dw}{dr}+\frac{P}{2\pi r} \tag{2.1}$$

$$r\frac{d^2(rh\sigma_r)}{dr^2}+\frac{d(rh\sigma_r)}{dr}-h\sigma_r=\frac{r}{h}\frac{d}{dr}(rh\sigma_r)\frac{dh}{dr}-\mu r\sigma_r\frac{dh}{dr}-\frac{Eh}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 \tag{2.2}$$

* 叶开沅推荐。

其中$w(r)$为圆板中面的挠度，D为抗弯刚度，其值$D=Eh^3/12(1-\mu^2)$，E为弹性模量，μ为泊松比，$h=h(r)$表示距圆心为r处板的厚度。

我们注意到，当h为常数时，(2.1) (2.2)两式即为著名的Karman大挠度方程。

设圆板厚度变化规律为

$$h(r)=h_0\left(1+\varepsilon_1\frac{r}{a}+\varepsilon_2\frac{r^2}{a^2}+\varepsilon_3\frac{r^3}{a^3}+\cdots\right)$$

这里h_0为圆板中心厚度，ε_1、ε_2、ε_3、$\cdots$为变厚度参数，并且$|\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots|<1$。

本文只完成线性厚度圆薄板的大挠度解。取$\varepsilon_1=\varepsilon\neq0,\varepsilon_2=\varepsilon_3=\cdots=0$（图3）。这时$h(r)=h_0(1+\varepsilon r/a)$。

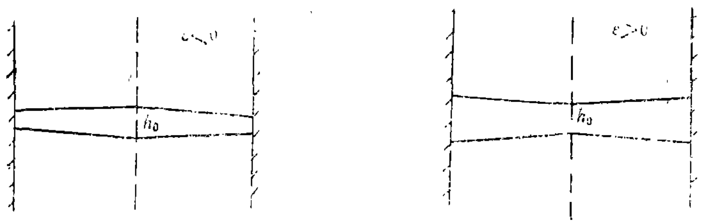

图 3

对于固定夹紧的周边，其边界条件为

$$r=a\text{时},\qquad w=0,\ \frac{dw}{dr}=0,\ \frac{d}{dr}(rN_r)-\mu N_r=0 \tag{2.3a,b,c}$$

$$r=0\text{时},\qquad \frac{dw}{dr},\ N_r\text{有限} \tag{2.4a,b}$$

这里N_r为薄膜力。

为方便求解，我们引入以下无量纲量

$$\rho=\frac{r}{a},\qquad y=\frac{w}{h_0},\qquad S=12(1-\mu^2)h\rho\sigma_r a^2/Eh_0^3$$

$Q=6a^2(1-\mu^2)P/\pi Eh_0^4$，并令$\phi=dy/d\rho$，这时(2.1)～(2.4)变为如下形式

$$(1+\varepsilon\rho)^3L(\rho\phi)=Q+S\phi-3\varepsilon(1+\varepsilon\rho)^2\left(\rho\frac{d\phi}{d\rho}+\mu\phi\right) \tag{2.5}$$

$$L(\rho S)=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho}\left(\rho\frac{dS}{d\rho}-\mu S\right)-\beta(1+\varepsilon\rho)\phi^2 \tag{2.6}$$

$$\rho=1\text{时},\qquad y=0,\ \phi=0,\ \rho\frac{dS}{d\rho}-\mu S=0 \tag{2.7a,b,c}$$

$$\rho=0\text{时},\qquad \phi,\ S\text{有限} \tag{2.8a,b}$$

其中算子$L=\rho\dfrac{d}{d\rho}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}$，$\beta=6(1-\mu^2)$。

我们在边界条件(2.7a,b,c)和(2.8a,b)下求解方程(2.5)、(2.6)。

三、用修正迭代法求解

这里采用的修正迭代程序为

$$L(\rho\phi_1)=Q$$

$$L(\rho S_1)=-\beta(1+\varepsilon\rho)\phi_1^2$$

$$L(\rho\phi_2)=Q+S_1\phi_1-3\varepsilon\rho L(\rho\phi_1)-3\varepsilon^2\rho^2L(\rho\phi_1)$$

$$-\varepsilon^3\rho^3L(\rho\phi_1)-3\varepsilon(1+\varepsilon\rho)^2\left(\rho\frac{d\phi_1}{d\rho}+\mu\phi_1\right)$$

$$L(\rho S_2)=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho}\left(\rho\frac{dS_1}{d\rho}-\mu S_1\right)-\beta(1+\varepsilon\rho)\phi_2^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L(\rho\phi_n)=Q+S_{n-1}\phi_{n-1}-3\varepsilon\rho L(\rho\phi_{n-1})-3\varepsilon^2\rho^2L(\rho\phi_{n-1})$$

$$-\varepsilon^3\rho^3L(\rho\phi_{n-1})-3\varepsilon(1+\varepsilon\rho)^2\left(\rho\frac{d\phi_{n-1}}{d\rho}-\mu\phi_{n-1}\right)$$

$$L(\rho S_n)=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho}\left(\rho\frac{\phi S_{n-1}}{d\rho}-\mu S_{n-1}\right)-\beta(1+\varepsilon\rho)\phi_n^2$$

对ϕ_1有下列边值问题

$$L(\rho\phi_1)=Q \tag{3.1}$$

$$\rho=1\text{时},\quad y_1=0,\quad \frac{dy_1}{d\rho}=\phi_1=0 \tag{3.2a,b}$$

$$\rho=0\text{时},\quad y_1=y_0,\quad \phi_1\text{有限} \tag{3.3a,b}$$

其中y_0为圆板中心无量纲挠度。

解这一组边值问题，得如下结果

$$\phi_1=\frac{1}{2}Q\rho\ln\rho \tag{3.4}$$

$$y_1=\frac{Q}{8}(2\rho^2\ln\rho-\rho^2+1) \tag{3.5}$$

试将无量纲量 $y_1=\frac{w_1}{h_0}$，$\rho=\frac{r}{a}$，$Q=\frac{6a^2(1-\mu^2)\rho}{\pi Eh_0^4}$ 代回(3.5)中得到

$$w_1=\frac{P}{16\pi D}\left(2r^2\ln\frac{r}{a}-r^2+a^2\right)$$

这正是等厚度圆薄板在中心集中力作用下的小挠度解[4]。

令$\rho=0$，$y=y_0$，由(3.5)式得$Q=8y_0$，将它代入(3.4)、(3.5)式中，有

$$\phi_1=4y_0\rho\ln\rho \tag{3.6}$$

$$y_1=y_0(2\rho^2\ln\rho-\rho^2+1) \tag{3.7}$$

对S_1有如下边值问题

$$L(\rho S_1)=-\beta(1+\varepsilon\rho)\phi_1^2 \tag{3.8}$$

$$\rho=1\text{时},\quad \rho\frac{dS_1}{d\rho}-\mu S_1=0 \tag{3.9}$$

$$\rho=0\text{时},\quad S_1\text{有限} \tag{3.10}$$

解该组边值问题，得

$$S_1=-\frac{1}{4}\beta y_0^2(8\rho^3\ln^2\rho-12\rho^3\ln\rho+7\rho^3-f_1\rho)$$

$$-\frac{16}{3375}\beta y_0^2\varepsilon(225\rho^4\ln^2\rho-240\rho^4\ln\rho+98\rho^4-2f_2\rho) \tag{3.11}$$

其中 $f_1=\frac{9-7\mu}{1-\mu}$ $f_2=\frac{76-49\mu}{1-\mu}$

对ϕ_2有如下边值问题

$$L(\rho\phi_2)=Q+S_1\phi_1-3\varepsilon\rho L(\rho\phi_1)-3\varepsilon^2\rho^2L(\rho\phi_1)$$

$$-\varepsilon^3\rho^3L(\rho\phi_1)-3\varepsilon(1+\varepsilon\rho)^2\left(\rho\frac{d\phi_1}{d\rho}+\mu\phi_1\right) \tag{3.12}$$

$\rho=1$时， $y_2=0$，$\phi_2=0$ (3.13a、b)

$\rho=0$时， $y_2=y$，ϕ_2有限 (3.14a、b)

将(3.6)、(3.11)代入(3.12)，并解之得

$$\phi_2=\frac{1}{2}Q\rho\ln\rho-\beta y_0^3\left[\frac{1}{3}\rho^5\ln^3\rho-\frac{11}{12}\rho^5\ln^2\rho+\frac{35}{36}\rho^5\ln\rho\right.$$

$$\left.-\frac{71}{216}(\rho^5-\rho)-\frac{f_1}{32}(4\rho^3\ln\rho-3\rho^3+3\rho)\right]$$

$$-\frac{64}{3375}\beta y_0^3\varepsilon\left[\frac{45}{7}\rho^6\ln^3\rho-\frac{660}{49}\rho^6\ln^2\rho+\frac{18752}{1715}\rho^6\ln\rho\right.$$

$$\left.-\frac{178824}{60025}(\rho^6-\rho)-\frac{1}{4}f_2\left(\rho^3\ln\rho-\frac{3}{4}\rho^3+\frac{3}{4}\rho\right)\right]$$

$$-12y_0\varepsilon\left[\rho^2-\rho+\frac{1+\mu}{3}\left(\rho^2\ln\rho-\frac{4}{3}\rho^2+\frac{4}{3}\rho\right)\right]$$

$$-6y_0\varepsilon^2\left[\rho^3-\rho+\frac{1+\mu}{4}\left(2\rho^3\ln\rho-\frac{3}{2}\rho^3+\frac{3}{2}\rho\right)\right]$$

$$-4y_0\varepsilon^3\left[\frac{1}{3}(\rho^4-\rho)+\frac{1+\mu}{5}\left(\rho^4\ln\rho-\frac{8}{15}\rho^4+\frac{8}{15}\rho\right)\right] \tag{3.15}$$

$$y_2=\frac{Q}{8}(2\rho^2\ln\rho-\rho^2+1)$$

$$-\beta y_0^3\left[\frac{1}{18}\rho^6\ln^3\rho-\frac{13}{72}\rho^6\ln^2\rho+\frac{2}{9}\rho^6\ln\rho-\frac{119}{1296}\rho^6\right.$$

$$\left.+\frac{71}{432}\rho^2-\frac{47}{648}-\frac{f_1}{32}\left(\rho^4\ln\rho-\rho^4+\frac{3}{2}\rho^2-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{64}{3375}\beta y_0^3\varepsilon\left[\frac{45}{49}\rho^7\ln^3\rho-\frac{795}{343}\rho^7\ln^2\rho+\frac{26702}{12005}\rho^7\ln\rho\right.$$

$$-\frac{312334}{420175}\rho^7+\frac{178824}{120050}\rho^2-\frac{12542}{16807}+$$

$$+\frac{f_2}{16}\left(\rho^4\ln\rho-\rho^4+\frac{3}{2}\rho^2-\frac{1}{2}\right)\Big]$$

$$-4y_0\varepsilon\left[\rho^3-\frac{3}{2}\rho^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{9}(1+\mu)(3\rho^3\ln\rho-5\rho^3+6\rho^2-1)\right]$$

$$-\frac{3}{2}y_0\varepsilon^2\left[\rho^4-2\rho^2+1+\frac{1}{4}(\mu+1)\left(2\rho^4\ln\rho-2\rho^4+3\rho^2-1\right)\right]$$

$$-\frac{4}{5}y_0\varepsilon^3\left[\frac{1}{3}\rho^5-\frac{5}{6}\rho^2+\frac{1}{2}+\frac{1+\mu}{5}\left(\rho^5\ln\rho-\frac{11}{15}\rho^5+\frac{4}{3}\rho^2-\frac{3}{5}\right)\right] \quad (3.16)$$

令$\rho=0$，$y_2=y_0$，由(3.16)式即得中心挠度y_0与载荷Q的关系式

$$Q=8y_0+\beta y_0^3\left(-\frac{47}{81}+\frac{f_1}{8}\right)+\frac{512}{3375}\beta y_0^3\varepsilon\left(-\frac{12542}{16807}+\frac{f_2}{32}\right)$$

$$+32y_0\varepsilon\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{9}(1+\mu)\right]+12y_0\varepsilon^2\left[1-\frac{1}{4}(1+\mu)\right]$$

$$+\frac{32}{5}y_0\varepsilon^3\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{25}(1+\mu)\right] \quad (3.17)$$

为了对所得的结果进行分析，取$\mu=0.3$，则(3.17)变为

$$Q=8y_0+5.402y_0^3+1.6486y_0^3\varepsilon+11.378y_0\varepsilon$$
$$+8.1y_0\varepsilon^2+2.2016y_0\varepsilon^3 \quad (3.18)$$

对(3.18)式用不同的ε值代入，可画出对应于不同ε值的Q与y_0的特征曲线(图4)。由图4可见，随着中心挠度的增大，板的刚度也增大，而对于相同的Q值，ε值小的板产生较大的挠度。因而(3.18)式所反映的ε对挠度的影响是合理的，并且ε对挠度的影响是不小的。

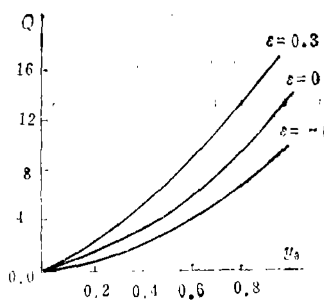

图 4

为了进行比较，我们将(3.17)式退化到特殊情况．令$\varepsilon=0$，我们即得到等厚度圆薄板在中心荷载下的解

$$Q=8y_0+\beta y_0^3\left(-\frac{47}{81}+\frac{f_1}{8}\right) \quad (3.19)$$

将$f_1=\dfrac{9-7\mu}{1-\mu}$，$\beta=6(1-\mu^2)$及无量纲量$Q=6a^2(1-\mu^2)P/\pi Eh_0^4$，$y_0=\dfrac{w_0}{h_0}$代入(3.19)式得$\dfrac{6a^2(1-\mu^2)P}{\pi Eh_0^4}=8\dfrac{w_0}{h_0}+\dfrac{(353-191\mu)(1+\mu)}{108}\left(\dfrac{w_0}{h_0}\right)^3$。

这里w_0为圆板中心处挠度。

此式给出的结果与钱伟长教授的结果完全一样[3]。

四、结　　语

变厚度圆薄板在工程中常常遇到，但工程中对变厚度圆薄板通常按小挠度理论进行设计，所以不能很好地发挥其机械性能，本文结果可提供给工程人员参考。本文采用的变厚度圆薄板的修正迭代法简单易用，精确度高，可用到任意变厚度板问题中，而不必考虑变厚度

参数的多少。

参 考 文 献

[1] 叶开沅、王新志，变厚度圆薄板大挠度理论的修正迭代法，《国际非线性力学会议论文集》，(1985).

[2] 叶开沅、叶志明，对"变厚度圆薄板在均布载荷下大挠度问题"解法的讨论，应用数学和力学，6，3(1985).

[3] 钱伟长、叶开沅，圆薄板大挠度问题，物理学报，10．3 (1954).

[4] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, second edition, McGraw-Hill Book Company (1959).

Nonlinear Problems of Circular Plates with Variable Thickness under Central Concentrated Load

Wang Jin-ying

(*Xi'an Highway Institute, Xi'an*)

Abstract

Nonlinearly bending problems of circular thin plates with linearly varying thickness under central concentrated load are discussed.