应用数学和力学，第8卷第3期（1987年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 二阶线性发展方程初值问题的某些推广*

聂仪一 周红丁

（武汉水利电力学院，1985年4月19日收到）

**摘　要**

本文用压缩半群理论讨论了二阶线性发展方程组的初值问题；还用解析半群讨论了一类变系数的二阶线性发展方程的初值问题，使这一类初值问题的可解性与含 $t$ 的算子的一阶线性发展方程解的理论统一起来，这是数学力学中的一类重要方程。

## 一、前　言

设$V$与$W$是 Hilbert 空间，$V$稠于$W$，$V\hookrightarrow W$是连续的，假设$\mathscr{A}\in\mathscr{L}(V, V')$与$\mathscr{C}\in\mathscr{L}(W, W')$分别是$V$与$W$上的 Riesz 映射，且$D(B)\leqslant V$，$B\in L(D(B), V')$，$f(t)\in C^1(R_0^+, W')$，[1]中详细讨论了二阶线性发展方程

$$\mathscr{C}u''(t)+Bu'(t)+\mathscr{A}u(t)=f(t) \tag{1.1}$$

的初值问题及初边问题，[3]中把（1.1）推广到

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{C}_1u''(t)+\mathscr{B}v'(t)+\mathscr{A}_1u(t)=f_1(t)\\ \mathscr{C}_2v''(t)-\mathscr{B}u'(t)+\mathscr{A}_2v(t)=f_2(t)\end{array}\quad(t\geqslant 0)\right\} \tag{1.2}$$

讨论了初值问题及初边值问题。其中

$$\mathscr{A}_ix(y)=a_i(x,y)\qquad (x,y\in V);\quad \mathscr{C}_ix(y)=c_i(x,y)\qquad (x,y\in W)$$

且$a_i(\cdot,\cdot)$与$c_i(\cdot,\cdot)$分别是$V$与$W$上拟双线性连续对称椭圆型$(i=1,2)$，$[f_1(t), f_2(t)]\in C^1(R_0^+, W'\times W')$。

本文将讨论

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{C}_{11}u''(t)+\mathscr{C}_{12}v''(t)+\mathscr{B}_{11}u'(t)+\mathscr{B}_{12}v'(t)+\mathscr{A}_{11}u(t)+\mathscr{A}_{12}v(t)=f_1(t)\\ \mathscr{C}_{21}u''(t)+\mathscr{C}_{22}v''(t)+\mathscr{B}_{21}u'(t)+\mathscr{B}_{22}v'(t)+\mathscr{A}_{21}u(t)+\mathscr{A}_{22}v(t)=f_2(t)\end{array}\quad(t\geqslant 0)\right\} \tag{1.3}$$

的 Cauchy 问题，并构造出初边值问题的例，从而推广了[3]中有关结果，（1.3）中各函数是取值于适当的 Hilbert 空间中的广义函数，空间和算子是如下规定的：

$V_i$与$W_i$是 Hilbert 空间，$V_i$在$W_i$中稠且$V_i\hookrightarrow W_i$是连续的$(i=1,2)$。假定$\mathscr{A}_{ii}$与$\mathscr{C}_{ii}$分别是$V_i$与$W_i$上的拟双线性连续对称椭圆型$(i=1,2)$，$\mathscr{A}_{12}\in\mathscr{L}(V_2,V_1')$，$\mathscr{A}_{21}\in\mathscr{L}(V_1,V_2')$，$\mathscr{C}_{12}\in\mathscr{L}(W_2, W_1')$，$\mathscr{C}_{21}\in\mathscr{L}(W_1, W_2')$，$D(\mathscr{B}_{11})\leqslant V_1$，$D(\mathscr{B}_{22})\leqslant V_2$，$D(\mathscr{B}_{12})\leqslant V_2$，

* 郭友中推荐。

$D(\mathscr{B}_{21})\leqslant V_1$，且$\mathscr{B}_{11}\in L(D(\mathscr{B}_{11}),\ V_1')$，$\mathscr{B}_{12}\in L(D(\mathscr{B}_{12}),\ V_1')$，$\mathscr{B}_{21}\in L(D(\mathscr{B}_{21}),\ V_2')$，$\mathscr{B}_{22}\in L(D(\mathscr{B}_{22}),\ V_2')$。

本文还要讨论（1.1）中算子$\mathscr{A}$与$B$含参数 $t$ 时的 Cauchy 问题：

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{C}u''(t)+B(t)u'(t)+\mathscr{A}(t)u(t)=f(t)\\ u(0)=u_0,\ \ u'(0)=u_1\end{array}\quad (t\geqslant 0)\right\} \tag{1.4}$$

其中算子 $\mathscr{A}(t)$ 与 $B(t)$ 是如下规定的：

$$\mathscr{A}(t)u(v)\triangleq a(t,u,v),\ \ B(t)u(v)\triangleq b(t,u,v)\qquad (u,v\in V) \tag{1.5}$$

$a(t,u,v)$ 与 $b(t,u,v)$ 分别是$V$上拟双线性连续椭圆型。

我们将把初值问题（1.4）解的存在性与含参数算子的一阶线性发展方程解的理论统一起来。

## 二、方程(1.3)的Cauchy问题

令 $V=V_1\times V_2$，$W=W_1\times W_2$，

$$([x_1,\ x_2],\ [y_1,\ y_2])_V=(x_1,y_1)_{V_1}+(x_2,y_2)_{V_2},\ \ ([x_1,x_2],\ [y_1,y_2]\in V)$$

$$([x_1,x_2],[y_1,y_2]_W=(x_1,y_1)_{W_1}+(x_2,y_2)_{W_2},\ \ ([x_1,x_2],[y_1,y_2]\in W)$$

则$V$与$W$是 Hilbert 空间，且 $V'=V_1'\times V_2'$，$W'=W_1'\times W_2'$，$V\hookrightarrow W$是连续的。

令 $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(V,V')$，$\mathscr{C}\in\mathscr{L}(W,W')$分别定义为

$$\mathscr{A}[x_1,x_2]([y_1,y_2])=\mathscr{A}_{11}x_1(y_1)+\mathscr{A}_{12}x_2(y_1)+\mathscr{A}_{21}x_1(y_2)+\mathscr{A}_{22}x_2(y_2)$$
$$([x_1,x_2],\ [y_1,y_2]\in V) \tag{2.1}$$

$$\mathscr{C}[x_1,\ x_2]([y_1,\ y_2])=\mathscr{C}_{11}x_1(y_1)+\mathscr{C}_{12}x_2(y_1)+\mathscr{C}_{21}x_1(y_2)+\mathscr{C}_{22}x_2(y_2)$$
$$([x_1,x_2],\ [y_1,y_2]\in W) \tag{2.2}$$

记 $D(B)=(D(\mathscr{B}_{11})\times D(\mathscr{B}_{21}))\times(D(\mathscr{B}_{12})\times D(\mathscr{B}_{22}))$，显然 $D(B)\leqslant V$。定义 $B\in L(D(B),V')$为

$$B[x_1,x_2]([y_1,y_2])=\mathscr{B}_{11}x_1(y_1)+\mathscr{B}_{12}x_2(y_1)+\mathscr{B}_{21}x_1(y_2)+\mathscr{B}_{22}x_2(y_2)$$
$$([x_1,x_2]\in D(\mathscr{B}),\ [y_1,y_2]\in V) \tag{2.3}$$

记$W=[u,v]$，$f(t)=[f_1(t),\ f_2(t)]$，由（2.1）～（2.3）我们得到了（1.3）的等价形式

$$\mathscr{C}W''(t)+\mathscr{B}W'(t)+\mathscr{A}W(t)=f(t) \tag{2.4}$$

**定义** 如果 $\mathscr{A}_{12}x(y)=\overline{\mathscr{A}_{21}y(x)}$ $(x\in V_2,\ y\in V_1)$，则称$\mathscr{A}_{12}$与$\mathscr{A}_{21}$是对称的。

**引理 1** 由（2.1）定义的算子$\mathscr{A}$是对称的，当且仅当$\mathscr{A}_{11}$，$\mathscr{A}_{22}$是对称的，且$\mathscr{A}_{12}$与$\mathscr{A}_{21}$也是对称的。

**证** 设$\mathscr{A}_{11}$，$\mathscr{A}_{22}$是对称的且$\mathscr{A}_{12}$与$\mathscr{A}_{21}$是对称的，则

$$\begin{aligned}\mathscr{A}[x_1,x_2]([y_1,y_2])&=\overline{\mathscr{A}_{11}y_1(x_1)}+\overline{\mathscr{A}_{21}y_1(x_2)}+\overline{\mathscr{A}_{12}y_2(x_1)}+\overline{\mathscr{A}_{22}y_2(x_2)}\\&=\overline{\mathscr{A}[y_1,y_2]([x_1,x_2])}\qquad ([x_1,x_2],\ [y_1,y_2]\in V)\end{aligned} \tag{2.5}$$

设$\mathscr{A}$是对称的，令 $x_2=y_2=0$，则由（2.5）得知$\mathscr{A}_{11}$是对称的，同理 $\mathscr{A}_{22}$是对称的，令 $x_1=0$，$y_2=0$，则由（2.5）得知$\mathscr{A}_{12}$与$\mathscr{A}_{21}$是对称的。

**引理 2** 假定

$$\mathrm{Re}\{\mathscr{A}x_1(x_1)+\mathscr{A}_2x_2(x_1)+\mathscr{A}_{21}x_1(x_2)+\mathscr{A}_{22}x_2(x_2)\}$$

$$\geqslant \alpha_1\|x_1\|^2_{V_1}+\alpha_2\|x_2\|^2_{V_2}\qquad(\alpha_1,\ \alpha_2>0,\ [x_1,x_2]\in V)\tag{2.6}$$

或

$$\mathrm{Re}\mathcal{A}_{11}x_1(x_1)\geqslant\beta_1\|x_1\|^2_{V_1}\ \ (\beta_1>0),\ \mathrm{Re}\mathcal{A}_{22}x_2(x_2)\geqslant\beta_2\|x_2\|^2_{V_2}\ \ (\beta_2>0)\tag{2.7}$$

且 $\|\mathcal{A}_{12}\|_{\mathscr{L}(V_2,V_1')}+\|\mathcal{A}_{21}\|_{\mathscr{L}(V_1,V_2')}\leqslant 2\beta=2\min(\beta_1,\beta_2)$，则$\mathcal{A}$是$V$-椭圆的。

**证** 如果（2.6）成立，则

$$\mathrm{Re}\{\mathcal{A}[x_1,x_2]([x_1,x_2])\}\geqslant\min(\alpha_1,\alpha_2)[\|x_1\|^2_{V_1}+\|x_2\|^2_{V_2}]=\alpha\|[x_1,x_2]\|^2_V$$
$$(\alpha>0,\ [x_1,x_2]\in V)$$

如果（2.7）成立，则由

$$\|\mathcal{A}_{12}x_2(x_1)\|\leqslant\|\mathcal{A}_{12}\|_{\mathscr{L}(V_2,V_1')}\|x_1\|_{V_1}\|x_2\|_{V_2},$$
$$\|\mathcal{A}_{21}x_1(x_2)\|\leqslant\|\mathcal{A}_{21}\|_{\mathscr{L}(V_1,V_2')}\|x_1\|_{V_1}\|x_2\|_{V_2}$$

得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{\mathcal{A}[x_1,x_2]([x_1,x_2])\}&\geqslant\beta\|x\|^2_{V_1}+\beta\|x_2\|^2_{V_2}-(\|\mathcal{A}_{12}\|_{\mathscr{L}(V_2,V_1')}\\&\quad+\|\mathcal{A}_{21}\|_{\mathscr{L}(V_1,V_2')})\|x_1\|_{V_1}\|x_2\|_{V_2}\\&\geqslant\Big[\beta-\frac{1}{2}(\|\mathcal{A}_{12}\|_{\mathscr{L}(V_2,V_1')}+\|\mathcal{A}_{21}\|_{\mathscr{L}(V_1,V_2')})\Big](\|x_1\|^2_{V_1}+\|x_2\|^2_{V_2}\\&\geqslant c\|[_1,\ x_2]\|^2_V\quad(c>0,\ [x_1,x_2]\in V)\end{aligned}$$

**定义** 如果$x\in D(\mathscr{B}_{12})$，$y\in D(\mathscr{B}_{21})$有 $\mathrm{Re}(\mathscr{B}_{12}x(y)+\mathscr{B}_{21}y(x))=0$，则称$\mathscr{B}_{12}$与$\mathscr{B}_{21}$是反对称的。

**引理 3** 设$\mathscr{B}_{ii}$是单调的($i=1.2$)且$\mathscr{B}_{12}$与$\mathscr{B}_{21}$是反对称的，则$B$是单调的

**证** 因$\mathrm{Re}\{\mathscr{B}_{11}x_1(x_1)+\mathscr{B}_{12}x_2(x_1)+\mathscr{B}_{21}x_1(x_2)+\mathscr{B}_{22}x_2(x_2)\}$

$$\geqslant\mathrm{Re}(\mathscr{B}_{11}x_1(x_1)+\mathscr{B}_{22}x_2(x_2))\geqslant 0\qquad([x_1,x_2]\in D(B))$$

所以

$$\mathrm{Re}B[x_1,x_2]([x_1,x_2])\geqslant 0\qquad([x_1,x_2]\in D(B))$$

由引理1～3并根据[1]，我们得到了

**定理 1** 设空间$V$与$W$以及算子$\mathcal{A}$，$B$，$\mathscr{C}$是按上面规定的，假定$\mathcal{A}$和$\mathscr{C}$满足引理1的对称条件，满足引理2的椭圆条件。假定$B$满足引理3的单调条件，假定$(\mathcal{A}+B+\mathscr{C}):D(B)\to V'$是满射，则对于每一$[u_0,v_0]\in V$与$[u_1,\ v_1]\in D(B)$且$\mathcal{A}[u_0,v_0]+B[u_1,v_1]\in W'$，每一$[f_1(t),f_2(t)]\in C^1(R^+_0,W')$，方程（2.4）有唯一解$[u(t),v(t)]\in C(R^+_0,V)\cap C^1(R^+,V)\cap C^1(R^+_0,W)\cap C^2(R^+,W)$满足条件$[u(0),\ v(0)]=[u_0,v_0]$，$[u'(0),v'(0)]=[u_1,v_1]$。

## 三、初边值问题的例

设$\Omega$是$R^n$中一有界开域，边界$\partial\Omega$是一个$(n-1)$维的$C^2$-流形，$\Gamma_1$与$\Gamma_2$是$\partial\Omega$上两个具正测度的闭子集，令

$$\left.\begin{aligned}V_1&=\{v\in H^1(\Omega):v(s)=0,\ s\in\Gamma_1,\text{a. e.}\}\\V_2&=\{v\in H^1(\Omega):v(s)=0,\ s\in\Gamma_2,\text{a. e.}\}\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

易知$V_1$与$V_2$是闭集，从而$V_1$与$V_2$是两个 Hilbert 空间。

令 $W_1=W_2=L^2(\Omega)$，$W=W_1\times W_2$。假设

$$C_{12}(x)=\overline{C_{21}(x)},\quad \sum_{i,j=1}^{2} C_{ij}(x)\zeta_i\bar{\zeta}_i \geqslant C(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2) \qquad (x\in\Omega) \tag{3.2}$$

（其中 $C_{ij}(x)\in(\Omega)$）

$$\mathscr{C}_{ij}u(v)=\int_\Omega C_{ij}(x)u(x)\bar{v}(x)dx \quad (i,j=1,2) \tag{3.3}$$

则由（2.2）经（3.3）所定义的$\mathscr{C}$在条件（3.2）之下满足引理1的对称性和引理2的椭圆性。

假定 $R(x)\in L^\infty(\Omega)$。$\mu(x)=(\mu_1(x),\ \mu_2(x),\ \cdots,\ \mu_N(x))$，$x\in\Omega$，$\mu_i(x)\in C^1(\overline{\Omega})$。定义 $\mathscr{B}_{11}\in\mathscr{L}(V_1,W_1)$为

$$\mathscr{B}_{11}u(v)=\int_\Omega\left(R(x)u(x)+\frac{\partial u(x)}{\partial\mu}\right)\bar{v}(x)dx, \tag{3.4}$$

其中 $\dfrac{\partial u(x)}{\partial\mu}=\sum_{j=1}^{N}u_{x_j}(x)\mu_j(x)$。如果

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}R(x)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\mu_i(x)}{\partial x_j}\geqslant 0 \quad (x\in\Omega)\\ &\mu(s)n(s)\geqslant 0,\ (s\in\partial\Omega-\Gamma_1)\end{aligned} \tag{3.5}$$

则 $\mathrm{Re}\mathscr{B}_{11}u(u)=\mathrm{Re}\int_\Omega\left(R(x)u(x)+\dfrac{\partial u(x)}{\partial\mu}\right)\overline{u(x)}dx\geqslant 0$。

假定 $\mathscr{B}_{22}=0$，

$$\mathscr{B}_{12}v(\varphi)=\int_\Omega\sum_{j=1}^{N}b_j(x)v_{x_j}(x)\bar{\varphi}(x)dx+\int_\Omega b_0(x)v(x)\bar{\varphi}(x)dx,$$

$$\mathscr{B}_{21}u(\psi)=\int_\Omega\sum_{j=1}^{N}\bar{b}_j(x)u_{x_j}(x)\bar{\psi}(x)dx$$

其中 $b_0=\sum_{j=1}^{N}\dfrac{\partial}{\partial x_j}b_j$，$b_i(x)\in C^1(\Omega)$，$(j=1,2,\cdots,N,)$ 且

$$\sum_{j=1}^{N}b_j\cos(n,x_j)\,|_{\partial\Omega-\Gamma_1\cup\Gamma_2}=0 \tag{3.6}$$

则 $\quad \mathscr{B}_{12}v(\varphi)+\overline{\mathscr{B}_{21}\varphi(v)}$

$$=\int_\Omega\sum_{j=1}^{N}\left(b_jv_{x_j}\bar{\varphi}+\frac{\partial b_j}{\partial x_j}v\bar{\varphi}+b_jv\bar{\varphi}_{x_j}\right)dx=\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{N}b_jv\bar{\varphi}\cos(n,x_j)ds$$

由于 $v\in V_2$，$\varphi\in V_1$ 且注意到（3.6），于是 $\mathscr{B}_{12}$与$\mathscr{B}_{21}$是反对称的，易知 $B\in\mathscr{L}(V,W)$，且$B$是单调的。

令 $a_{ij}^k\in C^1(\overline{\Omega})$ $(k=1,2,3,4;\ i,j=1,2\cdots,N)$。设矩阵 $(a_{ij}^1),(a_{ij}^4)$ 是 Hermite 共轭

对称矩阵，$(a^2_{ij})$与$(a^3_{ij})$互为共轭对称矩阵$(\overline{a^2_{ij}}=a^3_{ji})$。

$$\mathscr{A}_{11}u(\varphi)\triangleq\int_\Omega\sum_{i,j=1}^N a^1_{ij}(x)u_{x_j}\bar{\varphi}_{x_i}dx,\quad \mathscr{A}_{12}v(\varphi)\triangleq\int_\Omega\sum_{i,j=1}^N a^2_{ij}(x)v_{x_j}\bar{\varphi}_{x_i}dx$$

$$\mathscr{A}_{21}u(\psi)\triangleq\int_\Omega\sum_{i,j=1}^N a^3_{ij}(x)u_{x_j}\bar{\psi}_{x_i}dx,\quad \mathscr{A}_{22}v(\psi)\triangleq\int_\Omega\sum_{i,j=1}^N a^4_{ij}(x)v_{x_j}\bar{\psi}_{x_i}dx$$

则按（2.1）定义的算子$\mathscr{A}$满足引理1的条件，因而是对称的，令

$$(t_{kl})=\begin{pmatrix}(a^1_{ij}) & (a^2_{ij})\\ (a^3_{ij}) & (a^4_{ij})\end{pmatrix}$$

假定
$$\sum_{k,l=1}^{2N}t_{kl}\zeta_l\bar{\zeta}_k\geqslant\alpha\sum_{k=1}^{2N}|\zeta_k|^2\quad(\alpha>0)$$

则$\mathscr{A}$满足引理2的条件，因而是$V$椭圆的。

设$F_1(x,t)$，$F_2(x,t)\in L^2(\Omega\times R_0^+)$，且$\frac{\partial}{\partial t}F_1(x,t)$，$\frac{\partial}{\partial t}F_2(x,t)\in L^2(\Omega\times R_0^+)$；则$f_1(t)=F(\cdot,t)$，$f_2(t)=F_2(\cdot,t)\in C^1(R_0^+,\ L^2(\Omega))$。因此$[f_1(t),\ f_2(t)]\in C^1(R_0^+,\ W)$。

对于$[u_0,\ v_0]\in V\cap(H^2(\Omega)\times H^2(\Omega))$，$[u_1,\ v_1]\in V$，因为$B\in\mathscr{L}(V,W)$，要使得$\mathscr{A}[u_0,v_0]+B[u_1,\ v_1]\in W$，只要选$[u_0,v_0]\in V\times(H^2(\Omega)\times H^2(\Omega))$，使得$\mathscr{A}[u_0,v_0]\in W$。由$\mathscr{A}$的定义，我们假定

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^N(a^1_{ij}(x)u_{0x_j}+a^2_{ij}(x)v_{0x_j})\cos(n,x_i)|_{\partial\Omega-\Gamma_1}=0\\ &\sum_{i,j=1}^N(a^3_{ij}(x)u_{0x_j}+a^4_{ij}(x)v_{0x_j})\cos(n,x_i)|_{\partial\Omega-\Gamma_2}=0\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

则

$$\mathscr{A}_{11}u_0(\varphi)+\mathscr{A}_{12}v_0(\varphi)=\int_\Omega-\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial}{\partial x_i}(a^1_{ij}(x)u_{0x_j}+a^2_{ij}(x)v_{0x_j})\bar{\varphi}dx$$

$$+\int_{\partial\Omega}\sum_{i,j=1}^N(a^1_{ij}u_{0x_j}+a^2_{ij}v_{0x_j})\bar{\varphi}\cos(n,x_i)ds$$

由于$\varphi\in V_1$和（3.7）第一个式子，上面第二个积分为0，而第一个积分是$L^2(\Omega)$上的线性有界泛函，同理可证$\mathscr{A}_{21}u_0(\psi)+\mathscr{A}_{22}v_0(\psi)$是$L^2(\Omega)$上的线性有界泛函，因此，$\mathscr{A}[u_0,v_0]\in W$。

总结上面所述并根据定理1，则下面的初边值问题存在唯一解$[u(x,t),v(x,t)]$，

$$\left\{\begin{aligned}&C_{11}(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+C_{12}(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t)+R(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\\ &+\sum_{j=1}^N b_i(x)\frac{\partial}{\partial t}v_{x_j}(x,t)+b_0(x)\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)-\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^1_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,t)\\ &+a^2_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}v(x,t)\Big)=F_1(x,t)\end{aligned}\right.\tag{3.8}$$

$$\begin{cases} C_{21}(x)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+C_{22}(x)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t)+\sum\limits_{i=1}^{N}\bar{b}_j(x)u_{x_j}(x,t)-\sum\limits_{i,j=1}^{N}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^3(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\cdot u(x,t) \\ \qquad +a_{ij}^4(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}v(x,t)\Big)=F_2(x,t),\ (x,t)\in\Omega\times(0,T),\ a.e. \qquad (3.9) \\ \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i,j=1}^{N}(a_{ij}^1(x)u_{x_j}+a_{ij}^2(x)v_{x_j})\cos(n,x_i)|_{\partial\Omega-\Gamma_1}=0 \\ \sum\limits_{i,j=1}^{N}(a_{ij}^3(x)u_{x_j}+a_{ij}^4(x)v_{x_j})\cos(n,x_i)|_{\partial\Omega-\Gamma_2}=0 \end{array} \quad (t\geqslant 0)\right\} \qquad (3.10) \\ \left.\begin{array}{l} u(x,t)=0,\ x\in\Gamma_1,\ v(x,t)=0,\ x\in\Gamma_2,\ t\geqslant 0 \\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x),\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)=v_1(x) \end{array}\right\} \qquad (3.11) \end{cases}$$

这里（3.8）、（3.9）和（3.10）是在变分意义下成立的，但（3.8），（3.9）中的 $u_{tt}$ 和 $v_{tt}\in L^2(\Omega)$，$u_t$ 和 $v_t$ 分别 $\in V_1$ 和 $V_2$。又若能保证这种边值问题的正则性，则（3.10）就分别在 $L^2(\partial\Omega-\Gamma_1)$ 和 $L^2(\partial\Omega-\Gamma_2)$ 中成立的。

## 四、方程(1.4)的Cauchy问题

设

$$\left.\begin{array}{l} |a(t,u,v)|\leqslant k_1\|u\|_V\|v\|_V,\ (k_1>0,\ u,\ v\in V) \\ \mathrm{Re}\,a(t,u,u)\geqslant c_1\|u\|_V^2,\ (u\in V,\ c_1>0) \end{array}\right\} \qquad (4.1)$$

$$\left.\begin{array}{l} |b(t,u,v)|\leqslant k_2\|u\|_V\|v\|_V,\ (k_2>0,\ u,\ v\in V) \\ \mathrm{Re}\,b(t,u,u)\geqslant c_2\|u\|_V^2,\ (c_2>0,\ u\in V) \end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

令 $V_m=V\times W$，在 $V_m$ 上定义内积

$$([x_1,\ x_2],\ [y_1,\ y_2])_{V_m}=(x_1,\ y_1)_V+(x_2,\ y_2)_W \qquad ([x_1,\ x_2],\ [y_1,\ y_2]\in V_m)$$

则 $V_m$ 是一个 Hilbert 空间，且 $V_m'=V'\times W'$。

以 $C$ 与 $\mathscr{C}$ 分别表示 $V$ 到 $V'$ 与 $W$ 到 $W'$ 的 Riesz 映射，以 $\mu$ 表示 $V_m$ 到 $V_m'$ 的 Riesz 映射，则

$$\mu[x_1,\ x_2]([y_1,\ y_2])=([x_1,\ x_2],\ [y_1,\ y_2])_{V_m},\ [x_1,\ x_2],\ [y_1,\ y_2]\in V_m$$

易知，由

$$\begin{bmatrix} C & \\ & \mathscr{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}'+\begin{bmatrix} & -C \\ \mathscr{A}(t) & B(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}\quad (t\geqslant 0) \qquad (4.3)$$

当 $v=u'$ 时即得到了（1.4）。经过一个初等变换，(4.3) 可写成等价形式

$$\begin{bmatrix} C & \\ & \mathscr{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}'+\begin{bmatrix} \lambda C & -C \\ \mathscr{A}(t) & B(t)+\lambda\mathscr{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ f(t)e^{-\lambda t} \end{bmatrix}\quad (t\geqslant 0) \qquad (4.4)$$

令 $W(t)=[u(t),\ v(t)]$，记（4.4）左边第二项中的算子为 $L(t)$，记（4.4）右边为 $F(t)$。令

$$A(t)=\mu^{-1}L(t),\ g(t)=\mu^{-1}F(t),$$

$$D(A(t))=D(L(t))\triangleq\{[x_1,x_2]\in V\times V:\mathscr{A}(t)x_1+B(t)x_2\in W'\}$$

则与（4.4）等价的是一个标准型的一阶线性发展方程

$$W'(t)+A(t)W(t)=g(t) \qquad (t\geqslant 0) \tag{4.5}$$

我们假定$D(A(t))$是一个不变域，下面我们用[2]中的结果来证明（4.5）的Cauchy 问题存在唯一解，从而得出（1.4）的 Cauchy 问题有唯一解。

**定义** 如果 $D(A)$稠于 Hilbert 空间 $H$，$A\in L(D(A),\ H)$，对于某个 $\lambda>0$，$(\lambda+A)$：$D(A)\to H$是满射，且 $\mathrm{Re}(Ax,x)_H\geqslant 0$，$x\in D(A)$。则称$A$是极大增生算子。

**引理 4** 设$A\in L(D(A),\ H)$是极大增生算子，Hilbert 空间$V$稠于$H$，$V\hookrightarrow H$是连续的，$a(u,v)$是$V$上拟双线性连继$V$-椭圆型，

$$a(u,v)=(Au,v)_H,\quad u\in D(A),\quad \forall v\in V$$

则由 $a(\cdot,\cdot)$导出的解析半群生成元就是$-A$。

**证** 由 $a(\cdot,\cdot)$的假设，对每一$f\in H'$，方程存在唯一的 $u\in V$，使

$$a(u,v)=f(v) \qquad (\forall v\in V)$$

于是导出了一个线性算子$T$和$V$的一个子空间$D(T)$

$$a(u,v)=(Tu,v)_H \qquad (u\in D(T),\quad \forall v\in V) \tag{4.6}$$

$$D(T)=\{u\in V: a(u,v)=f(v) \qquad (f\in H',\quad \forall v\in V\})$$

根据[1]，存在 $\theta_0$，$0<\theta_0<\pi/4$，使由（4.6）定义的算子$-T$所生成的压缩半群可以解析延拓到锥形域 $S(\theta_0)$，从而$-T$是解析半群的生成元。

因为

$$a(u,v)=(Au,v)_H \qquad (u\in D(A),\quad \forall v\in V)$$

因此，$u\in D(T)$且$Au=Tu$，这说明$T$是$A$的延拓。但$A$是极大增生算子，$A$是闭算子。所以$A=T$，从而$-A$是解析半群生成元。

我们定义 $E([\ \ ],[\ \ ])$为

$$E([u,v],\ [\varphi,\ \psi])=\lambda(u,\varphi)_V-(v,\varphi)_V+a(t,u,\psi)+b(t,v,\psi)+\lambda(v,\psi)_W$$

$$([u,v],\ [\varphi,\psi]\in V\times V) \tag{4.7}$$

显然，$V\times V$稠于$V_m$，且$V\times V\hookrightarrow V_m$是连继的。

**引理 5** $E[u,v]$，$[\varphi,\psi]$）是 $V\times V$ 上拟双线性连续椭圆型，且

$$(A(t)[u,v],\ [\varphi,\psi])_{V_m}=E([u,v],\ [\varphi,\psi]) \tag{4.8}$$

$$([u,v]\in D(A(t)),\quad \forall[\varphi,\psi]\in V\times V)$$

**证** 由（4.1），（4.2）与（4.7）易知$E$是拟双线性的，且

$$|E(u,v],\ [\varphi,\psi])|\leqslant M\|[u,v]\|_{V\times V}\|[\varphi,\psi]\|_{V\times V},\quad M>0 \tag{4.8$'$}$$

当$[\varphi,\psi]=[u,v]$时，

$$\mathrm{Re}E([u,v],\ [u,v])=\lambda([u,v],[u,v])_{V_m}+b(t,v,v)+\mathrm{Re}(a(t,u,v)-(v,u)_V)$$

因为

$$|\mathrm{Re}(a(t,u,v)-(v,u)_V)|\leqslant|a(t,u,v)-(v,u)_V|$$
$$\leqslant\beta\|u\|\|v\| \qquad (\beta>0)$$

于是

$$\mathrm{Re}E([u,v],\ [u,v])$$

$$\geqslant\lambda\|u\|^2+c_2\|v\|^2-\beta\|u\|\|v\|\geqslant\lambda\|u\|^2+c_2\|v\|^2-\frac{\beta\eta}{2}\|u\|^2-\frac{\beta}{2\eta}\|v\|^2 \tag{4.9}$$

我们选 $\eta$ 足够大，使$c_2>\beta/2\eta$，再选$\lambda$足够大，使得$\lambda>\beta\eta/2$，这样一来，（4.9）就给出了

$E$的一致椭圆性：

$$|E([u,v],\ [u,v])|\geqslant\alpha\|[u,v]\|^2_{V\times V}\qquad(\forall[u,v]\in V\times V,\ \alpha>0)\qquad(4.10)$$

由于

$$\begin{aligned}(A(t)[u,v],[\varphi,\psi])_{Vm}&=(\mu^{-1}L(t)[u,v],\ [\varphi,\psi])_{Vm}=L(t)[u,v]([\varphi,\psi])\\&=\lambda(u,\varphi)_V-(v,\varphi)_V+\mathscr{A}(t)u(\psi)+B(t)v(\psi)+\lambda(v,\psi)_W\\&\qquad([u,v]\in D(A(t)),\ \forall[\varphi,\psi]\in V_m)\qquad(4.11)\end{aligned}$$

因此，（4.8）是成立的。

**引理 6** $A(t)$是极大增生算子。

**证** 为证对于每一$[f_1,f_2]\in V_m$，存在$[x_1,\ x_2]\in D(A(t))$使得$A(t)[x_1,x_2]=[f_4,f_2]$，只须证明对每一$[f_1,f_2]\in V_m$，存在$[x_1,x_2]\in D(A(t))$使得

$$\left.\begin{aligned}&\lambda cx_4-cx_2=cf_1,\\&\mathscr{A}(t)x_1+B(t)x_2+\lambda\mathscr{C}x_2=\mathscr{C}f_2\end{aligned}\right\}\qquad(4.12)$$

由于$(\lambda^{-1}\mathscr{A}(t)+B(t)+\lambda\mathscr{C})$是$V$上拟双线性连续椭圆算子，因此对于$\mathscr{C}f_2-\lambda^{-1}\mathscr{A}(t)f_1\in V'$，

$\exists x_2\in V$使得

$$\left(\frac{1}{\lambda}\mathscr{A}(t)+B(t)+\lambda\mathscr{C}\right)x_2=\mathscr{C}f_2-\frac{1}{\lambda}\mathscr{A}(t)f_1$$

于是得到$x_1=x_2/\lambda+f_1/\lambda\in V$。易知$[x_1,\ x_2]$满足（4.12），且$[x_1,\ x_2]\in D(t))$，从而证明了$A(t):D(A(t))\to V_m$是满射。

由（4.10）与（4.11）易知

$$\|A(t)[u,v]\|\geqslant\alpha\|[u,v]\|\qquad([u,v]\in D(A(t)))。$$

其中$\alpha>0$是（4.9）右边所确定的强制性常数，从而$A(t)$存在逆算子$A^{-1}(t)$且$\|A^{-1}(t)\|\leqslant 1/\alpha$。

取$\eta>0$，$\eta>\alpha$，令$P[u,v]=-\eta A^{-1}(t)[u,v]+A^{-1}(t)[f_1,f_2]$，$[u,v]\in D(A(t))$，$[f_1,f_2]\in V_m$，则$P$是压缩映射，因此有不动点$[u,v]\in D(A(t))$使得 $[u,v]=-\eta A^{-1}(t)[u,v]+A^{-1}(t)[f_1,f_2]$，即我们证明了：存在$\eta>0$，$(\eta+A(t)):D(A(t))\to V_m$是满射。

由（4.10）与（4.11）易知$A(t)$是$D(A(t))$上的增生算子。总之，引理 6 的结论为真。

**引理 7** 存在锥形域$S(\theta)$，使下面不等式成立

$$\|(\eta+A(t))^{-1}\|\leqslant\frac{c}{1+|\eta|},\quad\eta\in S(\theta),\ \|\eta\|\geqslant 1\qquad(4.13)$$

**证** 因$E([u,v],\ [\varphi,\psi])$是$V\times V$上拟双线性连续椭圆型，且（4.8）′中的常数$M$与（4.10）中的常数$\alpha$均与$t$无关，（4.8）式成立，因此根据［1］存在$\theta_0$，$0<\theta_0<\frac{\pi}{4}$，锥形域$S(\theta)$，$0<\theta<\theta_0$，使得

$$\|\eta(\eta+A(t))^{-1}\|\leqslant M(\theta)\qquad(\eta\in S(\theta))\qquad(4.14)$$

其中$M(\theta)$是与$t$无关的常数，由（4.14）即得（4.13），其中$c$是不依赖于$t$的常数。

**引理 8** 令

$$L_0=\begin{bmatrix}\lambda c & -c\\ \mathscr{A}(t) & B(t)\end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix}\lambda c & -c\\ \mathscr{A}(t) & B(t)+\lambda\mathscr{C}\end{bmatrix},$$

则$L_0$与$L$均是$D(A(t))$上的极大增生算子，且

$$\|L_0[u,v]\|_{V'_m}\geqslant\alpha\|[u,v]\|_{V\times V},\quad \|L[u,v]\|_{V'_m}\geqslant\alpha\|[u,v]\|_{V\times V}\quad [u,v]\in D(A(t)) \tag{4.15}$$

证明类似于引理 6，这里略去。

**引理 9** 设算子$B^{-1}(t)\cdot\mathscr{A}(t)$与 $t$ 无关，$B^{-1}(t)W'\subset V$是与 $t$ 无关的子空间，算子$B(s)\cdot B^{-1}(t)$是$V'$到自身的线性连续满射，当限制在$W'$时关于 $s$ 满足 Lipschitz 条件

$$\|B(s)B^{-1}(t)-B(r)B^{-1}(t)\|_{\mathscr{L}(W')}\leqslant c|s-r| \tag{4.16}$$

则成立不等式

$$\|A(s)A^{-1}(t)-A(r)A^{-1}(t)\|_{\mathscr{L}(V_m)}\leqslant\tilde{c}|s-r|\qquad(\tilde{c}>0) \tag{4.17}$$

**证** 因为

$$\begin{aligned}\|(A(s)-A(r))[x_1,x_2]\|_{V_m}&=\|(L(s)-L(r))[x_1,x_2]\|_{V'_m}\\&=\|\mathscr{A}(s)x_1+B(s)x_2-\mathscr{A}(r)x_1-B(r)x_2\|_{W'}\\&=\|B(s)(x_2+B^{-1}(s)\mathscr{A}(s)x_1)-B(r)(x_2+B^{-1}(r)\mathscr{A}(r)x_1)\|_{W'}\end{aligned} \tag{4.18}$$

令 $y=x_2+B^{-1}(t)\mathscr{A}(t)x_1$，由假设条件则 $y\in B^{-1}(t)W'$是一个固定的元（对于给定的$[x_1,x_2]\in D(A(t))$而言）

根据条件（4.16），我们有

$$\|B(s)y-B(r)y\|_{W'}\leqslant c\|B(t)y\|_{W}|s-r|$$

即

$$\|\mathscr{A}(s)x_1+B(s)x_2-\mathscr{A}(r)x_1-B(r)x_2\|_{W'}\leqslant c\|\mathscr{A}(t)x_1+B(t)x_2\|_{W'}\ |s-r| \tag{4.19}$$

根据引理 8，我们可以用$\|L[_1,x_2]\|_{V'_m}$做$D(A(t))$的范数并成一完备空间。这是由于$L$是$D(A(t))$上的闭算子且（4.15）式表明，按$\|L[\quad]\|_{V'_m}$收敛必按$\|[\quad]\|_{V\times V}$收敛，而且极限元$\in D(A(t))$。同理，我们可以用$\|L_0[\quad]\|_{V'_m}$做$D(A(t))$的范数使之成为完备空间。从而

$$c_1\|L_0[\quad]\|_{V'_m}\leqslant\|L[\quad]\|_{V'_m}\leqslant c_2\|L_0[\quad]\|_{V'_m}\quad(c_1,c_2>0) \tag{4.20}$$

注意到（4.20），于是得到了

$$\|\mathscr{A}(t)x_1+B(t)x_2\|_{W'}\leqslant\|L_0[x_1,x_2]\|_{V'_m}\leqslant\frac{1}{c_1}\|L[x_1,x_2]\|_{V'_m},\ [x_1,x_2]\in D(A(t)) \tag{4.21}$$

以（4.21），（4.10）代入（4.15）而得（4.17）。

总结以上，我们得

**定理 2** 设 $V$与$W$均为 Hilbert 空间，$V$ 稠于$W$且$V\hookrightarrow W$是连续的，$\mathscr{A}(t),B(t)\in\mathscr{L}(V,V')$根据（4.1），（4.2）按（1.5）确定，假定算子$B(t)$满足（4.16），$B^{-1}(t)\mathscr{A}(t)$与$B^{-1}(t)W'$均与 $t$ 无关，则对于每一$[u_0,u_1]\in V\times V$，$\mathscr{A}(0)u_0+B(0)u_1\in W'$，$f(\cdot)\in C^1(R_0^+,W')$，存在唯一的函数 $u(\cdot)$，使得

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{C}u''(t)+B(t)u'(t)+\mathscr{A}(t)u(t)=f(t)\\&u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1\end{aligned}\quad(t\geqslant0)\right\} \tag{4.22}$$

**证** 由引理 6，$A(t)$是$D(A(t))$上的极大增生算子，根据引理 5 与引理 4，$-A(t)$是解析半群生成元，由引理 7 有不等式（4.13）成立，由引理 9 有不等式（4.17）成立，因此，根据[ 2 ]定理为真。

**推论1** 在定理 2 的假定下，如果$B(t)=\varepsilon\mathscr{A}(t)$，$\varepsilon$是正实数，则对于$[u_0,u_1]\in V\times V$，

$\mathscr{A}(t)(u_0+\varepsilon u_1)\in W'$，每一$f(\cdot)\in C^1(R_0^+,\ W')$，有唯一函数$u(\cdot)$使得

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{C}u''(t)+\varepsilon\mathscr{A}(t)u'(t)+\mathscr{A}(t)u(t)=f(t)\\&u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1\end{aligned}\quad t\geqslant 0\ \right\}\tag{4.23}$$

这里$B^{-1}(t)\mathscr{A}(t)$显然与 $t$ 无关。

**推论 2**　在定理 2 的假定下，如果 $\mathscr{A}(t)=0$，则对于$u_0\in V$，$u_1\in B^{-1}(t)W'$每一$f(\cdot)\in C^1(R_0^+,\ W')$，有唯一函数$u(\cdot)$使得

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{C}u''(t)+B(t)u'(t)=f(t)\\&u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1\end{aligned}\quad t\geqslant 0\ \right\}\tag{4.24}$$

且显然 $B^{-1}(t)\mathscr{A}(t)$与 $t$ 无关。

## 五、关于边值问题(4.23)的讨论

在推论 1 中，自然地可以提出这样的问题：边值问题（4.23）中的$\varepsilon$可以趋近于 0 吗？下面我们来讨论这个问题。

如果对于每个 $s$，$A(t)A^{-1}(s)$关于 $t$ 是二次可微的，且$f'(t)$关于 $t$ 是 Hölder 连续的，根据[2]则方程（4.5）的解从而边值问题（4.23）的解有高阶导数。

我们在（4.23）第一式两边对 $t$ 求导，而后在$u''(t)$取值，便得到

$$\begin{aligned}&(u'''(t),u''(t))_W+\varepsilon a(t,u''(t),u''(t))+a(t,u'(t),u''(t))\\&\quad+\varepsilon a'(t,u'(t),u''(t))+a'(t,u(t),u''(t))=f'(t)(u''(t))\end{aligned}\tag{5.1}$$

因为

$$2\mathrm{Re}\,(u'''(t),u''(t))_W=\frac{d}{dt}\|u''(t)\|_W^2,\quad 2\mathrm{Re}a(t,u''(t),u''(t))\geqslant 0$$

$$2\mathrm{Re}a\,(t,u'(t),u''(t))=\frac{d}{dt}a(t,u'(t),u'(t))-a'(t,u'(t),u'(t))$$

$$2\mathrm{Re}a'(t,u'(t),u''(t))=\frac{d}{dt}a'(t,u'(t),u'(t))-a''(t,u'(t),u'(t))$$

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}a'(t,u(t),u''(t))=&2\,\mathrm{Re}\frac{d}{dt}a'(t,u(t),u'(t))\\&-2\mathrm{Re}a''(t,u(t),u'(t))-2\mathrm{Re}a'(t,u'(t),u'(t))\end{aligned}$$

于是，根据（5.1）有

$$\begin{aligned}\Big[&\frac{d}{dt}\|u''(t)\|_W^2+\varepsilon 2\mathrm{Re}a(t,u''(t),\,u''(t))+\frac{d}{dt}a(t,u'(t),u'(t))\\&-a'(t,\,u'(t),u'(t))+\varepsilon\frac{d}{dt}a'(t,u'(t),u'(t))-\varepsilon a''(t,u'(t),u'(t))\\&+2\,\mathrm{Re}\frac{d}{dt}a'(t,u(t),u'(t))-2\mathrm{Re}a''(t,u(t),u'(t))\\&-2\mathrm{Re}a'(t,u'(t),u'(t))\Big]=2\mathrm{Re}f'(t)(u''(t))\end{aligned}\tag{5.2}$$

对（5.2）两边从 0 到 $t$ 积分，得

$$
\begin{aligned}
&[\|u''(t)\|_W^2-\|u''(0)\|_W^2+a(t,u'(t),u'(t))-a(0,u'(0),u'(0))\\
&\quad+\varepsilon a'(t,u'(t),u'(t))-\varepsilon a'(0,u'(0),u'(0))\\
&\quad+2\mathrm{Re}a'(t,u(t),u'(t))-2\mathrm{Re}a'(0,u(0),u'(0))]\\
&\quad\leqslant 2\ \mathrm{Re}\int_0^t\|f'(\tau)\|_{W'}\|u''(\tau)\|_W d\tau+3\int_0^t a'(\tau,u'(\tau),u'(\tau))d\tau\\
&\quad+\varepsilon\int_0^t a''(\tau,u'(\tau),u'(\tau))d\tau+2\mathrm{Re}\int_0^t a''(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

由（5.3）我们有

$$
\begin{aligned}
&\|u''(t)\|_W^2+a(t,u'(t),u'(t))\leqslant\|u''(0)\|_W^2+a(0,u_1,u_1)\\
&\quad+\|f'\|^2_{L^2(0,T,W')}+\int_0^t(\|u''(\tau)\|_W^2+c\|u'(\tau)\|_V^2)d\tau
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

其中 $c=3\|\mathscr{A}'(t)_{(\mathscr{L}V,V')}$。

假定 $\mathscr{A}(0)u_0\in W'$，$\mathscr{A}(0)u_1\in W'$，则从（4.23）有

$$
\|u''(0)\|_W\leqslant\|f(0)\|_{W'}+\varepsilon\|\mathscr{A}(0)u_1\|_{W'}+\|\mathscr{A}(0)u_0\|_{W'}
\tag{5.5}
$$

则从（5.4）与（5.5）得

$$
\begin{aligned}
&\|u''(t)\|_W^2+c\|u'(t)\|_V^2\leqslant\beta(\|f(0)\|^2_{W'}+\varepsilon^2\|\mathscr{A}(0)u\|^2_{W'}\\
&\|\mathscr{A}(0)\,u_0\|^2_{W'}+\|u_1\|_V^2+\|f'\|^2_{L^2(0,T,W')})\\
&+\int_0^t(\|u''(\tau)\|_W^2+c\|u'(\tau)\|_V^2)d\tau\qquad(\beta>0)
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

令（5.6）右边第一项为$M$，则由（5.6）并根据 Gronwall 引理得

$$
\|u''(t)\|_W^2+c\|u'(t)\|_V^2\leqslant M+c(T)M
\tag{5.7}
$$

其中 $C(T)$是只依赖于$T$的常数，$0\leqslant t\leqslant T$。

（5.7）中的$M$是不依赖于 $\varepsilon$ 的常数，而（5.7）中 $u''(t)$，$u'(t)$是由边值问题（4.23）而来，自然是含参数 $\varepsilon$ 的。因此，（5.7）表明边值问题（4.23）中的 $\varepsilon$ 趋近于 0 是有意义的。

总结以上，我们得到

**定理 3** 设$V$与$W$是 Hilbert 空间，$V$稠于$W$，且$V\hookrightarrow W$是连续的；对于每个 $t\geqslant0$，$\mathscr{A}(t)\in\mathscr{L}(V,V')$满足一致性椭圆条件和对称性与(4.16)；$\|\mathscr{A}(t)\|_{\mathscr{L}(V,V')}$，$\|\mathscr{A}'(t)\|_{\mathscr{L}(V,V')}$，$\|\mathscr{A}''(t)\|_{\mathscr{L}(V,V')}$均与 $t$ 无关一致有界；对于每个 $x\in\mathscr{A}^{-1}(s)W'$，$\mathscr{A}'(t)x$，$\mathscr{A}''(t)x\in C^1(R_0^+,W')$。则对于每一$f(\cdot)\in C^1(R_0^+,\ W')$，$u_0\in V$，$u_1\in V$，$\mathscr{A}(0)u_0\in W'$，$\mathscr{A}(0)u_1\in W'$，有唯一函数使得

$$
\begin{cases}
\mathscr{C}u''(t)+\mathscr{A}(t)u(t)=f(t)\\
u(0)=u_0,\ \ u'(0)=u_1
\end{cases}
\qquad(t\geqslant0)
$$

## 参 考 文 献


[1] Showalter, R. E., *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Pitman London (1977).

[2] Tanabe, H., Remarks on the equations of evolutions in a Banach space, *Osaka. Math. J.*, 12 (1960).

[3] Nie Yi-yi (聂仪一), Anti-symmetric system of 2nd order evolution equations, *Acta Mathematica Scientia*, 4 (1984).

# Some Extensions of the Initial Value Problem for Second Order Evolution Equations

Nie Yi-yi  Zhou Hong-ding
(*Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Wuhan*)

**Abstract**

The initial problem for second order linear evolution equation systems is discussed by using the contraction semigroup theory. A kind of initial value problem for second order is also discussed with variable coefficients for evolution equations by using the analytical semigroup theory, and is unified with the solutions of the initial value problem for this class of equations and those of first order temporally inhomogeneous evolution equations. This is an important class of equations in mathematical mechanics.