

浅水中群桩受力状况的理论研究*

苏铭德 潘宇

(清华大学, 1985年9月10日收到)

摘 要

本文研究了两类浅水波: Cnoidal 波和孤立波对圆柱群的绕射问题. 采用 Bessel 坐标变换方法统一坐标系, 并通过散射波解中系数的确定来满足各柱面零法向速度条件. 对几种柱分布情况, 用两类入射波分别计算了若干实例. 对计算结果进行了讨论并与实验数据进行了比较, 结果令人满意.

一、引 言

随着海洋石油开采事业的迅速发展, 在各国近海处建立了越来越多的钻井平台. 为了安全经济地设计平台, 正确地计算平台的各种载荷是十分必要的. 众所周知, 波浪载荷在各种载荷中是最经常最主要的. 因而, 对于波浪载荷的研究构成了海洋工程学的重要组成部分. 到目前为止, 以线性波理论, 即小振幅波或称 Airy 波理论为基础, 发展了各种各样的计算方法来估计平台的波浪载荷. 但对于非线性波对近海结构物的作用, 目前尚知之不多.

不少海上平台是由几个相互分离的大型圆柱桩支撑的. 因此研究非线性波对几个圆柱体的作用是很有工程实际意义的. Spring 和 Monkmeyer 介绍了线性波对二个圆柱体的绕射^[1], 这是对于 MacCamy 和 Fuchs^[2] 关于一个圆柱体绕射的发展. Chakrabarti^[3] 用同样的方法研究了线性波多个柱体的绕射. 另外, Stefano Alliney^[4] 也作了同样的工作, 但其结果是错误的. 上述工作均是在线性波理论范围内进行的.

对于非线性波问题, Isaacson 首先研究了椭圆余弦波 (cnoidal wave) 对水中单个直立圆柱的绕射^[5]. 随后又计算了孤立波 (solitary wave) 对单个圆柱的作用力^[6].

本文考察了 Cnoidal 波和 Solitary 波对多个圆柱的绕射作用及柱间的干扰问题.

二、Cnoidal 波绕射问题

直角坐标和圆柱坐标系如图 1 所示. 考虑入射行波与任意组合的 N 个圆柱体的相互作用, 如图 2 所示, 则有如下的方程及边界条件:

$$\Delta\phi=0 \tag{2.1}$$

* 钱伟长推荐.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z=0) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z=d+\eta) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + g\eta = 0 \quad (z=d+\eta) \quad (2.4)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r_i} \right|_{r_i=a_i} = 0 \quad (i=1, \dots, N; \text{ 在每个圆柱表面}) \quad (2.5)$$

其中, a_i 为圆柱 i 的半径, N 为圆柱体个数.

波势 ϕ 可由两部份组成

$$\phi = \phi_i + \phi_r \quad (2.6)$$

其中绕射波 ϕ_r 应满足 Sommerfeld 幅射条件

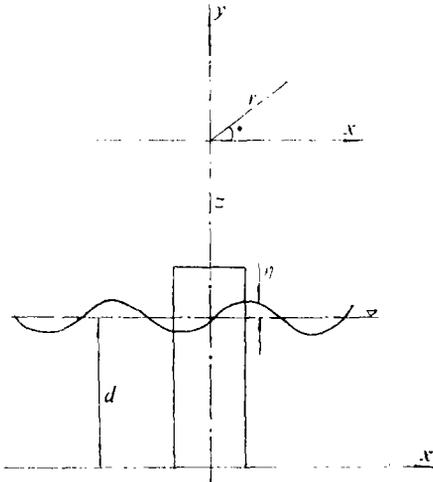


图 1 坐标系示意图

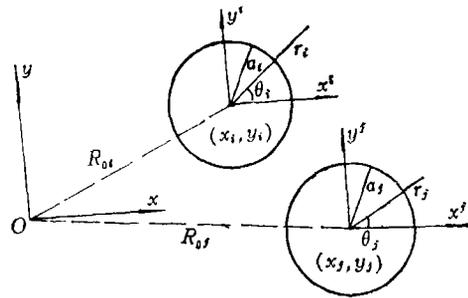


图 2 柱群坐标系示意图

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial \phi_r}{\partial r} - i r \phi_r \right] = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (2.7)$$

入射波势 ϕ_i 可由 Cnoidal 波理论^[5]确定, 采用准确到一阶的近似, 可得

$$\frac{1}{\sqrt{gd}} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \varepsilon \left(\text{cn}^2 q - \frac{\gamma - \kappa'^2}{\kappa^2} \right) \quad (2.8)$$

其中, $\varepsilon = H/d$, H 为波高, $\text{cn} q$ 为 Jacobi 椭圆函数, $q = K(k)(kx - \omega t)$, $K(k)$ 为第一类完全椭圆积分, γ 为第二类完全椭圆积分半径. k 为波数, ω 为波角频率.

对上式积分, 则有

$$\frac{k}{\sqrt{gd}} \phi_i = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \exp[in(kx - \omega t)] \quad (2.9)$$

其中系数 A_n , κ 均可由相应的公式求得^[7]. 由于

$$\exp[in k x] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(nkr) \exp[im\theta] \quad (2.10)$$

代入(2.9)得

$$\frac{k}{\sqrt{gd}} \phi_i = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(nkr) \exp[im\theta] \right] \exp[-i\omega t] \quad (2.11)$$

上式即代表当 $t=0$ 时, 一波峰经过 $x=0$ 处的 Cnoidal 波系的级数展开形式。其中

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \left[\frac{2\pi}{\kappa K(\kappa)} \right]^2 B_n \quad (n \geq 1) \\ B_n &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2n-1} \beta_m \beta_{2n-m} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \beta_{2n+m} \\ \beta_m &= \begin{cases} 0 & (m \text{ 为偶数}) \\ r^{m/2} / (1+r^m) & (m \text{ 为奇数}) \end{cases} \\ r &= \exp \left[-\pi \frac{K(\kappa')}{K(\kappa)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

κ 由下式确定

$$kd = \frac{\pi \left(3 \frac{H}{d} \right)^{\frac{1}{2}}}{2\kappa K(\kappa)} \quad (2.13)$$

K 为第一类完全椭圆积分

$$\kappa'^2 = 1 - \kappa^2 \quad (2.14)$$

若将(2.11)式改写成在第 j 个圆柱中心 (x_j, y_j) 的参考坐标系, 则上式应写成

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{k}{gd}} \phi_i &= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(nkr_j) \exp[im\theta_j] \right] \\ &\quad \cdot \exp[-in\omega t] \exp[in kx_j] \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中, (r_j, θ_j) 为坐标变量, x_j 为 j 柱中心的水平坐标位置。

将由 j 柱散射引起的波势记作 ϕ_i^j , 则可表示为

$$\sqrt{\frac{k}{gd}} \phi_i^j = -\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \exp[-in\omega t] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,n}^j H_m(knr_j) \exp[im\theta_j] \right] \quad (2.16)$$

这种由第一类汉克尔函数 H_m 构成的解是满足方程(2.1)和无限远处的幅射条件(2.7)的。于是总的散射波为

$$\phi_r = \sum_{j=1}^N \phi_i^j \quad (2.17)$$

(2.16)中的系数 $a_{m,n}^j$ 根据 j, m, n 的不同而不同, 尚属未知, 需利用柱面条件予以确定。

总的波势为

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{k}{gd}} \phi &= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \exp[-in\omega t] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(nkr) \exp[im\theta] \right] \\ &\quad - \varepsilon \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \exp[-in\omega t] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,n}^j H_m(nkr_j) \exp[im\theta_j] \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

这一公式难于使用, 因为 $(r_j, \theta_j) (j=1, \dots, N)$ 都是相对于各自圆柱的中心而言的。为了将它们转换到同一坐标系下, 需采用 Bessel 坐标变换。根据 von Neumann 加法定理^[7], 设 Z_n 为一柱函数 (J_n, Y_n, H_n) , 则有

$$Z_n(\omega) \exp[\pm in\psi] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{n+m}(x) J_m(y) \exp[\pm im\phi] \quad (2.19)$$

其中 ω, x, y, ψ, ϕ 的意义如图3所示。若将(2.19)用图4的坐标关系表示, 可得

$$H_m(nkr_j) \exp[im\theta_j] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_{m+l}(knR_{lj}) J_l(nkr_i) \exp[il(\Theta_{ij} - \theta_i)] \cdot \exp[im\Theta_{ji}] \quad (2.20)$$

其中 $R_{lj}, \Theta_{ij}, \Theta_{ji}, r_i, r_j, \sigma_i, \sigma_j$ 均如图4所示。设某柱为参考柱, 其它的坐标都用(2.20)式转换到这一坐标上来。记参考柱为 e , 于是圆柱 j 的散射势写为

$$\sqrt{\frac{k}{gd}} \phi_j = -\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \exp[-in\omega t] \cdot \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,n}^j \exp[im\Theta_{je}] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} H_{l+m}(nkr_{je}) J_l(nkr_e) \exp[-il\theta_e] \exp[-il\Theta_{ej}] \right] \right) \quad (2.21)$$

入射波势为

$$\sqrt{\frac{k}{gd}} \phi_i = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \exp[-in\omega t] \cdot \exp[in\kappa x_e] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(nkr_e) \exp[im\theta_e] \right] \quad (2.22)$$

由于

$$\phi = \phi_i + \sum_{j=1}^N \phi_j^i \quad (2.23)$$

故有

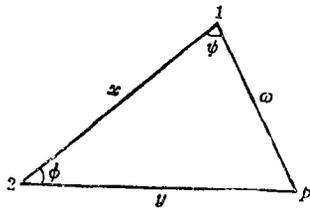


图3 von Neumann加法定理关系图

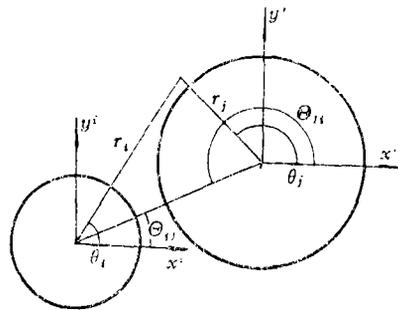


图4 圆柱相对位置

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{k}{gd}} \phi^{(e)} &= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \exp[in\kappa x_e] \cdot \exp[-in\omega t] \\ &\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(nkr_e) \exp[im\theta_e] - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{in} \exp[-in\omega t] \\ &\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,n}^e H_m(nkr_e) \exp[im\theta_e] - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^N \frac{A_n}{in} \exp[-in\omega t] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,n}^j \exp[im\Theta_{je}] \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_{l,m}(nkR_{je}) J_l(nkr_e) \\ & \cdot \exp[-il\theta_e] \cdot \exp[il\Theta_{ej}] \end{aligned} \quad (2.24)$$

$\phi^{(e)}$ 表示在以圆柱 e 为参考坐标时的 ϕ 的表达式。在 e 柱上的物面条件为

$$\frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial r_e} = 0, \quad r_e = a_e \quad (e=1, 2, \dots, N) \quad (2.25)$$

将(2.24)代入(2.25), 并经整理得:

$$\begin{aligned} \frac{i^l \exp[inkx_e] J_l'(nka_e)}{H_l'(nka_e)} &= a_{l,n}^e + \frac{J_l'(nka_e)}{H_l'(nka_e)} \\ & \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,n}^j \exp[im\Theta_{je}] H_{m-l}(nkR_{je}) \exp[-il\Theta_{ej}] \\ & (n=1, 2, \dots; e=1, 2, \dots, N; l=\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.26)$$

实际使用时, 只确定有限个系数, 即 m 只从 $-M$ 到 M , 故对于每个 n , 未知量的个数为 $(2M+1)N$ 。为使方程封闭, l 也取在 $-M$ 和 M 之间。另外, 由于系数 A_n 随 $n \rightarrow \infty$ 时迅速递减, 故 n 可截取在一确定的有限值。不妨记作 NN 。

这样就得到了关于 $a_{m,n}^j$ 的 NN 组代数方程组。每个方程组都有 $(2M+1)N$ 个线性方程式及相同数量的待定系数。求解这些方程组, 就可确定所有的 $a_{m,n}^j$, 然后代入方程(2.24), 即得到总波势。

现在可以确定柱体所受压力及合力。忽略 $O(\varepsilon^2)$ 及以上的项, 柱面压力分布为

$$(p)_{r_j=a_j} = \rho g(d-z) - \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{r_j=a_j} \quad (2.27)$$

由此不难得出作用于柱上的总的 x, y 方向的合力 F_x^e, F_y^e :

$$\frac{F_x^e}{\rho a_e H g} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp[-in\omega t] \left[(a_{1,n}^e - a_{-1,n}^e) \left(H_1(nka_e) - J_1(nka_e) \frac{H_1'(nka_e)}{J_1'(nka_e)} \right) \right] \quad (2.28)$$

$$\frac{F_y^e}{\rho a_e H g} = \pi i \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp[-in\omega t] \left[(a_{1,n}^e + a_{-1,n}^e) \left(H_1(nka_e) - J_1(nka_e) \frac{H_1'(nka_e)}{J_1'(nka_e)} \right) \right] \quad (2.29)$$

由[5]知, 单柱受力为 F_s :

$$\frac{F_s}{\rho a_e H g} = \frac{\psi}{ka_e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n H_1'(nka_e)} \exp[-in\omega t] \quad (2.30)$$

且仅有 x 方向的力。

为考察柱间影响, 定义系数 f_F^e :

$$f_F^e = \frac{F_x^e}{F_s^e} \quad (e=1, 2, \dots, N) \quad (2.31)$$

表示了周围柱体造成的影响。它由(2.29)、(2.30), 不难计算得到。

三、Solitary 波绕射问题

当考虑入射波为孤立波的情况时, 前述的绕射理论仍然适用, 所不同的是需用另一种方式表示入射波势. 由于孤立波是 Cnoidal 波在波长趋于无穷大时的极限情况, 故不能再以 Fourier 级数表示, 而应以 Fourier 积分表达^[6], 即

$$\phi_i = \frac{H}{\sqrt{d/g}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{A(k)}{ik} \exp[-ikct] \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr) \exp[im\theta] dk \quad (3.1)$$

其中 $A(k)$ 为入射波的 Fourier 变换^[6]

$$A(k) = \frac{4\pi d^3 k}{3H} \operatorname{cosech} \left[\pi k \sqrt{\frac{d^3}{3H}} \right] \quad (3.2)$$

H 为波高, d 为水深.

设总波势为

$$\phi = \phi_i + \sum_{j=1}^N \phi_j^i \quad (3.3)$$

ϕ_j^i 为由 j 柱产生的反射波.

$$\phi_j^i = \frac{H}{\pi \sqrt{d/g}} \int_0^\infty \frac{A(k)}{ik} \exp[-ikct] \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m H_m(kr_j) \exp[im\theta_j] dk \quad (3.4)$$

用与前述相同的 Bessel 坐标变换最后可得

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{H}{\pi \sqrt{d/g}} \int_0^\infty \frac{A(k)}{ik} \exp[-ikct] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr_s) \exp[im\theta_s] \exp[ikx_s] \right. \\ & - \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n^i H_m(kr_s) \exp[im\theta_s] - \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^i \exp[im\theta_{js}] \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{n+m}(kr_{js}) \\ & \left. \cdot J_n(kr_s) \exp[im\theta_{js} - in\theta_s] \right] dk \end{aligned} \quad (3.5)$$

利用边界条件

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r_s} \right|_{r_s=a_s} = 0 \quad (s=1, 2, \dots, N) \quad (3.6)$$

可形成线性方程组

$$\begin{aligned} \frac{i^n \exp[ikx_s] J_n'(ka_s)}{H_n'(ka_s)} = & a_n^i + \frac{J_n'(ka_s)}{H_n'(ka_s)} \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^i \exp[-im\theta_{js}] \\ & \cdot H_{m-n}(kr_{js}) \exp[-in\theta_{js}] \end{aligned} \quad (3.7)$$

($s=1, \dots, N; n=-M, \dots, 0, \dots, +M$)

对于某一确定的 k , 可以求出与 k 相关的 a_n^i 的值.

至此不难确定各柱所受力的大小. 如水平方向 x 上的合力为

$$\begin{aligned} F_x^s = & \frac{4\pi d^3}{\rho a_s H g} \int_0^\infty k \exp[-ikct] (a_n^i - a_{n-1}^i) \left[H_1(ka_s) - J_1(ka_s) \frac{H_1'(ka_s)}{J_1'(ka_s)} \right] \\ & \operatorname{sh} \left[\pi k \sqrt{\frac{d^3}{3H}} \right] dk \end{aligned} \quad (s=1, \dots, N) \quad (3.8)$$

其中积分可用数值积分的方法求得。

四、数值分析与结果

根据上二节的公式，编写了计算程序，程序的核心是形成并求解若干个复系数的线性方程组。复矩阵的大小为 $(2M+1)N \times (2M+1)N$ ，可简便地表示为

$$\mathbf{A}_n X_n = \mathbf{B}_n \quad (n=1, 2, \dots, NN) \tag{4.1}$$

$$X_n = (a_{-M,n}^1, \dots, a_{M,n}^1; a_{-M,n}^2, \dots, a_{M,n}^2; \dots; a_{-M,n}^N, \dots, a_{M,n}^N)^T$$

其中 $\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n$ 为复数矩阵，求解 X_n 得

$$X_n = \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n \tag{4.2}$$

这里求解 X_n 是直接对 \mathbf{A}_n 求逆而没有分成实部和虚部以节省储存单元。只是对于每一个 n 要求解一次方程组，共有 NN 次。一旦求得 $a_{i,n}^l$ 后就可以求受力了。

需要注意的是，在求孤立波问题时，用(3.8)式计算受力时需计算一个 $0 \rightarrow \infty$ 的积分。而其中系数 $a_{i,1}^l, a_{i,1}^l$ 是与 k 有关的量，需由方程组(3.7)确定。这样就要选用合适的积分方法。好在当 $k \rightarrow 0$ 和 $k \rightarrow \infty$ 时，整个被积函数迅速趋向于零。因而，可选择足够大的有限区域求积。具体大小视波的参数和柱的尺度而定。

对于两种入射波的情况，分别计算了若干实例，结果见附图所示。一般地说，当圆柱沿入射波方向排列时， f_F 随柱间距离增加而呈周期状变化，且幅度越来越小。当柱排列在与入射波方向垂直的直线上时， f_F 随间距增加而迅速接近于1。说明前者干扰比后者要大得多。图中还将计算结果与实验结果进行了比较，吻合情况是令人满意的。

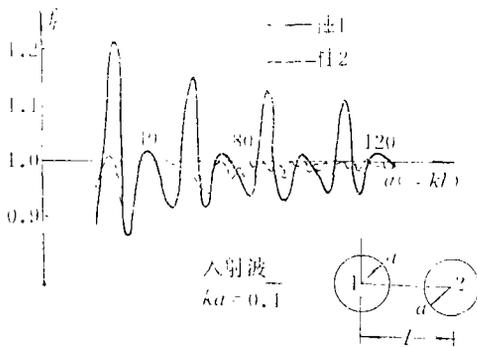


图5 Cnoidal波对纵向排列的圆柱作用

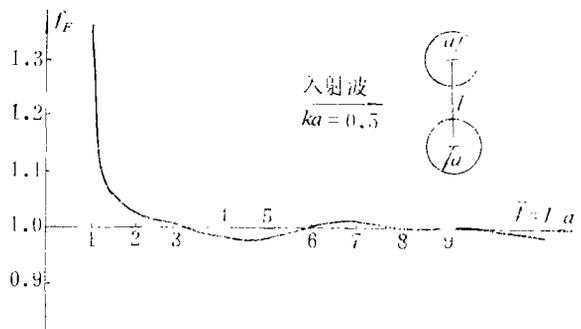


图6 Cnoidal波对横向排列的圆柱作用

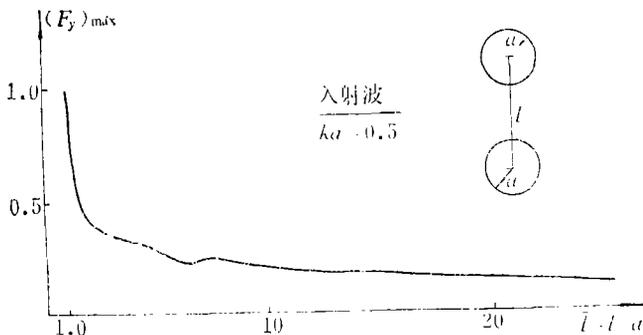


图7 $(F_y)_{max}$ 与 l/a 的关系 (Cnoidal波入射)

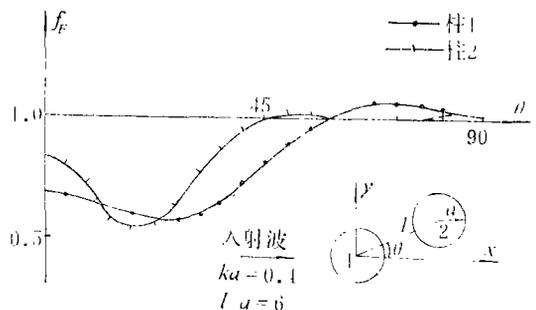


图8 f_F 与方位角 θ 的关系曲线 (Cnoidal波入射)

本理论是在浅水及流场没有明显分离的假定下进行的。因此,对于Cnoidal波情况,要求

$$kd < 0.6, \quad \frac{H/d}{ka} < 3 \quad (4.3)$$

对于Solitary波,波长趋于无穷,但波的特征长度可用 $\sqrt{d^3/H}$ 表示。故此,它的适用范围为

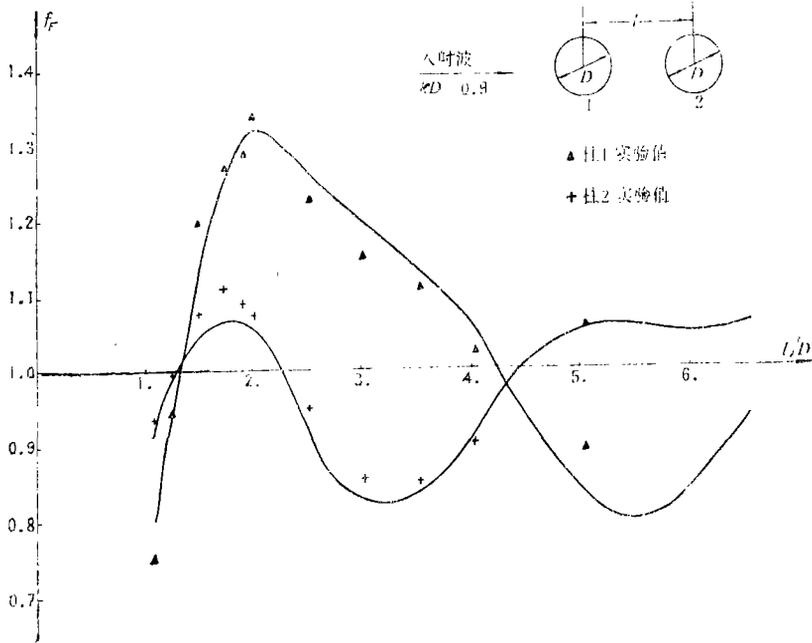


图9 C noidal波对纵向排列圆柱群作用及实验比较

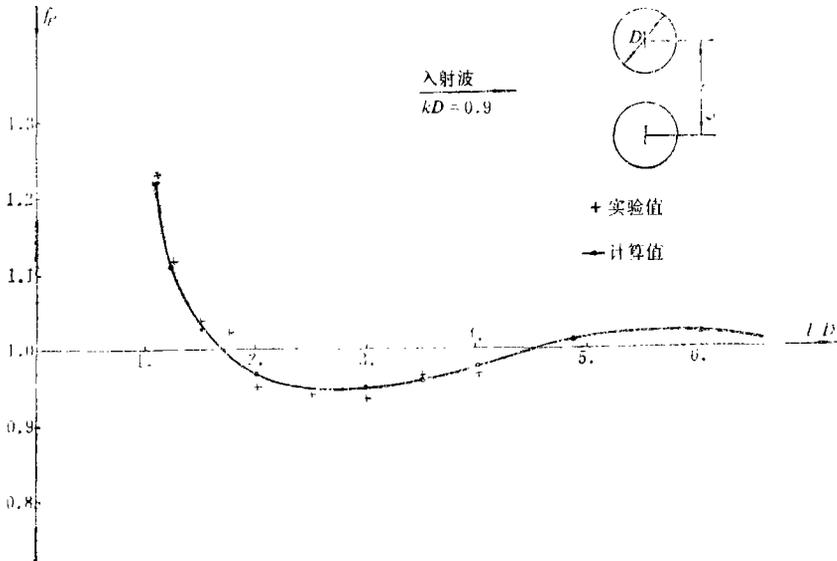


图10 Cnoidal波对横向排列圆柱群作用和实验值作比较

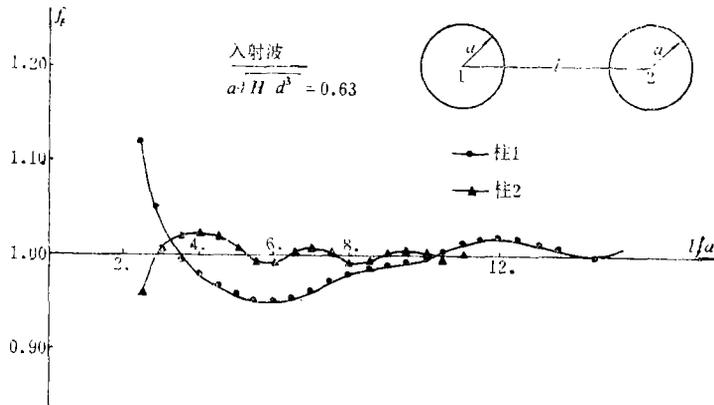


图11 f_F 与 l/a 的关系 (孤立波, 纵向入射)

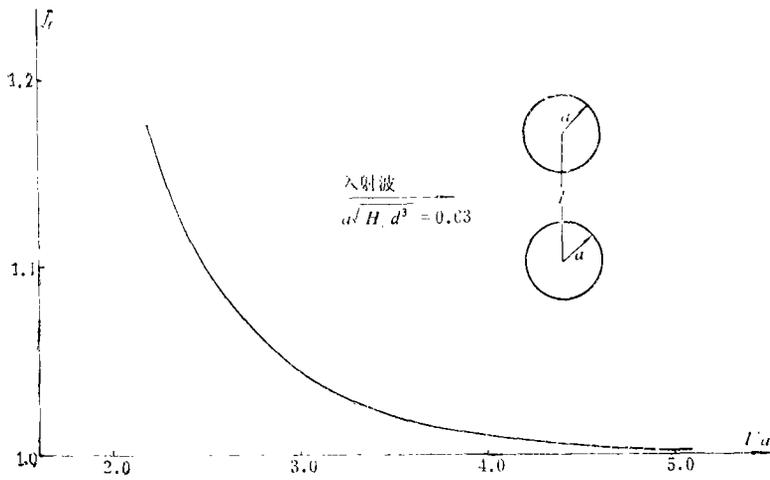


图12 f_F 与 l/a 的关系 (孤立波, 横向入射)

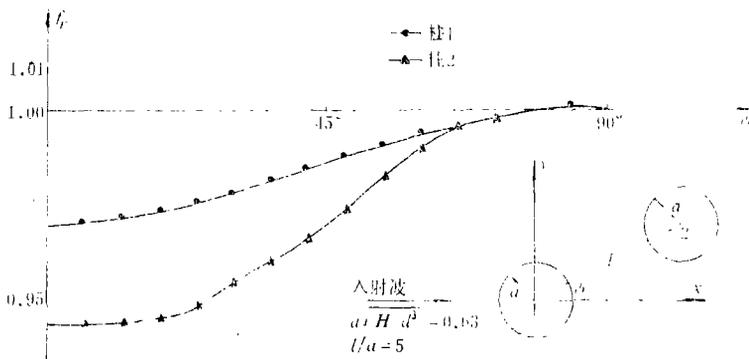


图13 孤立波对二个圆柱的散射, ϕ 变化

$$\sqrt{\frac{H\alpha^2}{d^3}} > 0.36 \quad (4.4)$$

由于上述限制, 本理论可用于近海的海港、沿海储油, 人工岛等的分析。

本文引用的实验数据是由天津大学水力学海港实验室宋祁副教授提供, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Spring, B. and P. L. Monkmeier, Interaction of plane waves with vertical cylinders, *Proceedings of the 14th International Conference on Coastal Engineering*, Copenhagen, Denmark, ASCE (1974), 1828—1847.
- [2] MacCamy, R. C. and R. A. Fuchs, Wave forces on piles: A diffraction theory, *Technical Memorandum*, No69 Beach Erosion Board, Coastal Engin. Reseach Centre, U. S. Army Washington D. C. (1954).
- [3] Chakrabarti, Subrata K., Wave forces on multiple vertical cylinders, *J. of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division*, ASCE, **104**, ww2, May (1978).
- [4] Alliney, Stefano, Water waves diffraction around cylindrical obstacles, *Appl. Math. Modelling*, **5**, Aug. (1981), 1985.
- [5] Isaacson, M. de St. Q., Shallow wave diffraction around large cylinder, *J. of the Waterways, Port, Coastal and Ocean Division*, ASCE, **103**, ww1, Proc. Paper 12756 Feb. (1977), 69—82.
- [6] Isaacson, M. de St. Q., Solitary wave diffraction around large cylinder, *J. of the Waterways, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, **109**, ww1, Proc, Paper 17671 Feb. (1983), 121—127.
- [7] Abramowitz, M. and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington, D. C. (1964).

A Theoretical Investigation on the Wave Forces on the Multiple Cylinders in Shallow Water

Su Ming-de Pan Yu

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

The diffraction problem of two kinds of shallow water wave, cnoidal wave and solitary wave, around a group of cylinders is discussed. A Bessel coordinate transformation is employed to uniform the coordinate system, and thus the boundary condition on each cylinder's surface can be satisfied by determining the coefficients in the solution. Several examples are calculated for two kinds of incident wave and various arrangement of the cylinders, and the results are discussed and compared with the available experimental data.