应用数学和力学，第8卷第4期（1987年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

正交各向异性板壳理论中的 Schrödinger 方程*

沈惠川

（中国科学技术大学，1985年10月23日收到）

摘　要

本文是文［1～5］的继续。在本文中：

（1）将正交各向异性薄壳的小挠度振动问题或 Winkler 地基上正交各向异性薄板的小挠度振动问题所服从的 Love-Kirchhoff 方程化归为矩阵各向异性 Schrödinger 方程的求解，由此可以利用文［1］和［3～5］中的方法得到这两类问题的通解；

（2）将正交各向异性扁壳大挠度问题的 von Kármán-Власов 方程（其特例为正交各向异性薄板大挠度问题的 von Kármán 方程）化归为 AKNS 方程即 Dirac 方程的形式，从而可以利用文［4～5］中的散射反演方法得到这两类问题的精确解。

波纹板壳和加肋板壳的小挠度问题的通解或大挠度问题的精确解，作为特例包含在本文中。

一、前　言

弹性力学的各类方程均属于弥散型方程。凡弥散型方程均可以被化成 Schrödinger 方程或 Dirac 方程。在文［1］中，我们从弹性动力学的通解[2]出发，将线弹理论中的 Lamé 方程化归为 Dirac 方程的求解；在文［3～5］中，我们业已证明，弹性板壳的小挠度问题或大挠度问题，都可以归结为 Schrödinger 方程或 Dirac 方程的本征值问题。本文是文［1～5］的继续。在本文中我们将证明，正交各向异性板壳的小挠度问题抑或或大挠度问题，同样可以归结为 Schrödinger 方程或 Dirac 方程的本征值问题。

本文的研究对象为正交各向异性板壳。正交各向异性板壳包括由各向异性材料制成的薄板和薄壳，以及构造上的原因而表现为各向异性的薄板和薄壳[6~7]。后者包括波纹板壳[8~18]和加肋板壳[19~21]。

正交各向异性板壳问题和各向同性板壳问题一样，都存在非线性跳跃现象。在文［4～5］中我们曾经指出：文［22］认为，非线性的弹性系统从一个平衡状态跳跃到另一个平衡状态，可以与量子力学中能量跃迁相比拟。为了定量地研究这种非线性跳跃，引入 Schrödinger 方程或 Dirac 方程是绝对必要的。

正交各向异性板壳的非线性跳跃问题与大挠度问题相联系。近年来，在研究某些正交各

* 钱伟长推荐。

向异性板壳时，用的就是大挠度理论。这些正交各向异性板壳，有时被称作“精密仪器弹性元件[11]”。当然，在一般不十分精密的计算中，用得较多的还是小挠度理论。

迄今为止，力学工作者在正交各向异性板壳的理论和应用方面，已作了大量值得称道的工作。必须特别强调钱伟长先生所作的贡献。钱先生不仅首创了板壳的内禀统一理论[23]，而且是将天体力学的摄动法应用于板壳大挠度问题上的第一个人。他的开创性工作至今仍被誉为是“划时代的工作”，他的解法仍然被公认为是最漂亮的。近年来，钱先生为使有限元法能方便地应用于板壳大挠度问题而创建并完善了变分原理[24~29]。大量关于正交各向异性板壳问题的研究，都是沿袭了钱先生的方法。钱先生的工作，在方法论上统一了各类板壳问题的近似解法。

许多物理上和力学上的方程中，还存在着所谓“通解”和“精确解”。一般来说，通解存在于线性方程中；非线性方程除了少数（例如，Burgers 方程[30]）具有通解外，眼下大部分还只能求得精确解。我们将各类无耗散型方程归结为 Schrödinger 方程或 Dirac 方程的求解，其目的就是为了统一地求得这些方程的通解或精确解。本文与文[3～5]一样，在引入 Schrödinger 方程或 Dirac 方程的同时，我们还引入了旋量及其运算[31~33]。这不仅是为了方便行事，而且怀有方法论上的企图。

文[30]认为，Schrödinger 方程（包括 Dirac 方程）是有着广泛适用范围的重要方程。它是自然界中为数不多的基本方程之一。本文将正交各向异性板壳问题的基本方程纳入 Schrödinger 方程和 Dirac 方程的范畴，这件事再次说明了，Schrödinger 方程（或Dirac 方程）可以一揽连续介质力学和可逆热力学中的所有非耗散问题。Schrödinger 方程或Dirac 方程在各种能量和边界条件下的本征表现，经由不同的变换，最后成了五花八门的非耗散问题的通解或精确解。

本文的结果适合各类正交各向异性板壳问题。波纹板壳和加肋板壳是本文的特例。

本文同文[1～5，34～35]一样，在需要引入的时候，都假定所有力学量均已解析开拓到复平面上，并且已定义为 Hilbert 空间中的多维矢量。

二、正交各向异性板壳小挠度问题的Schrödinger方程

小挠度正交各向异性薄壳的基本方程可以归纳为 Love-Kirchhoff 的形式[36~40]：

$$D_0\nabla^4 W-h\nabla_k^2 F=Q \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{E_0}\nabla^4 F+\nabla_k^2 W=0 \tag{2.2}$$

式中

$$D_0\nabla^4=D_1\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{E_0}\nabla^4=\frac{1}{E_2}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{2}{E_3}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{1}{E_1}\frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{2.4}$$

$$\nabla_k^2=k_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_1\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.5}$$

而 k_1，k_2 表示 x 方向和 y 方向的初曲率；D_1，D_2 为 x 方向和 y 方向的抗弯刚度，D_3 为扭转刚度；E_1，E_2 为 Young 模量，$E_3=2/(1/G-\mu_1/E_1-\mu_2/E_2)$ 为折合 Young 模量[7]；h 为

壳厚；Q为侧向载荷；W为挠度；F为应力函数。在动力学问题（即振动问题）中

$$Q=-m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

式中m为薄壳每单位面积内的质量。将（2.6）式代入（2.1）式，得到正交各向异性薄壳小挠度振动问题的基本方程如下：

$$\begin{cases}(m\partial_t\partial_t+D_0\nabla^4)W-h\nabla_k^2F=0 & (2.7)\\ \dfrac{1}{E_0}\nabla^4F+\nabla_k^2W=0 & (2.8)\end{cases}$$

方程（2.8）式还可以写成

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{E_2}\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+k_2W\right]+\frac{2}{E_3}\frac{\partial^4F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{1}{E_1}\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+k_1W\right]=0 \tag{2.9}$$

若规范

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=-k_2E_2W,\quad \frac{\partial^2F}{\partial y^2}=-k_1E_1W,\quad \frac{\partial^4F}{\partial x^2\partial y^2}=0 \tag{2.10}$$

则方程（2.9）式恒满足。将（2.10）式代入（2.7）式，可以得到关于挠度W的线性方程

$$[m\partial_t\partial_t+D_0\nabla^4+h(k_1^2E_1+k_2^2E_2)]W=0 \tag{2.11}$$

若

$$K=h(k_1^2E_1+k_2^2E_2) \tag{2.12}$$

则（2.11）式又表示 Winkler 地基上正交各向异性薄板小挠度振动问题的基本方程；其中K为 Winkler 地基的弹性系数。

将方程（2.11）式化为 Schrödinger 方程的形式是轻而易举的事。实际上，（2.11）式正是 Schrödinger 方程的“平方”。

为此，我们首先令

$$\xi^2=\frac{D_1}{m},\quad \eta^2=\frac{D_3}{2m},\quad \lambda^2=\frac{D_2}{m},\quad k^2=\frac{h}{m}(k_1^2E_1+k_2^2E_2) \tag{2.13}$$

此时方程（2.11）式成为

$$\left(\partial_t\partial_t+\xi^2\frac{\partial^4}{\partial x^4}+4\eta^2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\lambda^2\frac{\partial^4}{\partial y^4}+k^2\right)W=0 \tag{2.14}$$

引入 Dirac 矩阵（Flügge 标准矩阵）[32] γ_α（$\alpha=1,2,3,4$）：

$$\gamma_1=\sigma_2\otimes\sigma_1,\quad \gamma_2=\sigma_2\otimes\sigma_2,\quad \gamma_3=\sigma_2\otimes\sigma_3,\quad \gamma_4=\sigma_2\otimes\sigma_4 \tag{2.15}$$

其中σ_k（$k=1,2,3$）为 Pauli 矩阵，σ_4为2×2单位矩阵，$\otimes$表示直积（Kröneckerl积）。同时，使挠度W定义为 Hilbert 空间中的一个四维矢量：

$$W=(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4)^T \tag{2.16}$$

这样，方程（2.14）式可以被“开方”成为

$$i\partial_t\psi=\left(\xi\gamma_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\eta\gamma_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\lambda\gamma_3\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k\gamma_4\right)\psi \tag{2.17}$$

（2.17）式是矩阵形式的各向异性 Schrödinger 方程。它具有形式

$$i\partial_t\psi=\hat{H}\psi \tag{2.18}$$

式中$\hat{H}$为 Hamilton 算符：

$$\hat{H}=\left(\xi\gamma_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\eta\gamma_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\lambda\gamma_3\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k\gamma_4\right) \tag{2.19}$$

方程（2.17）式或（2.18）式的通解很容易被我们求得。具体解法可以参阅文[1，3～5]。

三、正交各向异性板壳大挠度问题的Schrödinger方程

大挠度正交各向异性薄壳的基本方程可以用 von Kármán-Власов 方程[39,41]来描述：

$$D_0\nabla^4W-h\nabla_k^2F-Q=h\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\frac{\partial^2W}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right) \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{E_0}\nabla^4F+\nabla_k^2W=\left(\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2} \tag{3.2}$$

式中

$$D_0\nabla^4=D_1\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{E_0}\nabla^4=\frac{1}{E_2}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{2}{E_3}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{1}{E_1}\frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{3.4}$$

$$\nabla_k^2=k_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_1\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{3.5}$$

而k_1，k_2；D_1，D_2，D_3；E_1，E_2，E_3；h，Q，W和F的意义与弹性薄壳小挠度问题相同。

Власов 列出的平衡方程建立在变形是局部的假设基础上[39~40]。换言之，所考虑的那部分壳体可以认为是扁平的。因此，在求解上述大挠度非线性方程组的时候，我们可以认为 Gauss 曲率K等于零[39]：

$$K=k_1k_2=0 \tag{3.6}$$

零 Gauss 曲率的假设，对柱形和锥形曲面的壳体是严格正确的，而对诸如球形壳体则在球半径相当大时是近似正确的。对“扁壳”而言，我们可以认为（3.6）式为真。

在常曲率条件下，设

$$W=W'-(k_1x^2+k_2y^2)/2 \tag{3.7}$$

并仍用W表示W'，有

$$D_0\nabla^4W=h\left[\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\frac{\partial^2W}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right]+Q \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{E_0}\nabla^4F=\left[\left(\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right]-k_1k_2 \tag{3.9}$$

由于条件（3.6）式，可以认为（3.9）式与下式相当：

$$\frac{1}{E_0}\nabla^4F=\left[\left(\frac{\partial^3W}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right] \tag{3.10}$$

（3.8）式和（3.10）式是我们考虑问题的出发点。它们在形式上与正交各向异性弹性薄板大挠度问题的 von Kármán 方程相同，因而可以采用统一的方法来处理。

方程（3.10）式还可以写成如下形式：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{E_2}\frac{\partial^2F}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\frac{1}{E_3}\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{1}{E_1}\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]=0 \tag{3.11}$$

若规范

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{E_2}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=-\frac{E_3}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{E_1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \tag{3.12}$$

则（3.11）式恒满足。将（3.12）式代入（3.8）式，可以得到关于挠度W的非线性方程

$$\left(D_1\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)W=\frac{h}{2}\left[E_1\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$\left.+2E_3\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)+E_2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right]+Q \tag{3.13}$$

我们设

$$\beta_1^2=\frac{D_1}{D_3},\quad \beta_2^2=\frac{D_2}{D_3},\quad \alpha_1=\frac{E_1}{E_3},\quad \alpha_2=\frac{E_2}{E_3} \tag{3.14}$$

$$W=\sqrt{\frac{2D_3}{E_3h}}w,\quad Q=D_3\sqrt{\frac{2D_3}{E_3h}}q \tag{3.15}$$

则正交各向异性弹性板壳的基本方程（3.13）式可以无量纲化为

$$\left(\beta_1^2\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\beta_2^2\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)w$$

$$=\left[\alpha_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\alpha_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+q \tag{3.16}$$

暂不考虑侧向载荷q，而令

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\sqrt{6}u,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\sqrt{6}v,\quad y\to iy \tag{3.17}$$

则（3.16）式可以写为

$$\beta_1^2 u_{,xxx}+\beta_2^2 v_{,yyy}-u_{,xyy}-v_{,xxy}$$
$$=6[\alpha_1 u^2 u_{,x}+\alpha_2 v^2 v_{,y}-uv(u_{,y}+v_{,x})] \tag{3.18}$$

（3.18）式要成立的充分条件是：

$$\beta_1^2 u_{,xxx}-u_{,xyy}=6(\alpha_1 u^2 u_{,x}-uvu_{,y}) \tag{3.19a}$$

和

$$\beta_2^2 v_{,yyy}-v_{,xxy}=6(\alpha_2 v^2 v_{,y}-uvv_{,x}) \tag{3.19b}$$

由文[4～5]可知，（3.19）式可以归结为下列两组具有 Schrödinger 方程形式的所谓 AKNS 方程[30,42~45]（实际上是 Dirac 方程）的求解：

时间发展方程

$$i\psi_{,t}=H_k\psi\qquad (k=1,2) \tag{3.20}$$

本征方程

$$L_k\psi=\zeta_k\psi\qquad (k=1,2) \tag{3.21}$$

式中

$$\left.\begin{array}{l} L_k=\begin{bmatrix} i\dfrac{\partial}{\partial z} & -\dfrac{i}{\beta_k}p \\ \dfrac{i}{\beta_k}r & -i\dfrac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix},\quad H_k=\begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & -A_k\end{bmatrix} \\ \psi=(\psi_1,\ \psi_2)^T,\quad 2z=x+iy \end{array}\right\} \tag{3.22}$$

和

$$\left.\begin{aligned}A_k&=\frac{1}{\beta_k^2}\left(4\beta_k^2\zeta_k^3+2pr\zeta_k+irp_{,z}-ipr_{,z}\right)\\B_k&=\frac{1}{\beta_k^3}\left[4i\beta_k^2p\zeta_k^2-2\beta_k^2p_{,z}\zeta_k+i(2p^2r-\beta_k^2p_{,zz})\right]\\C_k&=\frac{1}{\beta_k^3}\left[4i\beta_k^2r\zeta_k^2+2\beta_k^2r_{,z}\zeta_k+i(2pr^2-\beta_k^2r_{,zz})\right]\end{aligned}\right\}\tag{3.23}$$

（以上三式均不对指标 k 求和）

由方程（3.20）式和（3.21）式的可积性条件，我们可以得到下列方程（方程（3.19）是它们的特例）：

$$\beta_k^2p_{,t}-6rpp_{,z}+\beta_k^2p_{,zzz}=0\tag{3.24a}$$

$$\beta_k^2r_{,t}-6rpr_{,z}+\beta_k^2r_{,zzz}=0\tag{3.24b}$$

（以上两式均不对指标 k 求和）

如果我们仅考虑定态问题，并设

$$[\mathrm{A}]\qquad\left.\begin{aligned}&r=\alpha_1p-i\sqrt{3}\beta_1s,\quad y\to\sqrt{3}\beta_1y\\&p\to u,\quad s\to v\end{aligned}\right\}\tag{3.25}$$

则（3.24a）式的实部与（3.19a）式相同；

$$[\mathrm{B}]\qquad\left.\begin{aligned}&r=-\alpha_2p-i\sqrt{3}\beta_2s,\quad x\to\sqrt{3}\beta_2x\\&p\to v,\quad s\to u\end{aligned}\right\}\tag{3.26}$$

则（3.24a）式的虚部与（3.19b）式相同。

如果正交各向异性板壳的大挠度问题存在外场作用（这外场可以是侧向载荷），外场的势用U^0，U^k （$k=1,2$）来表示，则在使用经典规则后，$p_\mu=-i\partial_\mu$ （$\mu=0,1,2$；$\partial_0=\partial_t$）应改为

$$\left.\begin{aligned}&p^0=-p_0\to D^0=p^0+U^0\\&p^k=p_k\to D^k=p^k+U^k\end{aligned}\right\}\tag{3.27}$$

从而，整个问题现在化为 Dirac 方程（AKNS 方程）的求解，而 AKNS 方程的求解，则有成熟的散射反演方法[30,44~45]和Bäcklund 变换。当然，在采用散射反演方法和Bäcklund 变换之前，必须通过变换

$$\Gamma_1=\frac{\psi_2}{\psi_1},\quad\Gamma_2=\frac{\psi_1}{\psi_2}\tag{3.28}$$

将 AKNS 方程（3.20）式和（3.21）式变成 Riccati 方程

$$\Gamma_{1,z}=2i\zeta_k\Gamma_1+r-p\Gamma_1^2\tag{3.29a}$$

$$\Gamma_{2,z}=-2i\zeta_k\Gamma_2+p-r\Gamma_2^2\tag{3.29b}$$

和

$$\Gamma_{1,t}=i(2A_k\Gamma_1-C_k+B_k\Gamma_1^2)\tag{3.30a}$$

$$\Gamma_{2,t}=-i(2A_k\Gamma_2+B_k-C_k\Gamma_2^2)\tag{3.30b}$$

这样，全部正交各向异性板壳理论的基本方程，都可以化归为 Dirac 方程的求解，具体算例，可参看 Ablowitz[42~43]，加藤[46~47]，Miura[48~51]等人[52~57]的文章。

参 考 文 献

[1] 沈惠川，单色弹性波谱的分裂，应用数学和力学，**5**，4 (1984)，541—551.

[2] 沈惠川，弹性动力学的通解，应用数学和力学，**6**，9 (1985)，791—796；自然杂志，**7**，8 (1984)，633—634；**7**，10 (1984)，756.

[3] 沈惠川，弹性基上的薄板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的小挠度弯曲，应用数学和力学，**5**，6 (1984)，817—827.

[4] 沈惠川，弹性大挠度问题 von Kármán 方程与量子本征值问题 Schrödinger 方程的关系，应用数学和力学，**6**，8 (1985)，711—723.

[5] 沈惠川，薄壳理论中的 Schrödinger 方程，应用数学和力学，**6**，10 (1985)，887—900.

[6] Лехницкий С. Г., *Анизотропные Пластинки*, Гостехиздат (1957)；中译本，《各向异性板》，科学出版社 (1963).

[7] 周次青，正交各向异性矩形薄板的非线性弯曲，应用数学和力学，**5**，3 (1984)，419—436.

[8] Андреева Л. Е., Расчёт гофрированных мембран как анизотропных пластинок, *Инженерный Сборник*, **21** (1955).

[9] Андреева Л. Е., *Упругие Элементы Приборов*, М. Мащгиз (1962).

[10] Бурмистров Е. Ф., Симметричный изгиб неоднородных и однородных ортотропных оболочек вращения с учётом больших прогибов и неравномерного температурного поля, *Инженерный Сборник*, **27** (1960).

[11] Феодосьев В. И., *Упругие Элементы Точного Приборостроения*, Оборонгиз (1949)；中译本，《精密仪器弹性元件的理论与计算》，科学出版社 (1963).

[12] 赤坂隆 (Akasaka, Takashi), Corrugated diaphragm の弾性特性について，日本航空学会誌，**3** (1955)，279—288.

[13] 久保 (Kubo)，波状ダイセフラムの諸特性，計測[日]，**10**，1 (1960).

[14] 刘人怀，波状圆板的特征关系，力学学报，1 (1978)，47—52.

[15] 刘人怀，具有光滑中心的波纹圆板的特征关系式，中国科学技术大学学报，**9**，2 (1979)，75—86.

[16] 刘人怀，波纹环形板的非线性弯曲，中国科学，A辑，3 (1984)，247—253.

[17] 陈山林，浅正弦波纹圆板在均布载荷下的大挠度弹性特征，应用数学和力学，**1**，2 (1980)，261—272.

[18] 张其浩，波纹圆板的特征关系的研讨，力学与实践，**2**，3 (1980)，64—66.

[19] 陈远汉，加筋板大变形的混合有限元解法，应用数学和力学，**5**，1 (1984)，139—151.

[20] 钱伟长，带有环向加强肋的任意截面柱壳理论，上海工业大学学报，1 (1984)，1—30.

[21] 钱伟长，有加强肋的任意闭合截面（椭圆截面）柱壳在均布外压下的渐近解，上海工业大学学报，2 (1984)，1—40.

[22] Налешкевич Я. (Naleszkiewicz, J.), Квантовые свойства явлений упругой неустойчивости, *Бюлл. Польск., АН*, **3**, 2 (1955), 59—72.

[23] Synge, J. L. and Chien Wei-zang (钱伟长), The intrinsic theory of elastic shells and plates, *Appl. Mech., Th. von Kármán Anniv. Vol.* (1941), 103—120.

[24] 钱伟长，《变分法和有限元》，上册，科学出版社 (1980).

[25] Chien Wei-zang(钱伟长), *Incompatible Elements and Generalized Variational Principles*, Science Press (1982).

[26] Chien Wei-zang (钱伟长)，*Incompatible Plate Elements Based upon Generalized Variational Principle*, (ed. by S. N. Atluri, R. H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz),

John Wiley and Sons, New York (1983).

[27] 钱伟长，再论弹性力学中的广义变分原理——就等价定理问题和胡海昌先生商榷，力学学报，4 (1983), 325—340.

[28] 钱伟长，亦论广义变分原理与无条件变分原理——就本问题答胡海昌先生，固体力学学报，3 (1984), 461—468.

[29] 钱伟长，《广义变分原理》，知识出版社 (1985).

[30] 谷内俊弥 (Taniuti, T.), 西原功修 (Nishihara, K.), 《非线性波动》，徐福元等译，原子能出版社 (1981).

[31] Dirac, P. A. M., 《量子力学原理》，陈咸亨译，科学出版社 (1965).

[32] Flügge, S., 《实用量子力学》，宋孝同等译，人民教育出版社 (上册，1981; 下册，1983).

[33] Van der Waerden, B. L., 《群论与量子力学》，赵展岳等译，上海科学技术出版社 (1980).

[34] 沈惠川，理想塑性问题中的一般方程、双调和方程和本征方程，应用数学和力学，7，1 (1986), 61—72.

[35] 沈惠川，理想塑性力学问题的通解，自然杂志，8，11 (1985), 846—848.

[36] Новожилов В. В., *Основы Нелинейной Теории Упругости*, Гостехиздат, Москва (1948); 中译本，《非线性弹性力学基础》，科学出版社 (1958).

[37] Timoshenko, S. P. and J. M. Gere, 《弹性稳定理论》，张福范译，科学出版社 (1965).

[38] Timoshenko, S. P. and S. Woinowsky-Krieger, 《板壳理论》，科学出版社 (1977).

[39] Власов В. З., *Общая Теория Оболочек и Её Приложения в Технике*, Гостехиздат (1949); 中译本，《壳体的一般理论》，薛振东等译，人民教育出版社 (1964).

[40] Вольмир А. С., *Гибкие Пластики и Оболочки*, Гостехиздат, Москва (1956); 中译本，《柔韧板与柔韧壳》，卢文达等译，科学出版社 (1959).

[41] von Kármán, Th., *Encyklopadie der Math. Wissonschaften*, Bd Ⅳ, 4 (1910), 349.

[42] Ablowitz, M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, Method for solving the sine-Gordon equation, *Phys. Rev. Letters*, **30** (1973), 1262—1264.

[43] Ablowitz, M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, Nonlinear evolution equations of physical significance, *Phys. Rev. Letters*, **31** (1973), 125—127.

[44] Eckhaus, W. and A. Van Harten, *The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons*, North-Holland, Amsterdam (1981); 中译本，《逆散射变换和孤立子理论》，黄迅成译，上海科学技术文献出版社 (1984).

[45] Захаров В. Е., С. В. Манаков, С. П. Новиков и Л. П. Питаевский, *Теория Солитонов*, Физико-Математической Литературы (1980); 中译本，《孤子理论》，彭启才译，科学出版社 (1985).

[46] 加藤祐辅，《散射理論の反演問題》，岩波書店 (1980).

[47] Yusuke, Kato (加藤祐輔), Inverse scattering method for initial value problem of the nonlinear equation of evolution, *Suppl. of the Prog. of Theor. Phys.*, **55** (1974), 247—283.

[48] Miura, R. M., Korteweg-de Vries equation and generalizations, (Ⅰ) A remarkable explicit nonlinear transformation, *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 1202—1204.

[49] Miura, R. M., C. R. Gardner and M. D. Kruskal, Korteweg-de Vries equation and generalizations, (Ⅱ) Existence of conservation laws and constants of motion, *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 1204—1209.

[50] Su, C. H. and C. S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalizations, (Ⅲ) Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation, *J. Math. Phys.*,

10 (1969), 536—539.

[51] Kruskal, M. D., R. M. Miura and C. S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalizations, (V) Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws, *J. Math. Phys.*, **11** (1970), 952—960.

[52] Ablowitz, M. J. and A. C. Newell, The decay of the continuous spectrum for solutions of the Korteweg-de Vries equation, *J. Math. Phys.*, **14** (1973). 1277—1284.

[53] Agranovich, Z. S. and V. A. Marchenko, *The Inverse Problem of Scattering Theory*, English translation by B. D. Seckler Gordon and Breach, New York (1963).

[54] Gardner, C. S., J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Letters*, **19** (1967), 1095—1097.

[55] Kaup, D. J. and A. C. Newell, An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation, *J. Math. Phys.*, **19** (1978), 798—801.

[56] Lamb, G. L., On the connection between lossless propagation and pulse profile, *Physica*, **66** (1973), 298—314.

[57] Newton, R. G., *Scattering Theory of Waves and Particles*, McGraw-Hill, New York (1966).

The Schrödinger Equation in Theory of Plates and Shells with Orthorhombic Anisotropy

Shen Hui-chuan

(*University of Science and Technology of China, Hefei*)

Abstract

This work is the continuation of the discussion of Refs. [1-5]. In this paper:

[A] The Love-Kirchhoff equations of vibration problem with small deflection for orthorhombic anisotropic thin shells or orthorhombic anisotropic thin plates on Winkler's base are classified as several of the same solutions of Schrödinger equation, and we can obtain the general solutions for the two above-mentioned problems by the method in Refs. [1] and [3~5].

[B] The von Kármán-Vlasov equations of large deflection problem for shallow shells with orthorhombic anisotropy (their special cases are the von Kármán equations of large deflection problem for thin plates with orthorhombic anisotropy) are classified as the solutions of AKNS equation or Dirac equation, and we can obtain the exact solutions for the two above-mentioned problems by the inverse scattering method in Refs. [4~5].

The general solution of small deflection problem or the exact solution of large deflection problem for the corrugated or rib-reinforced plates and shells as special cases is included in this paper.