

文章编号: 1000-0887(2004)09-0901-09

不同模量弯压柱的解析解^{*}

姚文娟¹, 叶志明²

(1. 上海大学 土木工程系, 上海 200072;
2. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委叶志明来稿)

摘要: 依据不同模量弹性理论用流动坐标系及分段积分法导出复合荷载作用下弯压柱的解析解, 建立了中性轴、应力、应变、位移的计算公式, 并编制相应的有限元程序进行计算, 与解析解进行误差对比。最后对不同模量计算结果与经典力学同模量计算结果进行分析对比, 得出两种理论计算结果的差异, 并提出对该类结构计算的合理建议。

关键词: 不同模量; 弯压柱; 解析解; 中性轴

中图分类号: O343.5 **文献标识码:** A

引 言

随着科学技术的日益发展, 对材料科学的研究提出更高的要求, 研制新型材料以及挖掘材料自身的特性潜力, 已成为一种新的研究动向。

不同模量弹性理论就是在经典弹性理论基础上发展起来的, 能更准确地反映材料力学特性的一门弹性理论。经典弹性理论中, 假定弹性模量与应力状态无关, 材料在拉伸、压缩时的弹性模量相等。但工程实际中许多材料具有明显的拉压不同模量特性(混凝土、金属、玻璃钢、塑料、陶瓷等), 特别是近年来发展起来的新型复合材料更是如此, 因此用不同模量来对这些材料制成的构件或结构进行计算分析已倍受关注。

最初的不同弹模弹性理论是由苏联学者 $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}$. . 及美国学者 Medri 和 Jones 提出, Medri 由实验得到具有不同弹性模量的材料其 σ_{ϵ} 曲线在原点处为非线性的结论^[1]。1982 年 $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}$. . 发表了不同模量弹性问题的专著^[2], 在专著中, 他总结了最初的拉压不同模量概念, 提出了对该问题的基本假定, 并推求了单向应力状态下不同模量弹性理论对部分简单问题(单一荷载作用下)的解析解。之后国内外诸多学者对复合荷载作用下, 复杂应力状态下的不同模量问题进行了进一步研究, 其中包括多种数值计算方法^[3~13](有限差分、三角级数、有限元)。到目前为止对于复合荷载作用下具有不同模量结构的解析解还缺乏研究。因此, 本文用不同模量弹性理论推导了在复合荷载作用下的结构构件, 即弯压柱的解析解, 建立了相应的中性轴、应力、应变、位移计算公式, 并编制了有限元程序计算, 最后, 数值计算与解析解进行对比分析。

* 收稿日期: 2003_03_06; 修订日期: 2004_04_20

作者简介: 姚文娟(1957—), 女, 江西南昌人, 博士, 副教授(联系人. Tel: + 86_21_66305773, + 86_21_56335628; Fax: + 86_21_56337100; E_mail: wjyao@staff.shu.edu.cn)。

1 基本概念和假设

1.1 概念

在绝对值相同的拉应力或压应力作用下,材料会发生绝对值不同的拉应变或压应变,材料在轴向应力作用下,应力,应变关系是非线性的(双线性),即材料具有不同的拉伸模量 E_p 及压缩模量 E_n 。如图 1,因此该问题为几何线性,而物理非(双)线性。

1.2 假定

所研究的物体是变形连续的固体,物质是均匀的,各向同性的,材料没有最优方向,但同时由于主应力符号的不同而表现出不同的弹性性质。即当一维拉伸时所研究的材料任何方向有 E_p ,一维压缩时有 E_n ,材料在任意应力状态下只发生弹性小变形,并服从连续介质的一般规律。即平衡方程、几何方程、变形连续性方程均与相同模量理论相同,不同之处仅反映在物理方程(本构关系)中。

本文对不同模量弯压柱采用平面假定,设柱在弯矩及轴力共同作用下,横截面在变形后仍为平面,且与柱轴线正交。在选用不同模量 E_p 和 E_n 时,取决于正应力 σ_x 的符号, σ_x 对应 E_p , σ_x 对应 E_n 。

对一个实际结构,在弯矩和轴力作用下,可能为全截面受拉或全截面受压(该类问题可直接取用 E_p 、 E_n);另可能出部分受压、部分受拉,即同一截面有拉有压,后者较复杂,首先需解决的问题是拉压的分界线即中性轴位置,然后再根据中性轴位置推求拉区及压区正应力公式。

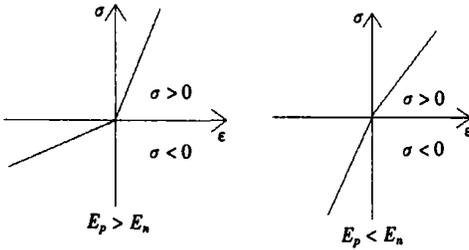


图 1 双线性模型

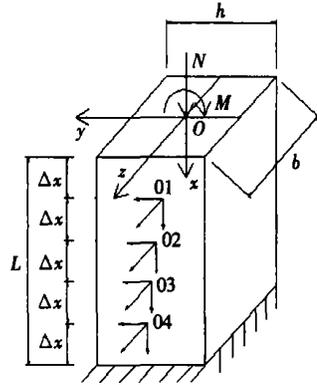


图 2 结构模型

2 结构模型

下端固定的柱,边长为 b, h 。作用有轴向压力 N ,沿截面高度 h 方向作用弯矩 M ,并计入自重的作用,如图 2,由于自重沿 x 向变化使 yOz 截面的中性轴均沿 x 轴变化, $h_{中} = f(x)$ 。则取流动的坐标系(每增加 Δx ,坐标流动一次),流动后的 yOz 平面内的每一截面,坐标轴均通过中性轴。

3 解析解公式推导

3.1 弯矩作用的中性轴及正应力

在 M 作用下,柱的变形符合平截面假定,即变形后横截面仍为平面,且与轴线正交,横截面只作相对转动。从柱中取一长为 dx 的微段,微段两端截面间的相对转角为 $d\theta$,中性层曲面半径为 ρ ,如图 3,则在截面上距坐标为 y 的任一点的正应变为:

$$\epsilon_x = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \quad (1)$$

根据不同模量在中性点折线(双线性)特点,可从中性点分段后分别用虎克定律即有:
受拉区的正应力为:

$$\sigma_x^p = E_p \epsilon_x = E_p(y/\rho), \quad (2a)$$

受压区的正应力为:

$$\sigma_x^n = E_n \epsilon_x = E_n(y/\rho), \quad (2b)$$

上式中, E_p, E_n 分别为拉压弹性模量。

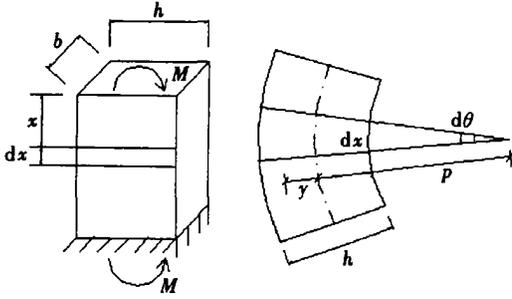


图3 结构变形图

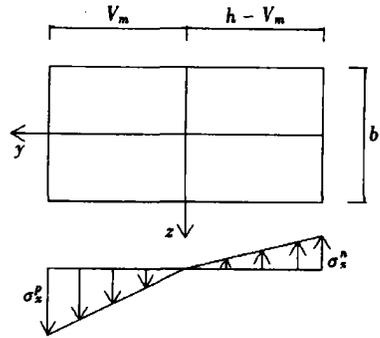


图4 截面示意图

如图4, 设截面受拉区高度为 V_m , 取微元体以上为隔离体, 由平衡条件及圣维南原理有:

$$\int_{V_m-h}^0 E_n \frac{y}{\rho} b dy + \int_0^{V_m} E_p \frac{y}{\rho} b dy = 0, \quad \int_{V_m-h}^0 E_n \frac{y}{\rho} b dy + \int_0^{V_m} E_p \frac{y}{\rho} b dy = M$$

积分上式并解之得:

$$V_m = \frac{h \sqrt{E_n}}{\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n}}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{3M}{[E_p V_m^3 + E_n (h - V_m)^3]} \quad (a)$$

以(a), (3)代入(2)得:

$$\sigma_x^p = \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_n} y, \quad \sigma_x^n = \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p} y, \quad (4)$$

(3), (4)即为柱在纯弯曲作用下不同模量受拉区高度(中性轴)的计算公式及正应力计算公式。当 $E_p = E_n = E$, (3)及(4)完全退回经典力学同模量纯弯曲计算公式。

3.2 考虑弯曲及轴压力共同作用

3.2.1 中性轴

如图5, 在 M, N 共同作用下, 杆件产生弯压变形, 其变形形态与纯弯形态一致, 只是由于 N 的加入使中性轴由纯弯时的 $h/2$ 处向拉(压)区移动了 δ 距离。此时, 杆件变形仍遵循平截面假定。

从杆件中取一微段 dx , 中性层曲率半径为 s , 则截面上距坐标为 y 的任一点的正应变为:

$$\epsilon_x = \frac{(s + y)d\theta - s d\theta}{s d\theta} = \frac{y}{s} \quad (5)$$

拉、压区分别用物理方程后得任一截面任一点的正应力为:

$$\sigma_x^t = E_p y / s, \quad \sigma_x^c = E_n y / s, \quad (6)$$

σ_x^t, σ_x^c 分别为拉区及压区的 x 向正应力。

设在 M, N 共同作用下, 中性轴高度为 h_p , 如图 6 取微元体以上为隔离体, 由平衡条件及圣维南原理有:

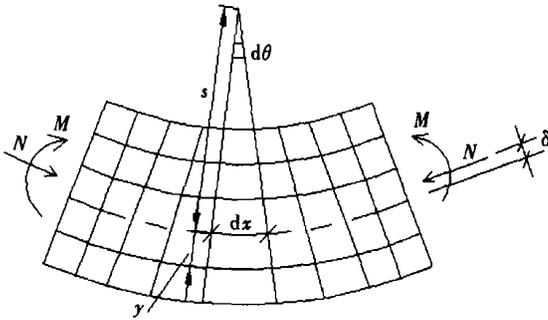


图 5 弯压变形模型

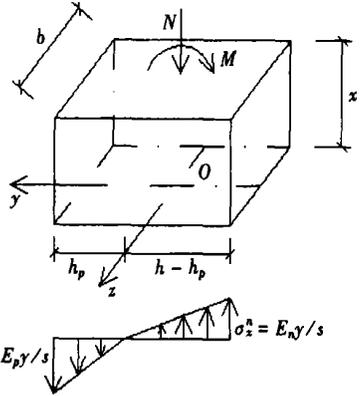


图 6 微元体隔离图

$$\int_{h_p-h}^0 E_n \frac{y}{s} b dy + \int_0^{h_p} E_p \frac{y}{s} b dy + N = 0, \tag{b}$$

$$\int_{h_p-h}^0 E_n \frac{y}{s} y b dy + \int_0^{h_p} E_p \frac{y}{s} y b dy - M = 0 \tag{c}$$

对上两式积分, 并化简得:

$$2N(E_n - E_p) h_p^3 + 3[M(E_n - E_p) - 2NE_n h] h_p^2 + 6E_n h(Nh - M) h_p + E_n h^2(3M - 2Nh) = 0 \tag{7}$$

解之(7)式有:

$$h_{p(x)} = -\frac{B}{3A} + \frac{(1 - i\sqrt{3})J}{3 \times 2^{2/3} \times A \times \sqrt[3]{F + \sqrt{4J^3 + F^2}}} + \frac{(1 + i\sqrt{3}) \sqrt[3]{F + \sqrt{4J^3 + F^2}}}{6 \times 2^{1/3} \times A}, \tag{8}$$

其中: $A = 2N(E_n - E_p)$, $B = 3[M(E_n - E_p) - 2NE_n h]$,

$$C = 6E_n h(Nh - M), D = E_n h^2(3M - 2Nh),$$

$$J = -B^2 + 3AC, F = -2B^2 + 9ABC - 27A^2 D.$$

(7)及(8)式即为不同模量理论弯压柱的受拉区高度计算公式. 令 $E_p = E_n = E, N = 0$, 由(7)式可得 $h_p = h/2$ 公式退回到经典力学同模量中性轴公式.

3.2.2 正应力公式

由于整个推导过程中性轴与坐标轴重合, 即 V_m 代表纯弯下截面坐标原点至拉区边缘之距, 由于轴力 N 的加入, 中性轴(坐标轴)又向拉区移动了一长度 δ , 即 M, N 共同作用下后受拉区高度 $h_p = V_m - \delta$, 因此坐标轴(中性轴)中已反映了 N 对应力的作用. 由此分析可得以下结论: M, N 作用下的正应力计算公式可沿用纯弯曲的计算公式, 两者形式一致, 不同之处仅在于坐标值 y 的不同. 即由(4)有:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_x^c &= \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_n} y', & \alpha_x^t &= \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p} y'. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

上式(9)即为不同模量理论弯压柱的正应力计算公式, 其中 y' 已计入了 M 及 N 对应力的共同响应.

3.3 弯压柱计入重力作用

对任一截面以上, 重力 $G = bhx\gamma$ (γ 为柱材料的容重)•

在 M, N, G 共同作用下, 同 3.2 推导可得:

$$h_{p(x)} = -\frac{B}{3A} + \frac{(1-i\sqrt{3})I}{3 \cdot 2^{2/3} \cdot A \cdot \sqrt[3]{Q + \sqrt{4J^3 + Q^2}}} + \frac{(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{Q + \sqrt{4J^3 + Q^2}}}{6 \cdot 2^{1/3} \cdot A}, \quad (10)$$

其中 $A = 2(E_n - E_p)(N + bhx)$, $B = 3M(E_n - E_p) - 6E_n h(N + bhx)$,
 $C = 6E_n h(Nh + bh^2x - M)$, $D = E_n h^2[3M - 2h(N + bhx)]$,
 $J = -B^2 + 3AC$, $Q = -2B^2 + 9ABC - 27A^2D$,

上式即为不同模量理论弯压柱同时计入重力作用下的中性轴受拉区高度计算公式•

从(10)式可看出, 受拉区高为 x 的函数(沿柱高而变化), 与本文所假设的模型坐标一致•

3.4 位移计算公式:

由几何方程及物理方程可得:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{cases} \quad (d)$$

以(9)式及 $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ 代入(d) 式(并令 $y' = y$) 可得:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{3\mu M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (e)$$

对(e) 中的前两式积分得:

$$u = \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} xy + f_1(y), \quad v = -\frac{3\mu M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{2bh^3 E_p E_n} y^2 + f_2(x) \quad (f)$$

对(f) 式求微分后代入(e) 的第三式有:

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = \frac{df_2(x)}{dx} + \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} x,$$

方程两边分别为 y 及 x 的函数, 只有一种可能, 两边同一常数 c , 即有:

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = c, \quad \frac{df_2(x)}{dx} + \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} x = c \cdot$$

积分上式:

$$f_1(y) = -cy + a, \quad f_2(x) = -\frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{2bh^3 E_p E_n} x^2 + cx + b,$$

代入(f)

$$\begin{cases} u = \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} xy - cy + a, \\ v = -\frac{3\mu M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} y^2 - \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} x^2 + cx + b \end{cases} \quad (g)$$

由柱固端的边值:

$$u \Big|_{x=l}^{y=0} = 0, \quad v \Big|_{x=l}^{y=0} = 0, \quad \theta = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=l}^{y=0} = 0$$

可解之系数为:

$$a = 0, b = -\frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{2bh^3 E_p E_n} l^2, c = \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} l.$$

代入(g)式得位移表达式:

$$\begin{cases} u = \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} xy - \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2 l}{bh^3 E_p E_n} y = \\ \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} (x - l) y, \\ v = -\frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{2bh^3 E_p E_n} y^2 - \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{2bh^3 E_p E_n} x^2 + \\ \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} lx - \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{2bh^3 E_p E_n} l^2 = \\ -\frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{2bh^3 E_p E_n} [(l - x)^2 + ly^2], \end{cases} \quad (11)$$

(11)式即为不同模量理论弯压柱的位移计算公式。

4 算例及结果分析

4.1 实例计算

模型如图 2, 柱高 $H = 4.5 \text{ m}$, $b \times h = 0.4 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$, $N = 210 \text{ kN}$, $M = 264 \text{ kNm}$, 柱材料 $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$, $E_n = 2.8 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, 取 $E_p/E_n = 2.0, 1.6, 1.3, 1.0, 1/1.3, 1/1.6, 1/2.0$ 。

用经典力学相同模量理论, 本论文推求的不同模量理论, 及有限元数值解法分别计算。下表中列出了三种方法计算所得的部分结果。

表 1 不同模量弯压柱各截面中性轴、应力、位移值(解析解)

弹性模量 $E / (\text{kN/m}^2)$	距上缘之距 x / m	受拉区高度 h_p / m	$\sigma_{x\max} / (\text{kN/m}^2)$	$\sigma_{x\max}^n / (\text{kN/m}^2)$	$u_{\text{左}} / \text{m}$	$u_{\text{右}} / \text{m}$
$E = E_n = E_p$	0.0	0.276	10 120	- 11 880	- 1.626 E- 3	1.909 E- 3
	3.0	0.274	10 046	- 11 953.33	- 0.538 E- 3	0.640 E- 3
$E_p = E_n/1.3$	0.0	0.293	9 455.10	- 12 901.99	- 1.979 E- 3	2.074 E- 3
	3.0	0.290	9 358.29	- 13 028.07	- 0.653 E- 3	0.698 E- 3
$E_p = E_n/1.6$	0.0	0.309	9 081.27	- 13 683.17	- 2.335 E- 3	2.199 E- 3
	3.0	0.306	8 993.10	- 13 824.69	- 0.771 E- 3	0.741 E- 3
$E_p = E_n/2.0$	0.0	0.325	8 681.81	- 14 692.29	- 2.791 E- 3	2.361 E- 3
	3.0	0.322	8 601.67	- 14 852.57	- 0.922 E- 3	0.796 E- 3

表 2 经典力学相同模量理论截面中性轴、应力、位移值(解析解)

弹性模量 $E / (\text{kN/m}^2)$	距上缘之距 x / m	受拉区高度 h_p / m	$\sigma_{x\max} / (\text{kN/m}^2)$	$\sigma_{x\max}^n / (\text{kN/m}^2)$	$u_{\text{左}} / \text{m}$	$u_{\text{右}} / \text{m}$
$E = E_n = E_p$	0.0	0.276	10 125	- 11 875	- 1.627 E- 3	1.908 E- 3
	3.0	0.274	10 050	- 11 950	- 0.538 E- 3	0.640 E- 3

表 3 不同模量弯压柱截面中性轴、应力、位移值(有限元数值解)

弹性模量 $E / (\text{kN/m}^2)$	距上缘之距 x / m	受拉区高度 h_p / m	$\sigma_{x\text{max}}^e / (\text{kN/m}^2)$	$\sigma_{x\text{max}}^n / (\text{kN/m}^2)$	$u_{\text{左}} / \text{m}$	$u_{\text{右}} / \text{m}$
$E = E_n = E_p$	3.0	0.273	9 933.4	- 11 826.25	- 0.532 E- 3	0.634 E- 3
$E_p = E_n/1.3$	3.0	0.289	9 245.32	- 12 874.63	- 0.646 E- 3	0.691 E- 3
$E_p = E_n/1.6$	3.0	0.305	8 890.06	- 13 762.33	- 0.764 E- 3	0.735 E- 3
$E_p = E_n/2.0$	3.0	0.321	8 497.95	- 14 675.08	- 0.911 E- 3	0.781 E- 3

4.2 结果分析

4.2.1 三种方法的误差分析

用本文所推求的不同模量理论公式计算相同模量问题,与经典力学的相同模量解析解相比,两者之间的误差为(0.00~ 0.07)%,不同模量解析解计算结果可退回到经典力学相同模量理论解析解计算结果。

不同模量解析解计算结果,与不同模量有限数值解两者最大误差为 1.22%,该误差源于有限元数值计算中网格的划分、迭代以及终端值产生的诸多综合因素的误差。

4.2.2 不同模量与相同模量的差异

当材料的拉压弹性模量改变时,柱的中性轴呈现有规律的变化,见图 7,随着 E_p 的增加,受拉区高度减少,反之则增加。

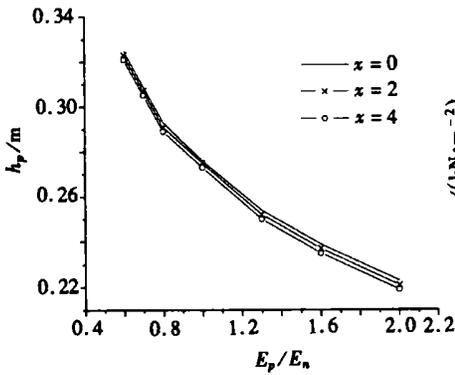


图 7 中性轴随 E_p/E_n 的变化

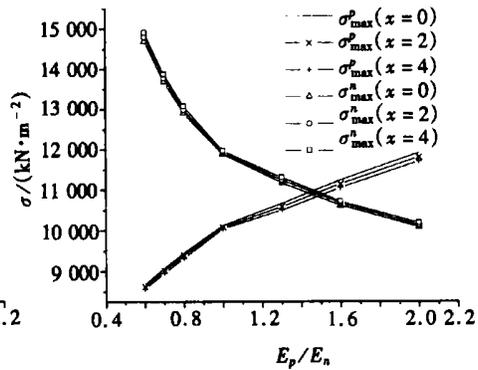


图 8 最大正应力随 E_p/E_n 的变化

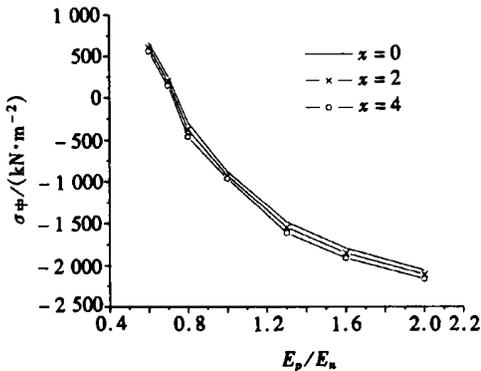


图 9 截面中点正应力随 E_p/E_n 的变化

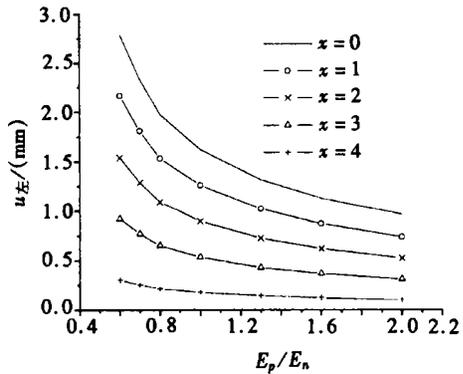


图 10 柱左边缘最大位移随 E_p/E_n 的变化

柱的正应力随着拉压模量比值的改变而变化,即 σ_x^e 随 E_p/E_n 减小而减小, σ_x^n 随 E_p/E_n 的

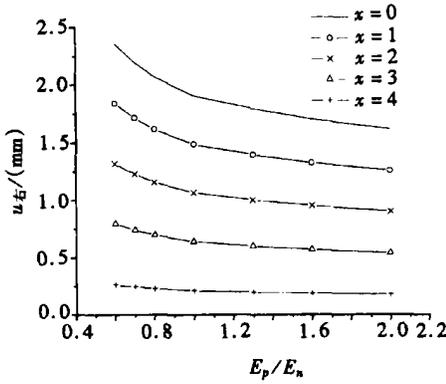


图 11 柱右边缘最大位移随 E_p/E_n 的变化

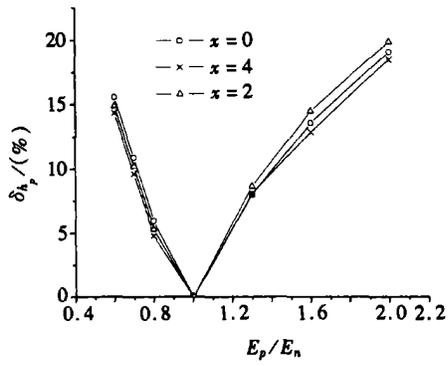


图 12 不同模量与同模量两种方法计算中性轴误差随 E_p/E_n 的变化

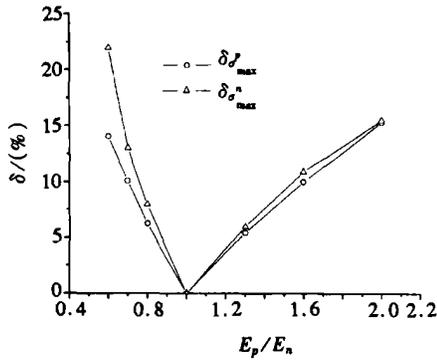


图 13 不同模量与同模量两种方法计算最大正应力误差随 E_p/E_n 的变化

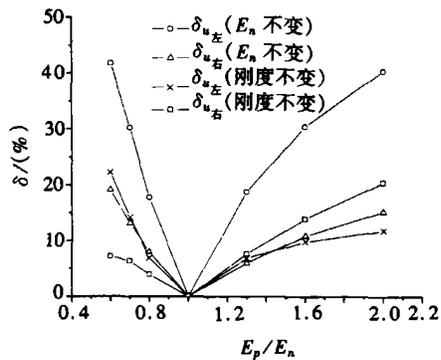


图 14 不同模量与同模量两种方法计算最大位移误差随 E_p/E_n 的变化

减小而增大, 见图 8, 这一结果完全吻合刚度调整内力的规律。

在经典力学中, 材料弹性模量 E 的不同对应力不产生影响, 但位移随 E 的增大而减小。对不同模量的结构, 位移不但随截面平均模量变化, 而且反映在不同的拉压点, 其位移的增减不同, 见图 10 及图 11。由于 $u_{左}$ 位于拉区, $u_{右}$ 位于压区, 则当 $E_p/E_n < 1$, $u_{左} - u_{右} = \varepsilon > 0$, 且随着 E_p/E_n 的减小, E_p 减小, 则 ε 随之增大。

在 $x = 0$ 的自由端, 位移随 E_p/E_n 的变化敏感, 曲线斜率大, 到 $x = 4$ 近固端, 位移随 E_p/E_n 的变化趋于平缓, 说明材料的不同模量对位移的影响与结构的约束有关。

当截面平均刚度 (E) 不变, 不同模量与经典力学同模量位移计算误差最大达 22%, 但当 $E_n = 2.8$ 不变, 仅改变 E_p , 不同模量与经典同模量 ($E = 2.8$), 两种方法计算位移最大误差达 42%。后者由于截面的总刚度已改变使两种计算方法所得误差大于前者。

综上所述, 当计入不同模量, 其加大压模量将减少拉应力, 同时也提高压应力, 且随着不同模量比值的增大, 差值增大。本文中仅列出了 $E_p/E_n = 1/2 \sim 2.0$ 以内的应力值, 其两种方法计算的结果误差已达 20%, (见图 13), 当 E_p/E_n 再增加, 两种方法计算结果将相差更甚。因此笔者认为, 这一结论应计入材料具有不同模量的结构计算中, 以修正经典力学中应力计算公式与弹性模量无关的误差。并且可利用不同模量的材料来调整实际结构的受力, 比如对某些拉应力较大的结构, 可提高材料的 E_n 来减少不利的最大拉应力, 以此达到优化结构的受力状态。

[参 考 文 献]

- [1] Medri G. A nonlinear elastic model for isotropic materials with different behavior in tension and compression[J]. Transactions of the ASME, 1982, **26**(104): 26—28.
- [2] 郭瑞锋, 张允真. 不同模量弹性理论[M]. 郭瑞锋, 张允真 译. 北京: 中国铁道出版社, 1986.
- [3] Srinivasan R S, Ramachandra L S. Large deflection analysis of bimodulus annular and circular plates using finite elements[J]. Computers & Structures, 1989, **31**(5): 681—691.
- [4] Srinivasan R S, Ramachandra L S. Axisymmetric buckling and post_buckling of bimodulus annular plates[J]. Eng Struct, 1989, **11**(7): 195—198.
- [5] 张允真, 王志锋. 不同模量弹性力学问题的有限元法[J], 计算结构力学及其应用, 1989, **6**(1): 236—246.
- [6] Papazoglou J L, Tsouvalis N G. Mechanical behaviour of bimodulus laminated plates[J]. Composite Structures, 1991, **17**(1): 1—22.
- [7] 杨海天, 郭瑞锋, 杨克检, 等. 初应力法解拉压双弹性模量问题[J]. 大连理工大学学报, 1992, **32**(1): 35—39.
- [8] TSENG Yi_ping, LEE Cheng_tao. Bending analysis of bimodular laminates using a higher_order finite strip method[J]. Composite Structures, 1995, **30**(4): 341—350.
- [9] YE Zhi_ming. A new finite element formulation for planar elastic deformation[J]. Int J Numerical Methods in Engineering, 1997, **14**(40): 2579—2592.
- [10] TESENG Yi_ping, JIANG Yu_ching. Stress analysis of bimodular laminates using hybrid stress plate elements[J]. International Journal Solids Structures, 1998, **35**(17): 2025—2028.
- [11] 刘相斌, 张允真. 拉压不同模量有限元法剪切弹性模量及加速收敛[J]. 大连理工大学学报, 2000, **40**(5): 527—530.
- [12] YE Zhi_ming, YU Huang_ran, YAO Wen_juan. A finite element formulation for different Young's modulus when tension and compression loading[A]. In: Jin Ho Kwak Ed. Com 2Mac Conference on Computational Mathematics [C]. South Korea: Pohang University of Science and Technology, 2001, 2—5.
- [13] Raffaele Zinno, Fabrizio Greco. Damage evolution in bimodular laminated composites[J]. Composite Structures, 2001, **53**(4): 381—402.

Analytical Solution of Bending_Compression Column Using Different Tension_Compression Modulus

YAO Wen_juan, YE Zhi_ming

(1. Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;
Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: Based on elastic theory of different tension_compression modulus, the analytical solution was presented for bending_compression column subject to combined loadings by the flowing coordinate system and phased integration method. The formulations for the neutral axis, stress, strain and displacement were developed, the finite element program was compiled for calculation, and the comparison between the result of finite element and analytical solution were given too. Finally, the results of different modulus and the same modulus are compared and analyzed, the difference of the two theories in result is obtained, and the reasonable suggestion for the calculation of this structure is proposed.

Key words: different modulus; analytical solution; neutral axis; bending_compression column