应用数学和力学，第8卷第4期（1987年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

弹性地基板由运动载荷引起的动力反应*

成 祥 生

（同济大学，1986年2月18日收到）

摘　要

本文用变分法讨论在弹性地基上的薄板由运动载荷所引起的动力反应．文中计及运动载荷的质量，讨论了关于强迫振动，挠度的影响面及内力的影响面，共振条件及临界速度等问题．

一、引　言

在梁上由计及质量的运动荷重作用而引起的动力学问题曾由R. Willis等人[1~8]研究过，其中[6～8]使用了小参数法，在板与壳上有运动载荷作用而引起的动力学问题曾由 M. Φ. Диментберг 等人[9~12]讨论过，不过他们都将作用在板或壳上的运动载荷当作运动的常值力，并未计及运动载荷的质量，文献[13]讨论了弹性扁壳由移动质量引起的强迫振动的近似解。考虑到运动载荷的质量，对研究结构的强迫振动，共振条件和临界速度是必须的，也是非常重要的。

本文将应用变分法对于在弹性地基上的薄板由运动载荷引起的动力反应进行讨论。

二、基 本 方 程

我们现在研究位于弹性地基上的正交各向异性弹性薄板处于运动状态，其基本方程的变分写法[16,22]如下

$$\iint\left\{D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{\gamma h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+K_1w-K_2\nabla^2 w+K_3\frac{\partial w}{\partial t}\right.$$
$$\left.-Z\right\}\delta w dxdy=0 \tag{2.1}$$

这是以薄板的横向挠度 w 为未知函数的一个变分方程。其中坐标轴 xOy 与板的中面重合，挠度w及z轴以向下为正。Z为横向分布载荷的集度$Z=Z(x,y,t)$，D_1和D_2为薄板在弹性主方向的弯曲刚度，D_3为折算刚度，并且有[22]

* 叶开沅推荐。

$$D_1=\frac{E_1h^3}{12(1-\mu_1\mu_2)},\quad D_2=\frac{E_2h^3}{12(1-\mu_1\mu_2)},\quad D_3=D_1\mu_2+2D_k$$

其中D_k是薄板在弹性主方向的扭转刚度，h为板厚，其中E_1和E_2分别为薄板材料沿弹性主方向的拉压弹性模量，μ_1和μ_2是横向收缩系数，并且有[22]

$$D_k=\frac{1}{12}Gh^3,\quad \mu_2E_1=\mu_1E_2,\quad D_1\mu_2=D_2\mu_1$$

G为材料的剪切弹性模量，t为时间，γ和g分别为薄板材料的比重和重力加速度。K_1和K_2为弹性半空间的弹性地基系数[14]，K_3为一常系数，δw为薄板横向挠度的变分。

设薄板为等厚度，矩形，其边界为：$x=0$，$x=a$；$y=0$，$y=b$。(2.1) 式的积分遍及薄板中面的全域，即：$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$。

此外，所有弯曲内力的公式可用挠度函数表示[22]如下

$$\left.\begin{aligned}&M_x=-D_1\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\mu_2\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right),\quad M_y=-D_2\left(\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\mu_1\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)\\&M_{xy}=-2D_k\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y};\quad V_x=-D_1\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\left(2\frac{D_3}{D_1}-\mu_2\right)\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right]\\&V_y=-D_2\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+2\left(\frac{D_3}{D_2}-\frac{D_1}{D_2}\mu_2\right)\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right]\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

以上M_x和M_y为弯矩，M_{xy}为扭矩，而V_x和V_y为综合横向剪力。

因为当计及有质量的运动载荷在弹性地基板上运动时，其载荷与挠度之间的关系将是非线性的，因此，我们目前的问题是一个非线性问题。我们试选下面形式的函数以求得上列变分方程的解答[15]。

$$w(x,y,t)=A_{mn}(t)X_m(x)Y_n(y),\quad Z(x,y,t)=B_{mn}(t)X_m(x)Y_n(y)\tag{2.3}$$

式中$X_m(x)$和$Y_n(y)$为梁的特征函数，作为薄板的振形函数，众所周知，它们具有正交性。我们应事先选择它们，使其分别满足矩形板沿x和y方向的边界条件。$A_{mn}(t)$ 及 $B_{mn}(t)$ 分别为挠度函数w及载荷集度Z按特征函数展开式的系数。相应于挠度函数w的变分是

$$\delta w=X_m(x)Y_n(y)\delta A_{mn}\tag{2.4}$$

将(2.3)与(2.4)代入(2.1)，并注意到系数变分δA_{mn}是任意的和独立的，以及特征函数或振形函数的正交性，于是可得如下的微分方程

$$\ddot{A}_{mn}(t)+2\alpha\dot{A}_{mn}(t)+\omega_{mn}^2A_{mn}(t)=\frac{g}{\gamma h}B_{mn}(t)\tag{2.5}$$

其中

$$2\alpha=\frac{g}{\gamma h}K_3,\quad \omega_{mn}^2=\frac{g}{\gamma h}\frac{I_1}{I_2}\tag{2.6}$$

$$\left.\begin{aligned}I_1=\iint\Big\{&D_1\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left[X_m(x)Y_n(y)\right]+2D_3\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\left[X_m(x)Y_n(y)\right]+D_2\frac{\partial^4}{\partial y^4}\\&\cdot\left[X_m(x)Y_n(y)\right]+K_1X_m(x)Y_n(y)-K_2\nabla^2\left[X_m(x)Y_n(y)\right]\Big\}X_m(x)Y_n(y)dxdy\\I_2=\iint &X_m^2(x)Y_n^2(y)dxdy\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

α称为阻尼系数，ω_{mn}为薄板在无阻尼情况下自由振动的固有频率。方程(2.5)为一关于系数A_{mn}的线性非齐次二阶常微分方程。

当$\omega_{mn}^2>\alpha^2$时，方程(2.6)的解为

$$A_{mn}(t)=e^{-\alpha t}(a_{mn}\sin\Omega_{mn}t+b_{mn}\cos\Omega_{mn}t)$$

$$+\frac{g}{\gamma h\Omega_{mn}}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}B_{mn}(\tau)\sin\Omega_{mn}(t-\tau)d\tau \qquad (2.8)$$

式中 $\Omega_{mn}=\sqrt{\omega_{mn}^2-\alpha^2}$ 称为薄板有阻尼的自由振动的固有频率。(2.8)右边第一项表示薄板的自由振动，而第二项表示薄板的强迫振动。于是由(2.3)可得挠度函数w的解为

$$w(x,y,t)=e^{-\alpha t}(a_{mn}\sin\Omega_{mn}t+b_{mn}\cos\Omega_{mn}t)X_m(x)Y_n(y)$$

$$+\frac{g}{\gamma h\Omega_{mn}}X_m(x)Y_n(y)\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}B_{mn}(\tau)\sin\Omega_{mn}(t-\tau)d\tau \qquad (2.9)$$

其中a_{mn}和b_{mn}都是常数，决定于运动的初始条件，如果不计阻尼力，则$\alpha=0$；如果不存在初始运动，则$a_{mn}=b_{mn}=0$，$B_{mn}(\tau)$决定于载荷的特性，今分析如下。

三、运动载荷的分析

如果在薄板上某一点$M(\xi,\eta)$作用有运动的集中载荷P，其质量应当为P/g，现在要顾及到运动载荷的质量对薄板横向振动的影响，故必须考虑薄板上的载荷在横向的惯性力$-(P/g)(d^2w/dt^2)$，于是作用在薄板上$M(\xi,\eta)$点的横向总压力为

$$P^*=P-\frac{P}{g}\left(\frac{d^2w}{dt^2}\right)_{\substack{x=\xi\\y=\eta}}=P\left[1-\frac{1}{g}\left(\frac{d^2w}{dt^2}\right)_{\substack{x=\xi\\y=\eta}}\right] \qquad (3.1)$$

在(2.1)和(2.3)式中的横向载荷Z可看成如下的分布载荷的集度

$$\left.\begin{aligned} &Z=\frac{P^*}{\Delta x\Delta y}, \quad 当\begin{cases}\xi\leqslant x\leqslant\xi+\Delta x\\ \eta\leqslant y\leqslant\eta+\Delta y\end{cases}\\ &Z=0, \qquad 在其它各处\end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

将(3.2)按(2.3)展开，得

$$B_{mn}(t)=\iint Z(x,y,t)X_m(x)Y_n(y)dxdy\cdot\left[\iint X_m^2(x)Y_n^2(y)dxdy\right]^{-1} \qquad (3.3)$$

上式中的积分遍及薄板中面的全域。

如假设载荷以均匀速度v在板上运动，它沿x和y轴方向的分速度分别为

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\text{const}, \quad v_y=\frac{dy}{dt}=\text{const} \qquad (3.4)$$

我们将(3.1)中的挠度函数w看成是如下的函数

$$w=w(x(t),\ y(t)) \qquad (3.5)$$

若注意到公式(3.4)，则有

$$\frac{dw}{dt}=v_x\frac{dw}{dx}+v_y\frac{dw}{dy}, \quad \frac{d^2w}{dt^2}=v_x^2\frac{d^2w}{dx^2}+v_y^2\frac{d^2w}{dy^2} \qquad (3.6)$$

将(3.6)代入(3.1)便得到作用在薄板上$M(\xi,\eta)$点的横向总压力为

$$P^*=P\left[1-\frac{1}{g}\left(v_x^2\frac{d^2w}{dx^2}+v_y^2\frac{d^2w}{dy^2}\right)_{\substack{x=\xi\\y=\eta}}\right] \qquad (3.7)$$

于是由(3.2)、(3.3)、(3.7)便可求得$B_{mn}(t)$

$$B_{mn}(t)=\frac{P\left[1-\frac{1}{g}\left(v_x^2\frac{d^2w}{dx^2}+v_y^2\frac{d^2w}{dy^2}\right)_{\substack{x=\xi\\y=\eta}}\right]X_m(\xi)Y_n(\eta)}{\iint X_m^2(x)Y_n^2(y)dxdy}\tag{3.8}$$

由(3.2)、(3.3)、(3.8)可知，除了在板上$M(\xi,\eta)$点之外，$B_{mn}(t)$处处为零。

四、挠度的影响面和内力的影响面

如果不考虑薄板的自由振动，只究研薄板的强迫振动，则将(3.3)代入(2.9)中，并设$\xi=v_xt$，$\eta=v_yt$，则得到薄板动力挠度的一般式如下

$$w(x,y,t)=\frac{Pg}{\gamma h}\frac{X_m(x)Y_n(y)}{\Omega_{mn}\iint X_m^2(x)Y_n^2(y)dxdy}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\cdot\left[1-\frac{1}{g}\left(v_x^2\frac{d^2w}{dx^2}+v_y^2\frac{d^2w}{dy^2}\right)_{\substack{x=v_x\tau\\y=v_y\tau}}\right]\cdot X_m(v_x\tau)Y_n(v_y\tau)\cdot\sin\Omega_{mn}(t-\tau)d\tau\tag{4.1}$$

如果在上式中，令$P=1$，则得到在等速运动的载荷下薄板挠度影响面的公式。再将(4.1)微分后代入弯曲内力的公式(2.2)，即可得到薄板内力的影响面的公式。如果设载荷在板上从$x=0$出发，以等速v_x只平行于x轴沿$y=\eta$直线运动，可在上式(4.1)中令$x=v_xt$, $y=\eta$, $v_y=0$，$P=1$可得到相应于上述情况的挠度影响面的公式如下

$$w(x,y,t)=\frac{g}{\gamma h}\frac{X_m(x)Y_n(y)}{\Omega_{mn}\iint X_m^2(x)Y_n^2(y)dxdy}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\cdot\left[1-\frac{1}{g}v_x^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{\substack{x=v_x\tau\\y=\eta}}\right]\cdot X_m(v_x\tau)Y_n(\eta)\sin\Omega_{mn}(t-\tau)d\tau\tag{4.2}$$

同样，如果假定载荷在板上从$y=0$出发，以等速v_y只平行于y轴沿$x=\xi$直线运动，可在(4.1)式中令$x=\xi$，$y=v_yt$，$v_x=0$，$P=1$可得到对应于这种情况的挠度影响面的公式如下

$$w(x,y,t)=\frac{g}{\gamma h}\frac{X_m(x)Y_n(y)}{\Omega_{mn}\iint X_m^2(x)Y_n^2(y)dxdy}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\cdot\left[1-\frac{1}{g}v_y^2\left(\frac{d^2w}{dy^2}\right)_{\substack{x=\xi\\y=v_y\tau}}\right]\cdot X_m(\xi)Y_n(v_y\tau)\sin\Omega_{mn}(t-\tau)d\tau\tag{4.3}$$

对所得到的影响面的公式(4.1)、(4.2)、(4.3)对各种矩形板和任何的边界条件都适用的，因此，它们具有一般性。而其中最主要的实质是根据不同的板的边界条件来选择式中的振型函数。

以上得到的有关影响面的公式，只有当运动载荷未离开板面时才适用。如果运动载荷离开薄板，则薄板将从强迫振动转化为自由振动，这时可利用(2.9)的前面一项，它可写成

$$w(x,y,t)=\exp[-\alpha(t-t_c)][a_{mn}\sin\Omega_{mn}(t-t_c)+b_{mn}\cos\Omega_{mn}(t-t_c)]X_m(x)Y_n(y)\tag{4.4}$$

常数a_{mn}和b_{mn}必须根据载荷离开薄板的瞬间的有关的量作为初始条件来确定，也就是须要利用$w(x,y,t_c)$和$(\partial w/\partial t)_{t=t_c}$来确定。其中$t_c=a/v_x$或$t_c=b/v_y$，它们分别是运动载荷在板上沿$x$或$y$轴方向行完的时间。

目前我们虽然得到了动力挠度的表达式(4.1)以及影响面的公式(4.2)和(4.3)，然而在所有各式中的积分号下尚包含挠度w，因此问题的性质是非线性的。若按照 Willis 的方法[1,17,18]：在(4.1)、(4.2)、(4.3)中的挠度函数w用一集中力作用于板上$M(\xi,\eta)$点的静力

挠度来表示，则上述问题将得到简化，从而得到本问题的近似解。

五、实 际 应 用

设有一位于弹性地基上的正交各向异性矩形板，周边简支，a和b分别为薄板沿x轴和y轴方向的尺寸。K_1和K_2为弹性半空间的弹性地基系数。设薄板为等厚度，其厚度为h。

今选择振形函数为

$$X_m(x)=\sin\lambda_m x,\ \ Y_n(y)=\sin\mu_n y \tag{5.1}$$

其中

$$\lambda_m=\frac{m\pi}{a},\ \ \mu_n=\frac{n\pi}{b}$$

于是可使(2.3)式的挠度函数w满足板的边界条件，即

$$\left.\begin{aligned}&\text{在}x=0\text{和}x=a\text{边上：}\qquad w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\\&\text{在}y=0\text{和}y=b\text{边上：}\qquad w=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

我们已知一集中力P作用于周边简支的矩形的弹性地基板的$M(\xi,\eta)$点，它在任一点的静力挠度为

$$w(x,y)=\frac{4Pg}{ab\gamma h}\sum_m\sum_n\frac{1}{\omega_{mn}^2}\sin\lambda_m\xi\cdot\sin\mu_n\eta\cdot\sin\lambda_m x\cdot\sin\mu_n y \tag{5.3}$$

$$(m,\ n=1,2,3,\cdots,\infty)$$

上式总和号下的ω_{mn}^2可由(2.6)，(2.7)式计算得到，其值为

$$\omega_{mn}^2=\frac{g}{\gamma h}[D_1\lambda_m^4+2D_3\lambda_m^2\mu_n^2+D_2\mu_n^4+K_1+K_2(\lambda_m^2+\mu_n^2)] \tag{5.4}$$

$$(m,\ n=1,2,3,\cdots,\infty)$$

若将(5.3)的w代入(4.1)，则可得到本问题的近似解，于是动力挠度的一般式可表示如下

$$\begin{aligned}w(x,y,t)=&\frac{4Pg}{ab\gamma h\Omega_{mn}}\left\{\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\cdot\left[1+\frac{4P}{ab\gamma h}\sum_m\sum_n\frac{1}{\omega_{mn}^2}(\lambda_m^2v_x^2+\mu_n^2v_y^2)\right.\right.\\&\left.\left.\cdot\sin^2\lambda_m v_x\tau\cdot\sin^2\mu_n v_y\tau\right]\sin\lambda_m v_x\tau\cdot\sin\mu_n v_y\tau\cdot\sin\Omega_{mn}(t-\tau)d\tau\right\}\\&\cdot\sin\lambda_m x\cdot\sin\mu_n y\end{aligned} \tag{5.5}$$

在上式中，如令$P=1$，即得薄板受运动载荷作用下的挠度影响面的最一般的公式。

在上式中，如果不计阻力，于是$\alpha=0$，由此$\Omega_{mn}=\omega_{mn}$。下面分两种情况来讨论。

（1） 若令$v_y=0$，$v_y\tau=\eta$，并将上式进行积分，就可得到当运动载荷在板上从$x=0$出发，只平行于x轴，沿$y=\eta$直线以等速v_x运动时板的动力挠度的公式

$$\begin{aligned}w=&\frac{4Pg}{ab\gamma h}\frac{\sin\mu_n\eta}{\lambda_m^2v_x^2-\omega_{mn}^2}\left(\frac{\lambda_m v_x}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t-\sin\lambda_m v_x t\right)\sin\lambda_m x\cdot\sin\mu_n y\\&+\left(\frac{4P}{ab}\right)^2\frac{g}{(\gamma h)^2}\left\{\sum_m\sum_n\frac{(\lambda_m v_x)^2}{\omega_{mn}^3}\sin^3\mu_n\eta\left[-\frac{3}{4}\frac{\omega_{mn}\sin\lambda_m v_x t}{\lambda_m^2v_x^2-\omega_{mn}^2}\right.\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\omega_{mn}\sin 3\lambda_m v_x t}{9\lambda_m^2 v_x^2-\omega_{mn}^2}+\frac{6\lambda_m^3 v_x^3 \sin\omega_{mn} t}{(\lambda_m^2 v_x^2-\omega_{mn}^2)(9\lambda_m^2 v_x^2-\omega_{mn}^2)}\Bigg]\Bigg\}\sin\lambda_m x\cdot\sin\mu_n y \tag{5.6}$$

（2） 同样，由(5.5)可得到运动载荷在板上只平行于y轴，沿$x=\xi$直线以等速v_y运动时的动力挠度的公式

$$w=\frac{4Pg}{ab\gamma h}\frac{\sin\lambda_m\xi}{\mu_n^2 v_y^2-\omega_{mn}^2}\left(\frac{\mu_n v_y}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t-\sin\mu_n v_y t\right)\sin\lambda_m x\cdot\sin\mu_n y$$

$$+\left(\frac{4P}{ab}\right)^2\frac{g}{(\gamma h)^2}\left\{\sum_m\sum_n\frac{(\mu_n v_y)^2}{\omega_{mn}^3}\sin^3\lambda_m\xi\left[-\frac{3}{4}\frac{\omega_{mn}\sin\mu_n v_y t}{\mu_n^2 v_y^2-\omega_{mn}^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}\frac{\omega_{mn}\sin 3\mu_n v_y t}{9\mu_n^2 v_y^2-\omega_{mn}^2}+\frac{6\mu_n^3 v_y^3\sin\omega_{mn}t}{(\mu_n^2 v_y^2-\omega_{mn}^2)(9\mu_n^2 v_y^2-\omega_{mn}^2)}\right]\right\}\sin\lambda_m x\cdot\sin\mu_n y \tag{5.7}$$

如果在(5.6)和(5.7)式中，令$P=1$，可得以上两种情况下挠度影响面的公式。将所得的公式(5.6)和(5.7)微分后并代入弯曲内力的公式(2.2)，即可得到该实际问题的动力内力的公式，如果在所得的动力内力的公式中，令$P=1$，即可得到内力影响面的公式。

必须指出，在所得的公式(5.6)和(5.7)中，动力挠度和载荷P不是线性的关系，它们和载荷P的平方有关。从上两式中可看出，第一项表示线性项，而第二项是非线性项，这是由于考虑运动载荷的质量而引起的。

由上面(5.6)及(5.7)两式还可看出，当$v_x=\omega_{mn}/\lambda_m$及$v_x=\omega_{mn}/3\lambda_m$或当$v_y=\omega_{mn}/\mu_n$及$v_y=\omega_{mn}/3\mu_n$时，该两式的分母均为零，于是挠度$w$将无限增大。自然，此时弯曲内力亦同时无限增大，因此，这时薄板将发生共振。共振的条件就是

$$\lambda_m^2 v_x^2-\omega_{mn}^2=0 \quad 及 \quad 9\lambda_m^2 v_x^2-\omega_{mn}^2=0 \tag{5.8}$$

或

$$\mu_n^2 v_y^2-\omega_{mn}^2=0 \quad 及 \quad 9\mu_n^2 v_y^2-\omega_{mn}^2=0 \tag{5.9}$$

$$(m,n=1,2,3,\cdots)$$

对应于此时的运动载荷的移动速度v_x或v_y就称为临界速度，并用$(v_x)_{cr}$或$(v_y)_{cr}$来表示。由(5.8)并利用(5.4)可得

$$(v_x)_{cr}=\frac{1}{\lambda_m}\sqrt{\frac{g}{\gamma h}}\sqrt{D_1\lambda_m^4+2D_3\lambda_m^2\mu_n^2+D_2\mu_n^4+K_1+K_2(\lambda_m^2+\mu_n^2)} \tag{5.10}$$

及

$$(v_x)_{cr}=\frac{1}{3\lambda_m}\sqrt{\frac{g}{\gamma h}}\sqrt{D_1\lambda_m^4+2D_3\lambda_m^2\mu_n^2+D_2\mu_n^4+K_1+K_2(\lambda_m^2+\mu_n^2)} \tag{5.11}$$

同样，由(5.9)并利用(5.4)可得$(v_y)_{cr}=\omega_{mn}/\mu_n$及$(v_y)_{cr}=\omega_{mn}/3\mu_n$。

如果是各向同性板，则在以上的讨论中，可取

$$D_1=D_2=D_3=D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

于是以上各公式便得到稍为简化的形式，例如(5.10)和(5.11)式可写成

$$(v_x)_{cr}=\frac{1}{\lambda_m}\sqrt{\frac{g}{\gamma h}}\sqrt{D(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2+K_1+K_2(\lambda_m^2+\mu_n^2)} \tag{5.12}$$

及

$$(v_x)_{cr}=\frac{1}{3\lambda_m}\sqrt{\frac{g}{\gamma h}}\sqrt{D(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2+K_1+K_2(\lambda_m^2+\mu_n^2)} \tag{5.13}$$

当不考虑运动载荷的质量时，我们将只得到一组共振条件：$(v_x)_{cr}=\omega_{mn}/\lambda_m$ 或 $(v_y)_{cr}=\omega_{mn}/\mu_n$，而当我们考虑运动载荷的质量时，我们将得到一组更小的临界速度：$(v_x)_{cr}=\omega_{mn}/3\lambda_m$ 或 $(v_y)_{cr}=\omega_{mn}/3\mu_n$。因为在不考虑运动载荷的质量时，在(5.6)和(5.7)中将不出现非线性项，共振的条件只有一组：

$$\lambda_m^2 v_x^2-\omega_{mn}^2=0 \quad 或 \quad \mu_n^2 v_y^2-\omega_{mn}^2=0 \qquad (m,\ n=1,2,3,\cdots) \tag{5.14}$$

若考虑运动载荷的质量时，(5.5)、(5.6)和(5.7)中均增添了附加的非线性项，即含有载荷P的平方项。因此，从这些项就得到了存在于(5.6)和(5.7)分母中的附加的共振条件：

$$9\lambda_m^2 v_x^2-\omega_{mn}^2=0 \quad 或 \quad 9\mu_n^2 v_y^2-\omega_{mn}^2=0 \qquad (m,\ n=1,2,3,\cdots) \tag{5.15}$$

比较(5.14)与(5.15)可看出：从(5.15)得到的临界速度将是从(5.14)得到的临界速度的三分之一，这在实际中是可能发生的，因而是比较重要的。若不考虑运动载荷的质量，那么这个结果是得不到的，因此用(5.15)式就能确定出薄板上有移动载荷作用时，薄板发生共振的最小的临界速度。

六、数 值 算 例

让我们举一个具体的数值例子。设有一矩形混凝土正交各向异性弹性地基板，已知 $E_1=3\times10^6\text{t/m}^2$，$E_2=6\times10^6\text{t/m}^2$，$G=1.47\times10^6\text{t/m}^2$，$\mu_1=0.14$，$\mu_2=0.28$，$a=80\text{m}$，$b=20\text{m}$，$h=0.4\text{m}$，$\gamma=2.5\text{t/m}^3$。经计算后可得 $D_1=133.33\text{t-m}$，$D_2=266.67\text{t-m}$，$D_3=162.77\text{t-m}$，$D_k=62.72\text{t-m}$，取$g=9.81\text{m/sec}^2$，$K_1=3000\text{t/m}^3$，$K_2=500\text{t/m}$。

相应于不同振形的薄板的固有频率ω_{mn}及对应的临界速度$(v_x)_{cr}$，经过计算将结果列于下表中。

表 1

计算结果 / m,n	有弹性地基情形			无弹性地基情形		
	ω_{mn}	$(v_x)_{cr}=\frac{\omega_{mn}}{\lambda_m}$	$(v_x)_{cr}=\frac{\omega_{mn}}{3\lambda_m}$	ω_{mn}	$(v_x)_{cr}=\frac{\omega_{mn}}{\lambda_m}$	$(v_x)_{cr}=\frac{\omega_{mn}}{3\lambda_m}$
	弧度/秒	米/秒	米/秒	弧度/秒	米/秒	米/秒
1,1	171.9285	4378.0441	1459.3480	1.3093	33.3420	11.1140
1,2	173.0486	4406.6358	1468.8795	5.0985	129.8327	43.2776
1,3	177.5891	4522.2585	1507.4195	11.4085	290.4456	96.8152
2,1	171.9930	2189.8785	729.9595	1.4589	18.5750	6.1917
2,2	173.1188	2204.2126	734.7375	5.2417	66.7390	22.2463
2,3	175.1602	2230.2045	743.4015	11.5509	147.0701	49.0234
3,1	172.1122	1460.9297	486.9766	2.2816	19.3665	6.4555
3,2	173.2419	1470.5188	490.1729	5.6899	48.2972	16.0991
3,3	224.3787	1904.5803	634.8601	11.8901	100.9257	33.6419

从表1可看出，在有弹性地基的情形，对应于薄板固有频率ω_{31}时的最小临界速度是486.9766米/秒，数值是比较大的，但这种情况是不大可能发生的。总的说来，计算表明，在$(v_x)_{cr}$的公式(5.10)～(5.13)中，弹性地基系数所占的份量较大，因此，对应于相邻的薄板的不同振形的固有频率及相应的临界速度之间的差值不很显著。

对于无弹性地基的情形，相应于不同振形的薄板的固有频率ω_{mn}及对应的临界速度$(v_x)_{cr}$的计算亦列在同一表中，以便比较。表中对应于固有频率ω_{21}时的最小临界速度是6.1917米/秒，这种情况是很有可能发生的．并且，对应于相邻的薄板的不同振形的固有频率及相应的临界速度之间的差值也较大。

七、结　论

1．文中求出了弹性地基薄板在有质量的运动载荷作用下动力挠度的一般式(4.1)。

2．求出了弹性地基薄板在有质量的运动载荷分别平行于x轴和平行于y轴等速运动时的挠度影响面的公式(4.2)和(4.3)。因此，通过微分也可以得到内力影响面的公式。

3．得到了在弹性地基上周边简支矩形薄板在运动载荷作用下动力挠度的一般式(5.5)和得到了载荷分别沿x轴，y轴方向等速运动时的动力挠度或影响面的公式(5.6)和(5.7)。这些公式是非线性的，它们和载荷P及P^2有关。

4．得到了在弹性地基上周边简支矩形薄板在运动载荷作用下的共振条件(5.8)及(5.9)和得到了临界速度的公式(5.10)～(5.13)。

5．从文中的数值算例可看出，弹性地基系数的数值对计算薄板不同振形的固有频率及相应的临界速度起着决定性的作用，因为这些系数在计算中它们所占的比重较大。因此对应于相邻的薄板的不同振形的固有频率及相应的临界速度之间的差值不很明显，而在没有弹性地基的情况之下，它们之间的差距则较大。

6．由(5.6)或(5.7)得到简支弹性地基板的两组共振条件(5.8)或(5.9)，从而也得到两组临界速度(5.10)及(5.11)，其中有一个是最小。

7．如果移动载荷的质量不考虑时，我们将只得到一组共振条件；而当计入移动载荷的质量时，将得到两组共振条件，从而得到更小的临界速度；前后两种情形的临界速度之比是三比一。

8．只要事先选择合适的振形函数(2.3)使其满足所有的边界条件，即几何的和内力的边界条件，这样，本文的结果对各种边界支承的矩形板都适用。

9．本文所述的方法是一种作了简化的近似解法，但是还不够完善。此外，也可使用其它方法，可能导致研究非线性的参数共振问题，特别是诸如求解麻烦的Mathieu方程[19~21]，或许采用逐次迭代法和小参数法或摄动法[6~8]等。

参 考 文 献

[1] Willis, R., *Appendix to the Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures*, H. M. Stationery Office, London (1849).

[2] Jeffcott, H. H., *Phil. Mag.*, Ser. 7, 8 (1929), 66.

[3] Steuding, H., *Ing.-Arch.*, 5 (1934), 275.

[4] Schallenkamp, A., *Ing.-Arch.*, 8 (1937), 182.

[5] Odman, T. A., *Bull. Swedish Cement and Concrete Research Inst.*, 14 (1948).

[6] 叶开沅，计及行动载荷质量及惯性力影响的列车过桥动力理论（摘要），科学通报，二月号 (1963), 50—52.

[7] Yeh Kai-yuan and Ma Guo-lin, *Scientia Sinica*, A, 8 (1984), 831—846.

[8] 叶开沅、马国琳，行动载荷作用下的连续梁的横向振动问题，应用数学和力学，6, 10 (1985), 873—877.

[9] Диментберг М. Ф., *Инж. Журн.*, 1, 2 (1961), 97—105.

[10] Киселев В. А., *Теория Пластин и Оболочек*, Изд. АН УССР, Киев (1962), 274—279.

[11] 陈靖东、钟灼然，运动载荷引起的扁壳振动，建筑学报，2 (1961), 27—39.

[12] 成祥生，在弹性地基上的正交各向异性扁壳由移动载荷作用而引起的强迫振动，江苏省力学学会论文 (1964).

[13] 成祥生，弹性扁壳由移动质量引起的强迫振动，应用数学和力学，6,3 (1985), 231—238.

[14] Власов В. З. и Н. Н. Леонтьев, *Балки Плиты и Оболочки на Упругом Основании* (1960).

[15] Власов В. З., *Общая Теория Оболочек*, Гостехиздат (1949).

[16] Ониашвили О. Д., *Некоторые Динамические Задачи Теории Оболочек*, АН СССР (1957).

[17] Barlow, P., Treatise on the strength of timber, cast iron and malleable iron, London (1851).

[18] Timoshenko, S., *Vibration Problems in Engineering*, Second Edition (1937).

[19] Болотин В. В., *Труды МИИТ*, 74 (1950), 76 (1952).

[20] Болотин В. В., *Динамическая Устойчивость Упругих Систем* (1956).

[21] Вольмир А. С., *Нелинейная Динамика Пластинок и Оболочек*, Изд. Наука (1972).

[22] Лехницкий С. Г., *Анизотропные Пластинки*, Гостехиздат, М. (1957).

Dynamic Response of Plates on Elastic Foundations Due to the Moving Loads

Cheng Xiang-sheng

(*Tongji University, Shanghai*)

Abstract

This paper discusses the dynamic response of thin plates on the elastic foundations due to the moving loads by means of the variational calculus. In the text we take the mass of moving loads into account, treat a series of questions such as the forced oscillations, the influence surfaces of the flexions and the influence surfaces of the inner forces, resonance conditions and crit'cal speed and so forth.