应用数学和力学，第8卷第4期（1987年4月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重 庆 出 版 社 出 版

不动泛系定理的新研究：泛浑沌和泛怪引子

朱绪鼎　　吴学谋

（武汉数字工程研究所，1985年11月29日收到）

摘　要

关于浑沌、引子、怪引子等的研究是非线性分析中的重要课题．文[1]在泛系方法论的框架下，讨论了这些问题，提出了泛浑沌、泛引子和泛怪引子的概念，这些概念去掉了诸如连续性、紧性等条件，突出反映了一集合上的二元关系的性质．已有的研究结果指出，泛浑沌、泛引子和泛怪引子分别对应于某个特定的泛系算子作用下的不动子集．本文继续文[1、2]的工作，探讨了存在这类泛系不动子集的条件以及它们的构造和相互间的联系．

泛系方法论是侧重关系、关系转化与泛对称的一种跨学科的横断性研究．不动泛系指转化下相对不变的泛结构或广义系统，它是泛对称的一种典型表现形式，也是许多传统的概念的推广与概括．特别值得注意的是已有的研究结果指出，泛系方法论在研究非线性问题中提出的泛浑沌、泛引子和泛怪引子都可转化为某个泛系算子作用下的不动子集（典型的不动泛系形式）的问题，这进一步显示了不动泛系这一概念的重要性和普适性．本文在[1,2,3,4]的基础上，进一步研究了泛系不动子集的存在性问题、构造问题及有关的计数问题．

首先我们引进有关定义．

定义 1　设G是一个非空集合，$g\subset G^2$是G上的一个二元关系，$D\subset G$，若$D^2\cap g=\phi$，则称D为关于g的泛浑沌；若对任意$x\in G-D$，$x\circ g\cap D\neq\phi$，则称D是关于g的泛引子；若D既是关于g的泛浑沌，同时又是关于g的泛引子，则称D是关于g的泛怪引子．

定义 2　设$g\subset G^2$，记

$$g*x=\{y:y\in G,\ (y,x)\bar{\in}g\}$$

$$g*D=\bigcap_{y\in D}g*y=\{x:\forall y\in D,\ (x,y)\bar{\in}g\}$$

其中$x\in G$是G的元素，$D\subset G$是G的子集．任取$D\subset G$，若$D=g*D$，则称D为g的FS_{I}类不动子集；若$D\subset g*D$，则称D为g的FS_{II}类不动子集；若$D\supset g*D$，则称D为g的FS_{III}类不动子集．并且分别记g的FS_{I}，FS_{II}，FS_{III}类不动子集的全体为$FS_{\mathrm{I}}(g)$，$FS_{\mathrm{II}}(g)$，$FS_{\mathrm{III}}(g)$．

覃国光证明了如下定理：

定理 1　设$g\subset G^2$，$D\subset G$，D为关于g的泛引子的充要条件是$D\supset g*D$；D为关于g的泛浑沌的充要条件是$D\subset g*D$；D为关于g的泛怪引子的充要条件是$D=g*D$．

这一定理把泛怪引子、泛浑沌和泛引子的研究转化为g的FS_{I}，FS_{II}，FS_{III}类泛系不动子集的研究，这无疑是很有意义的．

引理 1　设$g\subset G^2$，$D\subset G$，则$g*D=\overline{g\circ D}$，其中 $g\circ D=\{x:x\in G,\ \exists y\in D,\ (x,y)\in g\}$，$\overline{g\circ D}=G-g\circ D$。

证明　设$x\in g*D$，则$\forall y\in D$，$(x,y)\,\overline{\in}\,g$，故$x\,\overline{\in}\,g\circ D$。$x\in\overline{g\circ D}$。若$x\,\overline{\in}\,g*D$，则$\exists y\in D$，$(x,y)\in g$，故$x\in g\circ D$，$x\,\overline{\in}\,\overline{g\circ D}$ 所以，$g*D=\overline{g\circ D}$。证毕。

推论　设$g\subset G^2$，$D\subset G$，则D为关于g的泛引子的充要条件是$D\supset\overline{g\circ D}$；$D$为关于$g$的泛浑沌的充要条件是$D\subset\overline{g\circ D}$；$D$为关于$g$的泛怪引子的充要条件是$D=\overline{g\circ D}$。

下面我们讨论FS_{I}，FS_{II}，FS_{III}类泛系不动子集的存在性问题。

定理 2　若$g\subset G^2$，$g\cap I=\phi$，$g=g^{-1}$，则$D\subset G(d\varepsilon_7(g))$是$g$的$FS_{\text{I}}$类泛系不动子集。这里$I=\{(x,x):x\in G\}$。

证明　根据定义，若$D\subset G(d\varepsilon_7(g))$．则$D^2\subset\varepsilon_7(g)=\bar{g}$（因为$g\cap I=\phi$且$g=g^{-1}$），即$D\subset g*D$，并且$D$是满足关系式$A\subset g*A$的极大元。若$D\neq g*D$，则任取$x\in g*D-D$，令$D'=D\cup\{x\}$，下面我们证明$D'\subset g*D'$，从而导出矛盾。令$\mathscr{A}=\{A:A\subset G,\ A\subset g*A\}$。

由于$D'\subset g*D$，即$D'\subset\overline{g\circ D}$，故$\forall y\in D$，$(x,y)\,\overline{\in}\,g$，从而$\forall y\in D$，$(y,x)\,\overline{\in}\,g^{-1}=g$。所以，$D\subset\overline{g\circ D'}$又因为$g\cap I=\phi$，于是$(x,x)\,\overline{\in}\,g$，所以，$D'\subset\overline{g\circ D'}=g*D'$。即$D'\in\mathscr{A}$。显然，$D'\supset D$，与$D$是$\mathscr{A}$的一个极大元相矛盾，故必有$D=g*D$。证毕。

当g是一个对称关系时，定理2提供了一个判断g是否存在FS_{I}类泛系不动子集的比较简明的方法。而且当g仅有一小部分“不对称”，并且这一部分在$\bar{g}^t$的作用下，不“蔓延”到整个G上的话，我们也可建立相应的判别准则。

定理 3　设$g\subset G^2$，$g\cap I=\phi$，记$T=\{x:x\in G,\ \exists y\in G,\ (x,y)\in g$且$(y,x)\,\overline{\in}\,g$或者$(y,x)\in g$且$(x,y)\,\overline{\in}\,g\}$，若$T\circ\bar{g}^t\neq G$，则存在$D\subset G$，$g*D=D$。

证明　令$G'=G-T\circ\bar{g}^t$。设$x'\in G'$，同上面定理的证明一样可知$\{x'\}\subset g*\{x'\}$。记$\mathscr{A}=\{A:A\subset G',\ g*A\supset A\}$，于是有$\mathscr{A}\neq\phi$。下面证明当$A\subset G'$时，$g*A\subset G'$。不然的话，设$x\in g*A\cap T\circ\bar{g}^t$，因为$T\circ\bar{g}^t=T\cup T\circ\bar{g}\cup T\circ\bar{g}^{(2)}\cup\cdots$，不妨设$x\in T\circ\bar{g}^{(n)}$。由于$\forall y\in A$，$(x,y)\,\overline{\in}\,g$，即$(x,y)\in\bar{g}$，所以$y\in T\circ\bar{g}^{(n+1)}\subset T\circ\bar{g}^t$，即$A\subset T\circ\bar{g}^t$，与假设条件$A\subset G'$矛盾。

设$\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$是$\mathscr{A}$中的一条链（$\mathscr{A}$按集合的包含关系形成一半序集），记$A=\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}}B$。则任取$x$，$y\in A$，不妨设$x\in B_1$，$y\in B_2$，$B_1\subset B_2$，于是$x,y\in B_2$，从而$(x,y)\,\overline{\in}\,g$，$(y,x)\,\overline{\in}\,g$，即$A\subset g*A$，$A\in\mathscr{A}$。根据 Zorn引理，$\mathscr{A}$有极大元。设$D$是$\mathscr{A}$的极大元，若$D\neq g*D$，令$x\in g*D-D$，根据上面的讨论$x\in G'$。记$D'=D\cup\{x\}$，类似可证$D'\subset g*D'$，从而导出矛盾。

和定理 3 的方法类似，我们也可以不必要求g和I完全不相交。当g和I有部分相交，而这相交的部分在$\bar{g}^t$的作用下不“蔓延”到整个G上时，我们也可得出相应的结论。

定理 4　设$g\subset G^2$，$g=g^{-1}$，令$g_{\text{I}}=\{x:(x,x)\in g,\ x\in G\}$，那么，当$g_{\text{I}}\circ\bar{g}^t\neq G$时，存在$D\subset G$，使得$g*D=D$。

证明　因为$g_{\text{I}}\circ\bar{g}^t\neq G$，所以$G'=G-g_{\text{I}}\circ\bar{g}^t$非空，任取$x\in G'$，$g*\{x\}\supset\{x\}$，从而集簇$\mathscr{A}=\{A:A\subset G',\ g*A\supset A\}$也非空。和上面定理3的证明类似可证得当$A\subset G'$时，$g*A\subset G'$。令$D$是$\mathscr{A}$的一个极大元，则类似地可证明$D=g*D$。证毕。

综合定理 3 和定理 4，可以证明

定理 5　设$g\subset G^2$，T和g_{I}分别是定理3、4中定义的G的子集，若$(T\cup g_{\text{I}})\circ\bar{g}^t\neq G$，则存在$D\subset G$，使得$D=g*D$。

上面定理2、3、4、5中给出的条件都不是g存在FS_{I}类泛系不动子集的必要条件。

例 1　设 G为整数集　$g=\{(x,y):x,y\in G,\ x,y$ 均为偶数$\}\cup\{(x,y):x-y=1\}$，则$g_I=\{x:x$为偶数$\}$，$g_I\circ\bar{g}'=G$，$T=G$（这里的T和g_I分别为定理3、4中定义的G的子集），所以g不满足定理2、3、4、5的条件，但容易验证，若D为全体奇数组成的集合，则$D=g*D$。

定理 6　设$g\subset G^2$，若g存在FS_I类泛系不动子集，则任取$x\in g_I$，$G-g_I\not\subset x\circ\bar{g}$。

这一定理是下面定理 7 的一个特殊情形。

定理 7　设$g\subset G^2$，g存在FS_I类泛系不动子集，则存在$D\subset G$，$\forall x\in g_I$，$D\cap x\circ g\neq\phi$。

证明　令$D\subset G$是 g 的一个 FS_I类泛系不动子集，若$\exists x\in g_I$，$D\cap x\circ g=\phi$，则$x\in g*D$，由于$g*D=D$，所以$x\in D$，但$x\in g_I$，故$x\bar{\in}g*\{x\}$，于是$x\bar{\in}g*D$，矛盾，定理得证。

定理 7 虽然不是g存在FS_I类泛系不动子集的充分条件，但当 g 是对称关系时，我们有如下结果：

定理 8　设$g\subset G^2$是一对称关系（即$g=g^{-1}$），则g存在FS_I类泛系不动子集的充分必要条件是存在$D\subset G$，$D^2\cap g=\phi$，且$\forall x\in g_I$，$D\cap x\circ g\neq\phi$。

证明　必要性的证明和定理7的证明类似，下面给出充分性的证明。

记$\mathscr{A}=\{A:A\subset G,\ A\supset D,\ A^2\cap g=\phi\}$，因为$D\in\mathscr{A}$，所以$\mathscr{A}$非空。令$B$ 为$\mathscr{A}$的一个极大元，显然有$B\subset g*B$，若$B\neq g*B$，令$\bar{x}\in g*B-B$。记$B'=B\cup\{\bar{x}\}$，根据定义$\forall y\in B$，$(\bar{x},y)\bar{\in}g$，由g的对称性可知$(y,\bar{x})\bar{\in}g$。又由于$\forall x\in g_I$，$A\cap x\circ g\neq\phi(A\supset D,\ D\cap x\circ g\neq\phi)$，所以$g_I\cap g*B=\phi$，即$\bar{x}\bar{\in}g_I$。于是有$B'^2\cap g=\phi$，与$B$是$\mathscr{A}$的极大元相矛盾。证毕。

下面我们讨论一下复合关系具有FS_I类泛系不动子集的条件。

定理 9　设$f,g\subset G^2$，$f\circ g=g^{-1}\circ f^{-1}$，则$g\circ f$存在$FS_I$类泛系不动子集的充分必要条件是存在$D\subset G$，$(D\times f\circ D)\cap g=\phi$，且$\forall x\in(g\circ f)_I$，$f\circ D\not\subset x\circ\bar{g}$。

证明　设$D\subset G$，$(g\circ f)*D=D$，则$\forall x$，$y\in D$，$(x,y)\bar{\in}g\circ f$。即不存在$z\in G$，$(x,z)\in g$，$(z,y)\in f$，即$(D\times f\circ D)\cap g=\phi$。若$\exists\bar{x}\in(g\circ f)_I$，使得$f\circ D\subset\bar{x}\circ\bar{g}$，则$\forall y\in D$，$(\bar{x},y)\bar{\in}g\circ f$（否则的话，$\exists z\in G$，$(\bar{x},z)\in g$，$(z,y)\in f$，从而$z\in f\circ D$，$z\bar{\in}\bar{x}\circ\bar{g}$），根据定义$\bar{x}\in(g\circ f)*D=D$，但$\bar{x}\in(g\circ f)_I$，故$(\bar{x},\bar{x})\in g\circ f$，于是$\bar{x}\bar{\in}g*\{\bar{x}\}$，$\bar{x}\bar{\in}g*D$，矛盾，必要性得证。

充分性：记$\mathscr{A}=\{A:A\subset G,\ A\supset D,\ (A\times f\circ A)\cap g=\phi\}$，其中$D\subset G$，$(D\times f\circ D)\cap g=\phi$且$\forall x\in(g\circ f)_I$，$f\circ D\not\subset x\circ\bar{g}$。因为$D\in\mathscr{A}$，故$\mathscr{A}\neq\phi$。令$B$为$\mathscr{A}$的一个极大元，由于$(B\times f\circ B)\cap g=\phi$，所以$\forall y\in B$，不存在$z\in f\circ B$，使得$(y,z)\in g$，也就是说不存在 $x\in B$，$z\in f\circ x$，$(y,z)\in g$，根据定义可知，$B\subset(g\circ f)*B$。若 $B\neq(g\circ f)*B$，令 $x\in(g\circ f)*B-B$，$B'=B\cup\{x\}$，和上面定理的证明类似可证得$B'\in\mathscr{A}$，与B是$\mathscr{A}$的极大元相矛盾。证毕。

关于一个二元关系g存在FS_{II}，FS_{III}类泛系不动子集的条件都很简单。

定理10　G上的二元关系g存在FS_{II}类泛系不动子集的充分必要条件是$g\not\supset I$；g存在不等于G的FS_{III}类泛系不动子集的充分必要条件是$g\not\subset I$。

证明　若$g\not\supset I$，则存在$x\in G$，$(x,x)\bar{\in}g$，于是$\{x\}\subset g*\{x\}$，即g存在 FS_{II}类泛系不动子集；若$g\supset I$，则$\forall x\in G$，$(x,x)\in g$，$x\bar{\in}g*\{x\}$，所以，g不存在FS_{II}类泛系不动子集。

若$g\not\subset I$，设$x\neq y$，$x,y\in G$，$(x,y)\in g$，令$D=G-\{x\}$，根据定义则有$D\supset g*D$，即g存在FS_{III}类泛系不动子集；若$g\subset I$，则易证任给$D\subset G$，$G-D\subset g*D$，从而当$G-D$非空时，$D\not\supset g*D$，即g不存在不等于G的FS_{III}类泛系不动子集。证毕。

当$g\not\supset I$时，即$g_I\neq G$，记$S=G-g_I$，则所有g的FS_{II}类泛系不动子集必是S的某个子集，同时，当S的某个子集A，其中任意两个不同的元素间都没有g关系时，则A是 g 的 FS_{II}类泛系不动子集。所以当S是有限集时，我们有

$$|FS_{\mathrm{I}}(g)|\leqslant 2^{|S|}$$

类似地，当$g\not\subset I$时，记$V=\{x:x\in G,\ \exists y\in G,\ (x,y)\in g\}$，则所有$g$的$FS_{\mathrm{I}}$类泛系不动子集必包含$G-V$，即$g$的$FS_{\mathrm{I}}$类泛系不动子集必是$G-V$与$V$的某个子集的并。于是当$V$为有限集时，我们有

$$|FS_{\mathrm{I}}(g)|\leqslant 2^{|V|}$$

关于g的FS_{I}类泛系不动子集的计数问题，我们有如下的

定理11 设$g\subset G^2$是一个对称二元关系，$g\not\supset I$，S是上面定义的G的子集，S为有限集，(记$|S|=m$)，且$\forall x\in S$，x最多只与S中的一个元素有g关系，记$n=|\{x:x\in S,\ \exists y\in S,\ (x,y)\in g\}|$，显然$n$是偶数，记$n=2k$，则

$$|FS_{\mathrm{I}}(g)|=2^{m-n}\cdot 3^k=2^m\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

证明 根据前面的讨论我们知道，g的每一个FS_{I}类泛系不动子集都是S的一个子集，S共有2^m个子集（包括空集），而在上面定理的假设下，S的一个子集为g的FS_{I}类泛系不动子集的充要条件是该子集不包含S中有g关系的两点，S中有g关系的元素对共有k对，并且每两对之间没有公共元（因为S中的元素x最多只与S中的一个元有g关系）。设x，y是S中一对有g关系的元素对，则$S-\{x,y\}$中的任一子集加上$\{x,y\}$构成一个不属于$FS_{\mathrm{I}}(g)$的S的子集，这样的子集共有2^{m-2}个。而S中有g关系的元素对共有k对，于是我们从S的2^m个子集中减去这$k\times 2^{m-2}$个子集，但是这$k\times 2^{m-2}$个子集中有一些是相同的，事实上，S中每一个同时包含两对有g关系的元素对的子集均被减去两次，这种子集共有$\binom{k}{2}\times 2^{m-4}$个，所以，我们把这些多减了一次的子集个数再加进来，得到如下式子：

$$2^m-k\times 2^{m-2}+\binom{k}{2}2^{m-4}$$

但是，在加进$\binom{k}{2}2^{m-4}$时，我们又把那些S的同时包含S中3对有g关系的子集多加了一次，故应该减去。依此往下推，我们就得到

$$|FS_{\mathrm{I}}(g)|=2^m-k2^{m-2}+\binom{k}{2}2^{m-4}-\binom{k}{3}2^{m-6}+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}2^{m-2i}\cdot(-1)^i=2^{m-n}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}2^{n-2i}(-1)^i$$

$$=2^{m-n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}2^{2k-2i}=2^{m-n}(4-1)^k=2^{m-n}\cdot 3^k$$

定理得证。

上面定理中关于g是对称关系这一条件可以去掉。用类似的方法，我们可以证明

定理12 设$g\subset G^2$，$g\not\supset I$，S是有限集（定义同上），$|S|=m$，且$\forall x\in S$，若$\exists y\in S$，$(x,y)\in g$，或者$(y,x)\in g$，则$(\{x\}\times(S-\{y\}))\cap g=((S-\{y\})\times\{x\})\cap g=\phi$，记$n=|\{x:x\in S,\ \exists y\in S,\ (x,y)\in g$或者$(y,x)\in g\}|$，$k=n/2$，则

$$|FS_{\mathrm{I}}(g)|=2^m\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

覃国光副研究员曾参予有关问题的讨论，谨致谢意。

参 考 文 献

[1] 吴学谋，泛系方法论与非线性分析：分叉、突变、浑沌与稳定性的新研究，《国际非线性力学学术会议论文集》(1985).

[2] Wu Xue-mou, Pansystems methodology: Concepts, theorems and applications (Ⅰ)-(Ⅷ), *Science Exploration*, 1,2,4 (1982), 1,4 (1983),1 (1984).

[3] 吴学谋，泛系识别理论与大系统泛系运筹学的研究与应用（Ⅰ),应用数学和力学，**5**, 1(1984), 19—32.

[4] Wu Xue-mou, Fixed pansystems theorems and pansystems catastrophe analysis of pan-weighted network, *Math. Res. and Exposition*, 1 (1984).

[5] 高隆颖、王书基，泛对称与不动泛系定理，应用数学和力学，**5**, 5 (1984), 743—748.

An Approach on Fixed Pansystems Theorems: Panchaos and Strange Panattractor

Zhu Xu-ding   Wu Xue-mou

(*Wuhan Digital Engineering Institute, Wuhan*)

Abstract

The investigations about chaos, attractor and strange attractor are main subjects in non-linear analysis. Under the framework of pansystems methodology, reference [1] discussed these problems and introduced the concepts of panchaos, panattractor and strange panattractor. These concepts omitted the condition of continuity, compactness, etc. and put stress on the properties of binary relations on a set. A certain obtained result indicates that panchaos, panattractor and strange panattractor correspond respectively to fixed subsets of certain pansystems operators. This paper continues the investigation of [1,2], discusses the existence of these pansystems fixed subsets, their construction and interrelations.