Poincaré非线性振动理论在连续介质力学中的推广（Ⅱ）——若干应用

李 骊 霍麟春

（天津大学，1986年2月21日收到）

摘 要

文本是文[1]的继续．文[1]中，提出和建议使用非线性偏微分方程直接摄动与加权积分方程法，计算连续介质系统的共振与非共振周期解．本文中，应用该方法计算了定跨度弹性梁在各种常见边界条件下强迫振动的共振与非共振周期解，方板在集中周期荷载作用下的共振周期解．指出了，非主振型对非线性振动周期解的影响及静荷载对幅频特性曲线的影响．

一、引 言

在文[1]中，我们从理论上证明了Poincaré理论可以推广到连续介质系统的非线性振动问题中去，并提出和建议用非线性偏微分方程直接摄动与加权积分方法，计算连续介质系统的共振与非共振周期解．通过本文的实例计算表明，该方法是行之有效的．

近年来，使用偏微分方程摄动方法解决连续介质振动问题，具有代表性的是Keller和美籍学者丁汝的工作[2]．他们讨论过无限大非线性介质的波动和振动问题．丁汝并称他们的方法为改进的摄动法．正如文献[3]中所指出："他们的方法的主要思想是：进行参数摄动后，把各阶非齐次的摄动方程作加权积分（通常取对应的齐次方程的解为权函数），从而得到方程的可解性条件，由此确定变形参数．"

本文的方法和解决问题的范围与丁汝的工作是不同的．我们的方法是建立在Poincaré理论的基础上，主要用于讨论连续介质的共振与非共振周期解．其主要思想是：在共振情况下，为了避免线性派生系统周期解的定解方程中出现小分母项，引入了参数分解的方法，将共振的固有频率所对应的线性强迫振动问题的偏微分方程进行变换，使其右端化为小量级项，归併到下一级摄动方程中去，最后，利用线性问题的周期性定解条件，进行加权积分，确定出派生周期解族中的待定常数．

我们的方法具有如下几个特点：

（1）具有完整的理论性

以往计算连续介质系统如梁、薄板、薄壳等非线性振动周期解，大都采用满足边界条件的空间函数代入描述系统运动的偏微分方程中去，应用近似方法如Галёркин方法将偏微分方程化为非线性常微分方程，最终使用小参数法、平均法或多尺度法进行求解．其结果依赖于空间函数的选择，从而限制了对连续介质系统的非线性振动的更全面了解．而本文提出的

方法是建立在Poincaré理论的基础上。并明确指出了，通过偏微分方程直接摄动，各级摄动方程的解均可展开为派生系统的振型函数的广义 Fourier 级数。在一定条件下，可以分析清楚派生周期解中的各阶振型项在数量上的关系，从而可以决定对它们的取舍。因此，我们的方法在理论上是完整的。为区别于以往的方法，将我们的方法称之为偏微分方程直接摄动法。

(2) 由于各级摄动方程的解可以表示为派生系统的振型函数的广义 Fourier 级数，所以对某些几何形状相同、本构性质相同，而边界条件不同、荷载分布不同的问题，可以给出周期解计算的统一摄动公式，对于实际应用比较方便。

(3) 共振与非共振周期解的定解条件中，仅对时间函数进行简单的积分运算，避免求解非线性常微分方程。因此，用本文方法求解过程中，注意力集中于边值问题的讨论。特别对于不易求得精确解的复杂边界条件，本文方法就更便于同与边值问题有关的近似方法相结合，显示其优越性。

二、定跨度弹性梁的强迫振动周期解

在横向荷载作用下定跨度弹性梁的运动微分方程为[4]

$$EI\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}+\mu\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}}=EF\frac{\partial}{\partial x^*}\left[\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^3\right]$$

$$+2\lambda^*\frac{\partial w^*}{\partial t^*}+q^*(x^*,t^*) \tag{2.1}$$

$$\mu\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}}=EF\frac{\partial}{\partial x^*}\left[\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2\right] \tag{2.2}$$

$$S^*=EF\left[\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2\right] \tag{2.3}$$

其中w^*为梁的挠度，v^*为纵向位移，S^*为轴向内力，μ为纵向单位长度质量，F为横截面面积，E为材料的弹性模数，λ^*为阻尼系数。

根据Kirchhoff假设[4]，忽略方程(2.2)中的纵向惯性力。引入下述无量纲数值。

$$x=\frac{x^*}{l},\qquad t=\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}\,t^*,\qquad w=\frac{l}{h^2}w^*$$

$$v=\frac{l^3}{h^4}v^*,\qquad S=\frac{l^4}{EFh^4}S^*,\qquad q=\frac{l^5}{EIh^2}q^*$$

$$\nu=\frac{Fh^4}{12I},\qquad \lambda=\frac{l^4\lambda^*}{12h^2\sqrt{\mu EI}},\qquad \varepsilon=\frac{12h^2}{l^2}$$

其中l为梁的跨度，h为梁高。于是，方程(2.1)，(2.2)和(2.3)化为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q(x,t)-2\varepsilon\lambda\frac{\partial w}{\partial t}+\varepsilon\nu S\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.4}$$

$$S=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}=0 \tag{2.6}$$

设$q(x,t)$为t的周期函数，周期为$2\pi/\Omega$。即

$$q(x,t)=q\left(x,\ t+\frac{2\pi}{\Omega}\right)$$

边界条件：

$$v(0)=v(1)=0 \tag{2.7}$$

$$w(0)=w(1)=0 \tag{2.8}$$

$$\left.\frac{\partial^i w}{\partial x^i}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^j w}{\partial x^j}\right|_{x=1}=0 \qquad (i,j=1,2) \tag{2.9}$$

当$i=j=1$为两端固定；$i=j=2$为两端简支；$i=1$而$j=2$为一端固定另一端简支。

令

$$w(x,t)=w_0(x,t)+\varepsilon w_1(x,t)+\varepsilon^2 w_2(x,t)+\cdots \tag{2.10}$$

$$v(x,t)=v_0(x,t)+\varepsilon v_1(x,t)+\varepsilon^2 v_2(x,t)+\cdots \tag{2.11}$$

$$S(t)=S_0(t)+\varepsilon S_1(t)+\varepsilon^2 S_2(t)+\cdots \tag{2.12}$$

将(2.10)，(2.11)，(2.12)代入(2.4)和(2.5)，比较两端ε的同次幂系数，得

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}=q(x,t) \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=\nu S_0(t)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-2\lambda\frac{\partial w_0}{\partial t} \tag{2.14}$$

$$S_0(t)=\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \tag{2.15}$$

将(2.15)式积分，并考虑(2.7)，得

$$S_0(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 dx \tag{2.16}$$

上式代入(2.14)，得

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=\frac{\nu}{2}\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\int_0^1\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 dx-2\lambda\frac{\partial w_0}{\partial t} \tag{2.17}$$

方程(2.13)的齐次方程对应的特征值问题为

$$\frac{d^4 u_n(x)}{dx^4}=\omega_n^4 u_n(x) \tag{2.18}$$

由边界条件(2.8)和(2.9)确定的特征值为ω_1，ω_2，ω_3，…。对应的正交规范特征函数族为$u_1(x)$，$u_2(x)$，$u_3(x)$，…。

(一) 非共振周期解

若全部特征值ω_n与Ω之比ω_n/Ω $(n=1,2,3,\cdots)$均不为整数，或不接近于整数，称为非共振。

令

$$q_n^{(0)}(t)=\int_0^1 q(x,t)u_n(x)dx \tag{2.19}$$

于是，方程(2.13)的周期解为

$$w_0(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^{(0)}\sin\omega_n t+b_n^{(0)}\cos\omega_n t\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t q_n^{(0)}(\tau)\cdot\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau\right]u_n(x) \tag{2.20}$$

常数 $a_n^{(0)}$, $b_n^{(0)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 由方程组

$$
\begin{cases}
a_n^{(0)}\sin\dfrac{2\pi\omega_n}{\Omega}+b_n^{(0)}\left(\cos\dfrac{2\pi\omega_n}{\Omega}-1\right)=-\dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}q_n^{(0)}(\tau)\cdot\sin\omega_n\left(\dfrac{2\pi}{\Omega}-\tau\right)d\tau & (2.21)\\
a_n^{(0)}\left(\cos\dfrac{2\pi\omega_n}{\Omega}-1\right)-b_n^{(0)}\sin\dfrac{2\pi\omega_n}{\Omega}=-\dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}q_n^{(0)}(\tau)\cdot\cos\omega_n\left(\dfrac{2\pi}{\Omega}-\tau\right)d\tau & (2.22)
\end{cases}
$$

确定。由于

$$\Delta_n=2\left(\cos\frac{2\pi\omega_n}{\Omega}-1\right)\neq 0 \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

所以由(2.21)和(2.22)可唯一解出$a_n^{(0)}$和$b_n^{(0)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$。令

$$p_n(t)=a_n^{(0)}\sin\omega_n t+b_n^{(0)}\cos\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t q_n^{(0)}(\tau)\cdot\sin\omega_n(t-\tau)d\tau \tag{2.23}$$

其中的常数 $a_n^{(0)}$ 和 $b_n^{(0)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 已由方程(2.21)和(2.22)所确定。将(2.20)代入(2.17)，并考虑(2.23)，得

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=q^{(1)}(x,t) \tag{2.24}$$

其中

$$q^{(1)}(x,t)=\frac{\nu}{2}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mu_{ij}\,p_i(t)\cdot p_j(t)\cdot\sum_{m=1}^{\infty}p_m(t)\frac{d^2u_m}{dx^2}-2\lambda\sum_{m=1}^{\infty}\frac{dp_m}{dt}u_m(x) \tag{2.25}$$

令

$$q_n^{(1)}(t)=\int_0^1 q_n^{(1)}(x,t)u_n(x)dx=-\frac{\nu}{2}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mu_{ij}\cdot p_i(t)\,p_j(t)\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\mu_{mn}p_m(t)-2\lambda\frac{dp_n(t)}{dt} \tag{2.26}$$

此地常数

$$\mu_{mn}=\int_0^1\frac{du_m}{dx}\frac{du_n}{dx}dx \tag{2.27}$$

于是(2.24)的周期解为

$$w_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^{(1)}\sin\omega_n t+b_n^{(1)}\cos\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t q_n^{(1)}(\tau)\cdot\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\right]u_n(x) \tag{2.28}$$

常数 $a_n^{(1)}$ 和 $b_n^{(1)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$由方程组

$$\begin{cases} a_n^{(1)}\sin\dfrac{2\pi\omega_n}{\Omega}+b_n^{(1)}\left(\cos\dfrac{2\pi\omega_n}{\Omega}-1\right)=-\dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}q_n^{(1)}(\tau)\cdot\sin\omega_n\left(\dfrac{2\pi}{\Omega}-\tau\right)d\tau & (2.29)\\ a_n^{(1)}\left(\cos\dfrac{2\pi\omega_n}{\Omega}-1\right)-b_n^{(1)}\sin\dfrac{2\pi\omega_n}{\Omega}=-\dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}q_n^{(1)}(\tau)\cos\omega_n\left(\dfrac{2\pi}{\Omega}-\tau\right)d\tau & (2.30)\end{cases}$$

确定。同样可由(2.29)和(2.30)唯一解出常数 $a_n^{(1)}$ 和 $b_n^{(1)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$。

例 考虑两端简支的定跨度弹性梁承受如下的均布横向周期荷载作用

$$q(x,t)=q_0\cdot\cos\Omega t$$

其中常数 q_0 为荷载幅值，Ω 为频率。此时

$$\omega_n=\pi^2n^2 \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$u_n(x)=\sqrt{2}\cdot\sin n\pi x \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$q_n^{(0)}(t)=\frac{\sqrt{2}\,q_0}{n\pi}[1-(-1)^n]\cdot\cos\Omega t \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$\mu_{mn}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi^2n^2, & m=n\end{cases} \qquad (m,\ n=1,2,3,\cdots)$$

$$w_0(x,t)=\frac{2q_0}{\pi}\cos\Omega t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n(\omega_n^2-\Omega^2)}\sin n\pi x$$

$$q_n^{(1)}(t)=-\frac{\sqrt{2}\,\pi n\nu[1-(-1)^n]\,q_0^3\cdot\cos^3\Omega t}{\omega_n^2-\Omega^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^m]^2}{(\omega_m^2-\Omega^2)^2}$$

$$+\frac{2\sqrt{2}\,\lambda\Omega q_0[1-(-1)^n]}{\pi\cdot n(\omega_n^2-\Omega^2)}\sin\Omega t$$

$$w_1(x,t)=\frac{4\lambda\Omega q_0}{\pi}\sin\Omega t\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]\sin n\pi x}{n(\omega_n^2-\Omega^2)^2}$$

$$-\frac{\pi\nu q_0^3}{2}\left[\cos 3\Omega t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n[1-(-1)^n]\cdot\sin n\pi x}{(\omega_n^2-\Omega^2)(\omega_n^2-9\Omega^2)}\right.$$

$$\left.+3\cos\Omega t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n[1-(-1)^n]\sin n\pi x}{(\omega_n^2-\Omega^2)^2}\right]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^m]^2}{(\omega_m^2-\Omega^2)^2}$$

对于其他边界条件，应用本文方法和公式及 Крылов 函数，亦能进行类似的计算，求得非共振周期解。

(二) 共振周期解

当派生系统的某个固有效率 ω_r 与 Ω 之比 ω_r/Ω 等于或接近整数时，称为共振。引入解谐参数 σ，并令

$$N^2\Omega^2=\omega_r^2+\varepsilon\sigma \tag{2.31}$$

和

$$q_r^{(0)}(t)=\varepsilon Q_r^{(0)}(t) \tag{2.32}$$

派生系统(2.13)的周期解族为

$$w_0(x,t)=M\cdot\cos(N\Omega t+\theta)u_r(x)+\sum_{n\neq r}^{\infty}\Big[a_n^{(0)}\sin\omega_n t$$

$$+b_n^{(0)}\cos\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t q_n^{(0)}(\tau)\cdot\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau\Big]u_r(x) \tag{2.33}$$

其中 $n\neq r$ 的常数 $a_n^{(0)}$ 和 $b_n^{(0)}$ 仍由(2.21)和(2.22)式确定。根据文[1]的参数分解方法，应将

$$[Q_r^{(0)}(t)-\sigma M\cos(N\Omega t+\theta)]u_r(x)$$

放入(2.17)的右端。补充后的(2.17)化为

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=H_1(x,t) \tag{2.34}$$

其中

$$H_1(x,t)=\frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\int_0^1\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2dx-2\lambda\frac{\partial w_0}{\partial t}$$

$$+[Q_r^{(0)}(t)+\sigma M\cos(N\Omega t+\theta)]u_r(x) \tag{2.35}$$

由

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}\left[\int_0^1 H_1(x,t)\,u_r(x)\,dx\right]\cos N\Omega t\,dt=0 \tag{2.36}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}\left[\int_0^1 H_1(x,t)u_r(x)\,dx\right]\sin N\Omega t\,dt=0 \tag{2.37}$$

确定常数 M 和 θ。将(2.33)代入(2.16)，求得 $S_0(t)$，代入(2.35)，求得 $H_1(x,t)$，最后，由(2.36)和(2.37)，得

$$\left(\sigma-\frac{3}{8}\nu\mu_{rr}^2M^2\right)M\cos\theta-3\nu\mu_{rr}M^2\xi_1(\theta)$$

$$-\nu M\cdot\eta_1(\theta)+2\lambda MN\Omega\cdot\sin\theta+\zeta_1=0 \tag{2.38}$$

$$\left(\sigma-\frac{3}{8}\nu\mu_{rr}^2M^2\right)M\sin\theta+3\nu\mu_{rr}M^2\cdot\xi_2(\theta)$$

$$+\nu M\eta_2(\theta)-2\lambda MN\cos\theta-\zeta_2=0 \tag{2.39}$$

其中

$$\xi_1(\theta)=\sum_{n\neq r}^{\infty}\mu_{nr}\,\alpha_n(\theta)$$

$$\xi_2(\theta)=\sum_{n\neq r}^{\infty}\mu_{nr}\,\beta_n(\theta)$$

$$\eta_1(\theta)=\sum_{m,n\neq r}^{\infty}(\mu_{rr}\mu_{mn}+2\mu_{rm}\mu_{rn})\,\alpha_{mn}(\theta)$$

$$\eta_2(\theta)=\sum_{m,n\neq r}^{\infty}(\mu_{rr}\mu_{mn}+2\mu_{rm}\mu_{rn})\,\beta_{mn}(\theta)$$

$$\zeta_1=\frac{\Omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}Q_r^{(0)}(t)\cos N\Omega t\,dt-\nu\sum_{m\neq r}^{\infty}\sum_{n\neq r}^{\infty}\sum_{k\neq r}^{\infty}\mu_{nr}\mu_{mk}\,\alpha_{mnk}$$

$$\zeta_2=\frac{\Omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}Q_r^{(0)}(t)\sin N\Omega tdt-\nu\sum_{m\neq r}^{\infty}\sum_{n\neq r}^{\infty}\sum_{k\neq r}^{\infty}\mu_{nr}\mu_{mk}\beta_{mnk}$$

$$\alpha_n(\theta)=\frac{\Omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}p_n(t)\cos^2(N\Omega t+\theta)\cos N\Omega tdt$$

$$\beta_n(\theta)=\frac{\Omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}p_n(t)\cos^2(N\Omega t+\theta)\sin N\Omega tdt$$

$$\alpha_{mn}(\theta)=\frac{\Omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}p_m(t)p_n(t)\cos(N\Omega t+\theta)\cos N\Omega tdt$$

$$\beta_{mn}(\theta)=\frac{\Omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}p_m(t)p_n(t)\cos(N\Omega t+\theta)\cdot\sin N\Omega tdt$$

$$\alpha_{mnk}=\frac{\Omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}p_m(t)p_n(t)p_k(t)\cos N\Omega tdt$$

$$\beta_{mnk}=\frac{\Omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}p_m(t)p_n(t)p_k(t)\sin N\Omega tdt$$

例如，两端简支承受均布横向周期荷载作用的定跨度弹性梁，有

$$p_n(t)=\frac{q_0[1-(-1)^n]\cos\Omega t}{n\pi(\omega_n^2-\Omega^2)}\qquad(n\neq r)$$

$$\xi_1(\theta)=\xi_2(\theta)=0$$

$$\eta_1(\theta)=\begin{cases}\dfrac{3\pi^2r^2q_0^2}{8}\cos\theta\cdot\displaystyle\sum_{n\neq r}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]^2}{(\omega_n^2-\Omega^2)^2}, & N=1\\[2ex] \dfrac{\pi^2r^2q_0^2}{4}\cos\theta\cdot\displaystyle\sum_{n\neq r}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]^2}{(\omega_n^2-\Omega^2)^2}, & N\neq1\end{cases}$$

$$\eta_2(\theta)=\begin{cases}-\dfrac{\pi^2r^2q_0^2}{8}\cdot\sin\theta\displaystyle\sum_{n\neq r}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]^2}{(\omega_n^2-\Omega^2)^2}, & N=1\\[2ex] -\dfrac{\pi^2r^2q_0^2}{4}\cdot\sin\theta\displaystyle\sum_{n\neq r}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]^2}{(\omega_n^2-\Omega^2)^2}, & N\neq1\end{cases}$$

$$\zeta_1=\begin{cases}\dfrac{q_0[1-(-1)^r]}{\varepsilon\pi r}, & N=1\\[1ex] 0, & N\neq1\end{cases}$$

$$\zeta_2=0$$

三、弹性薄板非线性共振周期解

弹性薄板的运动微分方程为[6]

$$D\nabla^4 w^* = L(w^*, \phi^*) + q^*(x^*, y^*, t^*) - \frac{\rho h}{g}\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} - 2\lambda^* \frac{\partial w^*}{\partial t^*} \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4 \phi^* = -\frac{1}{2}L(w^*, w^*) \tag{3.2}$$

其中算子

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} - 2\frac{\partial^2}{\partial x^*\partial y^*}\frac{\partial^2}{\partial x^*\partial y^*} \tag{3.3}$$

引入下述无量纲数值

$$w = \frac{lw^*}{h^2}, \quad x = \frac{x^*}{l}, \quad y = \frac{y^*}{l}$$

$$t = \frac{t^*}{l^2}\sqrt{\frac{gD}{\rho h}}, \quad q = \frac{l^5 q^*}{h^2 D}, \quad \phi = \frac{l^2\phi^*}{Eh^5}$$

$$\lambda = \left(\frac{l}{h}\right)^4 \sqrt{\frac{q}{12(1-\nu^2)\rho E}}\lambda^*, \quad \varepsilon = \frac{12(1-\nu^2)h^2}{l^2}$$

其中l为中面的特征长度，ε为无量纲小参数。于是，(3.1)和(3.2)化为

$$\nabla^4 w = \varepsilon L(w, \phi) + q(x, y, t) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\varepsilon\lambda\frac{\partial w}{\partial t} \tag{3.4}$$

$$\nabla^4 \phi = -\frac{1}{2}L(w, w) \tag{3.5}$$

设

$$w(x,y,t) = w_0(x,y,t) + \varepsilon w_1(x,y,t) + \varepsilon^2 w_2(x,y,t) + \cdots \tag{3.6}$$

$$\phi(x,y,t) = \phi_0(x,y,t) + \varepsilon\phi_1(x,y,t) + \varepsilon^2\phi_2(x,y,t) + \cdots \tag{3.7}$$

将(3.6)和(3.7)代入(3.4)和(3.5)，令两端的ε同次幂系数相等，得

$$\nabla^4 w_0 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = q(x, y, t) \tag{3.8}$$

$$\nabla^4 \phi_0 = -\frac{1}{2}L(w_0, w_0) \tag{3.9}$$

$$\nabla^4 w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = L(w_0, \phi_0) - 2\lambda\frac{\partial w_0}{\partial t} \tag{3.10}$$

考虑方板的中心承受周期性集中荷载

$$q(x, y, t) = \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot\delta\left(y - \frac{1}{2}\right)(q_0 + q_1\cos\Omega t) \tag{3.11}$$

作用。为讨论简便与清楚起见，仅讨论周边简支和沿板边无法向位移及没有阻止沿板边切向位移的力的边界条件。即

当$x=0$及$x=1$时：

$$w = 0 \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + (2+\mu)\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = 0 \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{3.15}$$

当$y=0$及$y=1$时：

$$w=0 \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3}+(2+\mu)\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y}=0 \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}=0 \tag{3.19}$$

显然，派生系统的固有频率为

$$\omega_{mn}=\pi^2(m^2+n^2) \qquad (m,n=1,2,3,\cdots) \tag{3.20}$$

相应的振型函数为

$$u_{mn}(x,y)=\sin m\pi x\cdot\sin n\pi y \qquad (m,n=1,2,3,\cdots) \tag{3.21}$$

当线性派生系统的某个固有频率 ω_{sr} 与 Ω 之比接近某正整数N时，弹性薄板处于共振状态。引入解谐参数 σ，并令

$$N^2\Omega^2=\omega_{sr}^2+\varepsilon\sigma \tag{3.22}$$

当 $s=r$ 时，派生系统周期解族为

$$w_0(x,y,t)=[M\cdot\cos(N\Omega t+\theta)+f_{rr}^{(0)}]\cdot\sin r\pi x\cdot\sin r\pi y$$

$$+\sum_{(m=r\cap n=r)=\phi}^{\infty}\sum^{\infty} f_{mn}(t)\cdot\sin m\pi x\cdot\sin n\pi y \tag{3.23}$$

此时，仅有振型$u_{rr}(x,y)$参与共振，故称为单振型共振。

当 $s\neq r$ 时，派生系统周期解族为

$$w_0(x,y,t)=[M_1\cdot\cos(N\Omega t+\theta_1)+f_{sr}^{(0)}]\cdot\sin s\pi x\cdot\sin r\pi y$$

$$+[M_2\cdot\cos(N\Omega t+\theta_2)+f_{rs}^{(0)}]\sin r\pi x\cdot\sin s\pi y$$

$$+\sum_{m\neq s,r}^{\infty}\sum_{n\neq s,r}^{\infty} f_{mn}(t)\cdot\sin m\pi x\cdot\sin n\pi y \tag{3.24}$$

称为双振型共振。(3.23)与(3.24)中的函数 $f_{mn}(t)$为

$$f_{mn}(t)=f_{mn}^{(0)}+f_{mn}^{(1)}(t) \tag{3.25}$$

其中

$$f_{mn}^{(0)}=\frac{4q_0(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\omega_{mn}^2}. \tag{3.26}$$

$$f_{mn}^{(1)}(t)=\frac{4q_1\cdot(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\omega_{mn}^2-\Omega^2} \tag{3.27}$$

下面分别几种情况进行讨论

(一) 荷载均值$q_0=0$时的单振型共振

此时，派生系统周期解族为

$$w_0(x,y,t)=M\cdot\cos(N\Omega t+\theta)\cdot\sin r\pi x\cdot\sin r\pi y$$

$$+\sum_{(m=r\cap n=r)=\phi}^{\infty}\sum^{\infty} f_{mn}^{(1)}(t)\cdot\sin m\pi x\cdot\sin n\pi y \tag{3.28}$$

(3.28) 右端第一项称为共振项，第二项称为非共振项。在小阻尼情况下，共振项及其关于 x 与y的二阶偏导均为较大数值。由(3.20)与(3.27)可知，非共振项及其关于 x 与y的二阶偏导均为与共振解谐参数σ以及ε无关的小量，而且非共振项是一个收敛很快的级数。因此，计算ϕ_0时，可将 (3.28) 右端的第二项忽略不计。于是，将 (3.28) 右端的第一项代入 (2.9) 式右端，积分后，得

$$\phi_0(x,y,t)=\frac{1}{32}M^2\cdot\cos^2(N\Omega t+\theta)(\cos 2r\pi x+\cos 2r\pi y) \tag{2.29}$$

将(3.28)和(3.29)代入(3.10)右端，并将

$$[Q_{rr}(t)+\sigma M\cdot\cos(N\Omega t+\theta)]\cdot\sin r\pi x\cdot\sin r\pi y$$

补充到(3.10)式的右端，补充后的(3.10)式右端记为 $H_1(x,y,t)$，由定解条件

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}\left[\int_0^1\int_0^1 H_1(x,y,t)\cdot\sin r\pi x\cdot\sin r\pi y dxdy\right]\cdot\cos N\Omega t dt=0 & (3.30)\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}\left[\int_0^1\int_0^1 H_1(x,y,t)\cdot\sin r\pi x\cdot\sin r\pi y dxdy\right]\cdot\sin N\Omega t dt=0 & (3.31)\end{cases}$$

可得，当 $N=1$ 时，有

$$\begin{cases}(\alpha M^2-\sigma)M\cos\theta-2\lambda M\Omega\cdot\sin\theta-Q_1=0 & (3.32)\\ (\alpha M^2-\sigma)M\cdot\sin\theta+2\lambda M\Omega\cdot\cos\theta=0 & (3.33)\end{cases}$$

其中 $\alpha=\frac{3}{32}\pi^4 r^4,\quad Q_1=\frac{q_1}{\varepsilon}$

将 (3.32) 和 (3.33) 中的θ 消去，得

$$\sigma=\alpha M^2\pm\sqrt{\frac{q_1^2}{\varepsilon^2M^2}-4\lambda^2\Omega^2} \tag{3.34}$$

于是 $$M_{\max}=\frac{q_1}{2\varepsilon\lambda\Omega} \tag{3.35}$$

因此，对于较薄的平板（注意：$\varepsilon=12(1-\nu^2)h^2/l^2$，平板的厚跨比$h/l$越小，$\varepsilon$也越小)，小阻尼（$\lambda$较小）和$\Omega$接近派生系统的较低的固有频率之一时，$\varepsilon\lambda\Omega\ll 1$。而 (3.28) 的非共振项是与 ε、λ无关的小量。因而证实了在上述条件下，在计算主共振周期解时，可以忽略非共振项。而在相反的情况下，即对于厚板，大阻尼，高频主共振 ($\Omega\approx\omega_{rr}$，$r\gg 1$)，共振项与非共振项可以是同阶之量。显然，此种情况下，主共振周期解的计算中，不容忽略非共振项。

若采用以往的近似方法，将$w(x,y,t)=g(t)\cdot\sin r\pi x\cdot\sin r\pi y$代入(3.5)，求得$\phi(x,y,t)$，再将$w(x,y,t)$和$\phi(x,y,t)$代入(3.4)，使用Галёркин方法，化为非线性常微分方程，由此得到的一次近似解，可确定出与(3.32)和(3.33)相同的结果。显然，我们的方法能使计算过程更为简单。

当$N>1$（超谐波共振）时，得到确定M与θ的定解方程为

$$\begin{cases}(\alpha M^2-\sigma)M\cdot\cos\theta-2\lambda MN\cdot\sin\theta=0 & (3.36)\\ (\alpha M^2-\sigma)M\cdot\sin\theta+2\lambda MN\cdot\cos\theta=0 & (3.37)\end{cases}$$

显然，此方程组只有零解 $M=0$，这与前述的假设相矛盾。产生矛盾的原因是在超谐波共振情况下，(3.28)中的非共振项被忽略了。实际上，此时的共振与非共振项为同阶量，它们关于x与y的二阶偏导也为同阶量。因此，同阶的超谐波共振与同阶的主共振相比，前者只能是小振幅的共振。

（二）荷载均值$q_0=0$时的双振型共振

我们仍讨论具有小阻尼薄板的低频主共振问题。设

$$w_0(x,y,t)=M_1\cos(\Omega t+\theta_1)\cdot\sin s\pi x\cdot\sin r\pi y+M_2\cdot\cos(\Omega t+\theta_2)\cdot\sin r\pi x\cdot\sin s\pi y \tag{3.38}$$

其中 $s\neq r$。将(3.38)代入(3.9)，积分后，得

$$\begin{aligned}\phi_0(x,y,t)=&\frac{1}{32}M_1^2\cdot\cos^2(\Omega t+\theta_1)\left(\frac{s^2}{r^2}\cos 2s\pi x+\frac{r^2}{s^2}\cos 2r\pi y\right)\\&+\frac{1}{32}M_2^2\cdot\cos^2(\Omega t+\theta_2)\left(\frac{s^2}{r^2}\cos 2r\pi x+\frac{r^2}{s^2}\cos 2s\pi y\right)\\&+\frac{(s^2+r^2)^2}{4[(s-r)^2+(s+r)^2]^2}M_1\cdot M_2\cdot\cos(\Omega t+\theta_1)\cdot\cos(\Omega t+\theta_2)\\&\cdot[\cos(s-r)\pi x\cdot\cos(s+r)\pi y+\cos(s+r)\pi x\cdot\cos(s-r)\pi y]\\&-\frac{(s+r)^2}{16(s-r)^2}M_1\cdot M_2\cdot\cos(\Omega t+\theta_1)\cdot\cos(\Omega t+\theta_2)\cdot\cos(s-r)\pi x\cdot\cos(s-r)\pi y\\&-\frac{(s-r)^2}{16(s+r)^2}M_1\cdot M_2\cdot\cos(\Omega t+\theta_1)\cdot\cos(\Omega t+\theta_2)\cdot\cos(s+r)\pi x\cdot\cos(s+r)\pi y\end{aligned} \tag{3.39}$$

记

$$\begin{aligned}H_1(x,y,t)=&L(w_0,\ \phi_0)-2\lambda\frac{\partial w_0}{\partial t}\\&+[Q_{sr}(t)+\sigma M_1\cos(\Omega t+\theta_1)]\cdot\sin s\pi x\cdot\sin r\pi y\\&+[Q_{rs}(t)+\sigma M_2\cos(\Omega t+\theta_2)]\cdot\sin r\pi x\cdot\sin s\pi y\end{aligned} \tag{3.40}$$

周期解的定解条件为

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}\left[\int_0^1\int_0^1 H_1(x,y,t)\cdot\sin s\pi x\cdot\sin r\pi y dxdy\right]\cdot\cos\Omega t dt=0\\&\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}\left[\int_0^1\int_0^1 H_1(x,y,t)\sin s\pi x\cdot\sin r\pi y dxdy\right]\cdot\sin\Omega t dt=0\\&\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}\left[\int_0^1\int_0^1 H_1(x,y,t)\sin r\pi x\cdot\sin s\pi y dxdy\right]\cos\Omega t dt=0\\&\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}\left[\int_0^1\int_0^1 H_1(x,y,t)\sin r\pi x\cdot\sin s\pi y dxdy\right]\cdot\sin\Omega t dt=0\end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

由(3.38)，(3.39)，(3.40)，(3.41)，得

$$\left.\begin{aligned}
&-\beta M_1^3\cdot\cos\theta_1-\frac{\gamma}{3}M_1M_2^2\left[2\cos\theta_1+\cos\left(2\theta_2-\theta_1\right)\right]+2\lambda\Omega M_1\sin\theta_1\\
&\qquad+\sigma M_1\cos\theta_1-Q_1\cdot(-1)^{\frac{s+r}{2}-1}=0\\
&\beta M_1^3\cdot\sin\theta_1+\frac{\gamma}{3}M_1M_2^2\left[2\sin\theta_1+\sin\left(2\theta_2-\theta_1\right)\right]+2\lambda\Omega M_1\cos\theta_1\\
&\qquad-\sigma M_1\sin\theta_1=0\\
&-\beta M_2^3\cdot\cos\theta_2-\frac{\gamma}{3}M_1^2M_2\left[2\cos\theta_2+\cos\left(2\theta_1-\theta_2\right)\right]+2\lambda\Omega M_2\sin\theta_2\\
&\qquad+\sigma M_2\cos\theta_2+Q_1(-1)^{\frac{r+s}{2}-1}=0\\
&\beta M_2^3\cdot\sin\theta_2+\frac{\gamma}{3}M_1^2M_2\left[2\sin\theta_2+\sin\left(2\theta_1-\theta_2\right)\right]+2\lambda\Omega M_2\cos\theta_2\\
&\qquad-\sigma M_2\cdot\sin\theta_2=0
\end{aligned}\right\}\tag{3.42}$$

其中
$$\beta=\frac{3}{64}\pi^4(s^4+r^4)$$

$$\gamma=\frac{3\pi^4}{128}\left\{4s^2r^2+(s^2+r^2)^2+\frac{4(s^2+r^2)^2}{[(s-r)^2+(s+r)^2]^2}\right\}$$

在(3.42)中，若M_1与M_2交换，θ_1与θ_2交换，其形式不变，因此，令$M_1=M_2=\widetilde{M}$，$\theta_1=\theta_2=\tilde{\theta}$。消去$\tilde{\theta}$，得

$$\sigma=(\beta+\gamma)\widetilde{M}^2\pm\sqrt{\frac{q_1^2}{\varepsilon^2\widetilde{M}^2}-4\lambda^2\Omega^2}\tag{3.43}$$

若令β与γ中的$s=r$，便得到$\beta+\gamma=4\alpha$，再将(3.42)的第一与第三式相加，第二与第四式相加，并令$M_1=M_2=\widetilde{M}$，$\theta_1=\theta_2=\tilde{\theta}$，就得到(3.32)与(3.33)式，但是，$2\widetilde{M}=M$和$\tilde{\theta}=\theta$。

（三）荷载的均值（静荷载）对主共振周期解的影响

设$q_0\gg q_1$，且系统具有小阻尼，于是，可取派生周期解族为

$$w_0(x,y,t)=M\cdot\cos(\Omega t+\theta)\cdot\sin r\pi x\cdot\sin r\pi y+\sum_{m,n=1,3,\cdots}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{4q_0(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\omega_{mn}^2}\sin m\pi x\cdot\sin n\pi y\tag{3.44}$$

将(3.44)代入(3.9)，积分后，得

$$\phi_0(x,y,t)=M^2\cdot\cos^2(\Omega t+\theta)\cdot\Gamma_1(x,y)+q_0M\cdot\cos(\Omega t+\theta)\Gamma_2(x,y)+q_0^2\Gamma_3(x,y)\tag{3.45}$$

其中
$$\Gamma_1(x,y)=\frac{1}{32}(\cos 2r\pi x+\cos 2r\pi y)\tag{3.46}$$

$$\Gamma_2(x,y)=\sum_m^{\infty}\sum_n^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\omega_{mn}^2}P_{mn}^{(r)}(x,y)\tag{3.47}$$

$$\Gamma_3(x,y)=2\sum_{i,m}^{\infty}\sum_{j,n}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{i+j+m+n}{2}-2}}{\omega_{ij}^2\,\omega_{mn}^2}P_{mnij}^{(r)}(x,y)\tag{3.48}$$

$$P_{mn}^{(r)}(x,y)=r^2(m+n)^2\left[\frac{\cos(m-r)\pi x\cdot\cos(n+r)\pi y}{((m-r)^2+(n+r)^2)^2}+\frac{\cos(m+r)\pi x\cdot\cos(n-r)\pi y}{((m+r)^2+(n-r)^2)^2}\right]$$

$$-r^2(m-n)^2\left[\frac{\cos(m-r)\pi x\cdot\cos(n-r)\pi y}{((m-r)^2+(n-r)^2)^2}+\frac{\cos(m+r)\pi x\cdot\cos(n+r)\pi y}{((m+r)^2+(n+r)^2)^2}\right] \quad (3.49)$$

$$P_{mnij}^{(r)}(x,y)=(ni+mj)^2\left[\frac{\cos(m-i)\pi x\cdot\cos(n+j)\pi y}{((m-i)^2+(n+j)^2)^2}+\frac{\cos(m+i)\pi x\cdot\cos(n-j)\pi y}{((m+i)^2+(n-j)^2)^2}\right]$$

$$-(ni+mj)^2\left[\frac{\cos(m-i)\pi x\cdot\cos(n-j)\pi y}{((m-i)^2+(n-j)^2)^2}+\frac{\cos(m+i)\pi x\cdot\cos(n+j)\pi y}{((m+i)^2+(n+j)^2)^2}\right] \quad (3.50)$$

于是，将$w_0(x,y,t)$和$\phi_0(x,y,t)$代入(3.30)和(3.31)，得

$$\begin{cases} -(\alpha M^3+q_0^2M\cdot\xi_{rr}-\sigma M)\cos\theta+2\lambda\Omega M\cdot\sin\theta=Q_1 & (3.51)\\ (\alpha M^3+q_0^2M\cdot\xi_{rr}-\sigma M)\sin\theta+2\lambda\Omega M\cos\theta=0 & (3.52)\end{cases}$$

其中
$$\xi_{rr}=\sum_m^{\infty}\sum_n^{\infty}\left\{\frac{m^2}{\omega_{mn}^2\cdot\omega_{m,|n-2r|}^2}+\frac{n^2}{\omega_{mn}^2\cdot\omega_{|m-2r|,n}^2}\right.$$

$$+\frac{m^2}{\omega_{mn}^2\cdot\omega_{m,n+2r}^2}+\frac{n^2}{\omega_{mn}^2\cdot\omega_{m+2r,n}^2}$$

$$+\frac{(m+n)^2(m-n-2r)^2}{[(m-r)^2+(n+r)^2]^2\omega_{mn}^2\cdot\omega_{m,n+2r}^2}+\frac{(m+n)^2(m-n+2r)^2}{[(m+r)^2+(n-r)^2]^2\omega_{mn}^2\,\omega_{m+2r,n}^2}$$

$$+\frac{(m-n)^2(m+n+2r)^2}{[(m+r)^2+(n+r)^2]^2\omega_{mn}^2\cdot\omega_{m,n+2r}^2}+\frac{(m-n)^2(m+n+2r)^2}{[(m+r)^2+(n+r)^2]^2\omega_{mn}^2\,\omega_{m+2r,n}^2}$$

$$+\frac{(m+n)^4}{[(m-r)^2+(n+r)^2]\omega_{mn}^2\,\omega_{|m-2r|,n+2r}^2}+\frac{(m+n)^4}{[(m+r)^2+(n-r)^2]^2\omega_{mn}^2\cdot\omega_{m+2r,|n-2r|}^2}$$

$$+\frac{(m+n)^4}{[(m+r)^2+(n-r)^2]^2\omega_{mn}^4}+\frac{(m+n)^4}{[(m-r)^2+(n+r)^2]^2\omega_{mn}^4}$$

$$+\frac{(m-n)^4}{[(m-r)^2+(n-r)^2]^2\,\omega_{mn}^4}+\frac{(m-n)^4}{[(m+r)^2+(n+r)^2]^2\,\omega_{mn}^4}$$

$$+\frac{(m-n)^4}{[(m-r)^2+(n-r)^2]^2\omega_{mn}^2\,\omega_{|m-2r|,|n-2r|}^2}$$

$$+\left[\frac{(m+n)^2(m-n-2r)^2}{((m-r)^2+(n+r)^2)^2}+\frac{(m-n)^2(m+n-2r)^2}{((m-r)^2+(n-r)^2)^2}\right]\frac{1}{\omega_{mn}^2\cdot\omega_{|m-2r|,n}^2}$$

$$\left.+\left[\frac{(m+n)^2(m-n+2r)^2}{((m+r)^2+(n-r)^2)^2}+\frac{(m-n)^2(m+n-2r)^2}{((m-r)^2+(n-r)^2)^2}\right]\frac{1}{\omega_{mn}^2\cdot\omega_{m,|n-2r|}^2}\right\} \quad (3.53)$$

由(3.51)和(3.52)中消去θ，得

$$\sigma=\alpha M^2+\xi_{rr}q_0^2\pm\sqrt{\left(\frac{q_1}{\varepsilon M}\right)^2-4\lambda^2\Omega^2} \quad (3.54)$$

由于$\xi_{rr}>0$，由(3.54)和(3.34)可知，在板边法向不可移动简支条件下，$q_0\neq0$（存在静荷载）与$q_0=0$（无静荷载）的主共振幅频特性曲线相比较，前者将会沿σ轴的正方向（右方）平行移动。这就相当于，静荷载起到提高主共振频率的作用。又由(3.54)和(3.34)可知，对于相同的振幅，上述两种情况的幅频特性曲线上所对应的σ值之差为$\Delta\sigma=\xi_{rr}q_0^2$，再考虑(3.22)，那末，当$\varepsilon\cdot\Delta\sigma=O(\omega_{rr}^2)$时，即当

$$q_0=O\left(\sqrt{\frac{\omega_{rr}^2}{\varepsilon\xi_{rr}}}\right) \tag{3.55}$$

时，荷载均值（静荷载）对主共振的影响应予以考虑。如将静荷载作用下被提高的薄板振动频率记为$\tilde{\omega}_{rr}$，由(3.22)可得

$$\tilde{\omega}_{rr}=\sqrt{\omega_{rr}^2+\varepsilon\xi_{rr}q_0^2} \tag{3.56}$$

参 考 文 献

[1] 霍麟春、李骊，Poincaré非线性振动理论在连续介质力学中的推广(Ⅰ)——基本理论与方法，应用数学和力学，**8**,1 (1987).

[2] Keller, J. B. and L. Ting, Periodic vibrations of systems governed by nonlinear partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **19** (1966).

[3] 钱伟长，《奇异摄动理论及其在力学的应用》，科学出版社 (1981).

[4] Каудерер Г., *Нелинейная Механика*, ИИЛ Москва (1961).

[5] Вольмир А. С., *Нелинейная Динамика Пластинок и Оболочек*, Москва (1972).

Extension of Poincaré's Nonlinear Oscillation Theory to Continuum Mechanics(Ⅱ)——Applications

Li Li Huo Lin-chun

(*Tianjin University, Tianjin*)

Abstract

This is a continuation of [1]. In [1] we suggested a method of direct perturbation of partial differential equation and weighted integration to calculate the periodic solution for continuum mechanics. In this paper, by using the above method we calculate the resonant and nonresonant periodic solutions of beam with fixed span and different boundary conditions and the resonant periodic solution of square plate under the action of concentrated periodic load. Besides, the influences of non-principal mode upon periodic solution and of static load upon amplitude-frequency curve are given.