

文章编号: 1000-0887(2004)09-0895-06

计算有弥散和吸附的径向渗流问题的 局部化间断 Galerkin 方法*

汪继文^{1,2}, 刘慈群³

- (1. 中国科学技术大学 火灾科学国家重点实验室, 合肥 230026;
2. 安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室, 合肥 230039;
3. 中国科学院 渗流流体力学研究所, 河北 廊坊 065007)

(我刊原编委刘慈群来稿)

摘要: 在 Corkburn 和 Shu 新近发展的求解对流扩散方程的局部化间断 Galerkin 方法的基础上, 针对有弥散和吸附的径向渗流问题中出现的推广的对流扩散方程的形式, 构造了一种计算有弥散和吸附的径向渗流问题的局部化间断 Galerkin 有限元方法, 为径向渗流问题的求解提供了一个高阶的新方法. 对对流_弥散和对流_弥散_吸附两种情况进行了数值实验, 所得结果的相应部分与已知的一些精确解结果和数值结果是一致的, 表明方法是可靠的. 从计算速度上看, 方法也是可行的.

关键词: 弥散; 吸附; 径向渗流; 局部化间断 Galerkin 方法

中图分类号: O357.3; O241.82 文献标识码: A

引 言

表面活性剂在地层中损耗的速度和量, 是判断化学驱油经济上是否可行的重要依据之一. 造成溶质损耗的原因有: 化学吸附、沉淀、扩散到盲孔中的量等. 因此, 研究溶质在多孔介质中的弥散和吸附输运过程, 就有较大的理论和实际意义. 其中, 研究化学剂的二维输运问题, 对矿场化学驱油工程有重要的应用价值. 本文作者之一在[1]中应用差分方法给出了有弥散和吸附的径向渗流的数值模拟. 最近, Corkburn 和 Shu^[2]发展了一种求解对流扩散方程的局部化间断 Galerkin 方法, 这是一种高阶方法, 显示了良好的性能. 本文中, 我们发展这种局部化间断 Galerkin 方法来求解有弥散和吸附的径向渗流问题, 结合在时间离散上采用高阶的 TVD Runge_Kutta 方法^[3], 给出了一个求解径向渗流问题的高阶方法. 用本文方法对对流_弥散和对流_弥散_吸附两种情况进行了数值实验, 所得结果的相应部分与已知的一些精确解结果和数值结果是一致的, 表明方法是可靠的. 从计算速度上看, 本文方法也是可行的.

1 径向输运数学模型

化学溶液在多孔介质中流动时, 将在介质中同时产生弥散和吸附现象. 假设流体和岩石

* 收稿日期: 2002_04_10; 修订日期: 2004_03_25

基金项目: 安徽省自然科学基金资助项目(03046101); 面向 21 世纪教育振兴计划资助项目

作者简介: 汪继文(1958—), 男, 安徽宿松人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_551_5107820; Fax: + 86_551_5107154; E_mail: wangjw@ustc.edu).

不可压缩, 只在流动方向存在弥散, 则溶质浓度所满足的数学模型由质量守恒方程即推广的扩散方程和化学吸附方程构成^[4,5]。质量守恒方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot D \frac{\partial C}{\partial r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v \cdot C) = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1-\phi}{\phi} \rho_r \frac{\partial C_r}{\partial t}, \quad (1)$$

其中, $C(r, t)$ 为溶质浓度(mg/mL); $C_r(r, t)$ 为多孔介质表面吸附的溶质量(mg/g); $D = D' + \lambda$ 为水动力弥散系数(m^2/s); D' 为分子扩散系数(m^2/s); v 为溶液真实速度(m/s); λ 为弥散度(m); ϕ 为孔隙度(分数); ρ_r 为介质颗粒密度(g/mm^3)。

化学吸附方程为 Langmuir 动力吸附公式:

$$\frac{dC_r}{dt} = k_1 \left[1 - \frac{C_r}{C_r^*} \right] - k_2 \frac{C_r}{C_r^*}, \quad (2)$$

其中, k_1 为吸附速度常数($\text{mL}/\text{g} \cdot \text{s}$); k_2 为解吸速度常数($\text{mg}/\text{g} \cdot \text{s}$); C_r^* 为介质表面最大平衡吸附量(mg/g)。

径向渗流时的初值边界条件为

$$C(r, 0) = C_r(r, 0) = 0, \quad (3)$$

$$C(r_w, t) = C_0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial r}(r_e, t) = 0, \quad (5)$$

其中, r_w 为井半径(m); r_e 为单井控制面积半径(m); C_0 为注入溶液的浓度。

一般分子扩散系数远小于机械弥散系数, 因而

$$D \approx \lambda = \lambda \frac{Q}{2\pi h r \phi}, \quad (6)$$

其中, Q 为注入井中化学溶液的流量(m^3/s); h 为地层厚度(m)。

将(6)式中的 D 代入(1)式后, 式(1)~(5)可写成下述无因次形式

$$N_D \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{C}}{\partial r} = \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + N_A \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{C}_r}{\partial t} = N_q (1 - \bar{C}_r) \bar{C} - N_q N_k \bar{C}_r, \quad (8)$$

$$\bar{C}(\bar{r}, 0) = \bar{C}_r(\bar{r}, 0) = 0, \quad (9)$$

$$\bar{C}(1, \bar{t}) = 1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial r}(\bar{r}_e, \bar{t}) = 0, \quad (11)$$

其中 $\bar{C} = \frac{C}{C_0}$, $\bar{C}_r = \frac{C_r}{C_r^*}$, $\bar{r} = \frac{r}{r_w}$, $\bar{r}_e = \frac{r_e}{r_w}$,

$$\bar{t} = \frac{Q t}{2\pi h r_w^2 \phi}, \quad N_D = \frac{\lambda}{r_w}, \quad N_A = \frac{1-\phi}{\phi} \rho_r \frac{C_r^*}{C_0},$$

$$N_q = \frac{2\pi h r_w^2 \phi k_1}{Q} \cdot \frac{C_0}{C_r^*}; \quad N_k = \frac{k_2}{k_1 C_0}.$$

为简单起见, 略去上面各公式中符号上的“-”标记, 并记 $F(C, C_r) = - (N_q(1 - C_r) C - N_q N_k C_r)$, 将(7)式写成

$$r \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial r} - N_D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} = r N_A F(C, C_r),$$

即

$$r\partial_t C + \partial_r(C - N_D \partial_r C) = rN_A F(C, C_r), \tag{12}$$

而(8)式为

$$\partial_t C_r = N_q(1 - C_r)C - N_q N_k C_r \tag{13}$$

2 数值方法

2.1 方程(12)的离散

首先考虑方程(12)的求解。采用文献[2]中的局部化间断 Galerkin 方法, 但[2]中的方法是对下面形式的方程

$$\partial_t u + \partial_x(f(u) - a(u)\partial_x u) = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, 1) \tag{14}$$

给出的。这里 $a(u) \geq 0$ 。方程(14)与方程(12)是有差别的。因此, 要求解方程(12), 需要采用新形式的方法, 下面给出求解方程(12)的局部化间断 Galerkin 方法。

引入新变量 $q = \sqrt{N_D} \partial_r C$, 将(12)改写为下面两式

$$r\partial_t C + \partial_r(C - \sqrt{N_D} q) = rN_A F(C, C_r), \tag{15}$$

$$q - \sqrt{N_D} \partial_r C = 0 \tag{16}$$

设 $r \in [1, R]$, 将 $[1, R]$ 等距划分为 N 个区间, 分点为 $\{r_{j+1/2}\}_{j=0}^N$, 记 $I_j = (r_{j-1/2}, r_{j+1/2})$, $\Delta r = r_{j+1/2} - r_{j-1/2}, j = 1, \dots, N$ 。又记

$$V_h = V_h^k \equiv \{v \in L^1(1, R) : v|_{I_j} \in P^k(I_j), j = 1, \dots, N\},$$

其中 $P^k(I)$ 表示在区间 I 中次数不大于 k 的多项式空间, 对应空间变量精度为 $k+1$ 阶的方法。局部化间断 Galerkin 方法是寻找逼近解 $C_h(r, t), q_h(r, t)$, 使得 $\forall v_h(r) \in P^k(I_j), \forall w_h(r) \in P^k(I_j), \forall j = 1, \dots, N$, 有

$$\begin{aligned} \int_{I_j} r \partial_t C_h v_h dr &= \int_{I_j} (C_h - \sqrt{N_D} q_h) \partial_r v_h dr - \\ &\quad [(C_h)_{j+1/2} - \sqrt{N_D} (q_h)_{j+1/2}^-] (v_h)_{j+1/2}^+ - [(C_h)_{j-1/2} - \sqrt{N_D} (q_h)_{j-1/2}^-] (v_h)_{j-1/2}^- - \\ &\quad \int_{I_j} r N_A N_q [(1 - (C_r)_h) C_h - N_k (C_r)_h] v_h dr, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \int_{I_j} q_h w_h dr &= -\sqrt{N_D} \int_{I_j} C_h \partial_r w_h dr + \sqrt{N_D} (C_h)_{j+1/2}^+ (w_h)_{j+1/2}^- - \\ &\quad \sqrt{N_D} (C_h)_{j-1/2}^+ (w_h)_{j-1/2}^+ \end{aligned} \tag{18}$$

其中 f^\pm 表示单调数值流函数, $(\cdot)_{j+1/2}^-$ 表示函数在 $r_{j+1/2}$ 处的左极限, $(\cdot)_{j-1/2}^+$ 表示函数在 $r_{j-1/2}$ 处的右极限。

具体计算时, 可取 Legendre 多项式 P_l 作为 V_h 的局部基函数。则对 $r \in I_j$, 有

$$C_h(r, t) = \sum_{l=0}^k C_j^l \varphi_l(r), \tag{19}$$

$$q_h(r, t) = \sum_{l=0}^k q_j^l \varphi_l(r), \tag{20}$$

$$(C_r)_h(r, t) = \sum_{l=0}^k (C_r)_j^l \varphi_l(r), \tag{21}$$

这里 $\varphi_l(r) = P_l(2(r - r_j)/\Delta r_j), l = 0, 1, \dots, k$ 。将 r 在 I_j 表示成 $r_j + \varphi_1(r)$, 则(17)、(18)可写成下面的公式: $\forall j = 1, \dots, N, l = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned}
& \int_{I_j} (r_j + \varphi_1(r)) \partial_t \left[\sum_{p=0}^k C_j^p(t) \varphi_p(r) \right] \varphi_l(r) dr = \\
& \int_{I_j} \left[\sum_{p=0}^k C_j^p \varphi_p(r) - \sqrt{Nd} \sum_{p=0}^k C_j^p \varphi_p(r) \right] \partial_r \varphi_l(r) dr - \\
& \left[(Ch)_{j+1/2} - \sqrt{Nd} (qh)_{j+1/2} \right] (\varphi_l(r))_{j+1/2}^+ + \\
& \left[(Ch)_{j-1/2} - \sqrt{Nd} (qh)_{j-1/2} \right] (\varphi_l(r))_{j-1/2}^+ - \\
& N A N_q \int_{I_j} (r_j + \varphi_1(r)) \left[\left(1 - \sum_{p=0}^k C_r)_j^p \varphi_p(r) \right) \sum_{p=0}^k C_j^p \varphi_p(r) - \right. \\
& \left. N k \sum_{p=0}^k (C_r)_j^p \varphi_p(r) \right] \varphi_l(r) dr, \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{I_j} \left[\sum_{p=0}^k C_j^p \varphi_p(r) \right] \varphi_l(r) dr = - \sqrt{Nd} \int_{I_j} \left[\sum_{p=0}^k C_j^p \varphi_p(r) \right] \partial_r \varphi_l(r) dr + \\
& \sqrt{Nd} (Ch)_{j+1/2}^+ (\varphi_l(r))_{j+1/2}^+ - \sqrt{Nd} (Ch)_{j-1/2}^+ (\varphi_l(r))_{j-1/2}^+. \tag{23}
\end{aligned}$$

注意到 $(\varphi_l(r))_{j+1/2}^+ = 1$, $(\varphi_l(r))_{j-1/2}^+ = (-1)^l$, 利用 Legendre 多项式的正交性质, 并计算出(22)、(23)式中出现的多个 Legendre 多项式的乘积在 I_j 上的积分值, 对每个 $j(j = 1, \dots, N)$, 可得到一个 $(k+1) \times (k+1)$ 的关于变量为 $\left\{ \partial_t C_j^l(t) \right\}_{l=0}^k$ 的线性方程组, 当取 $k = 1$ 或 $k = 2$ 时, 这个方程组是二阶或三阶的, 很容易求解. 解出这个方程组, 可得出 $k+1$ 个表达式:

$$\partial_t C_j^l(t) = L_l(Ch) \quad (l = 0, 1, \dots, k). \tag{24}$$

接下来对每个 $j(j = 1, \dots, N)$, 使用[3]中的高阶 TVD Runge_Kutta 方法对(24)的 $k+1$ 个表达式进行时间变量离散. 例如, 对方程

$$\partial_t C = L(C),$$

假设时间步长为 Δt , 二阶离散公式为

$$\begin{aligned}
C^p &= C^n + \Delta t L(C^n), \\
C^{n+1} &= \frac{1}{2} C^n + \frac{1}{2} C^p + \frac{1}{2} \Delta t L(C^p).
\end{aligned}$$

三阶离散公式为

$$\begin{aligned}
C^{p1} &= C^n + \Delta t L(C^n), \\
C^{p2} &= \frac{3}{4} C^n + \frac{1}{4} C^{p1} + \frac{1}{4} \Delta t L(C^{p1}), \\
C^{n+1} &= \frac{1}{3} C^n + \frac{2}{3} C^{p2} + \frac{2}{3} \Delta t L(C^{p2}).
\end{aligned}$$

这样就可以完成方程(12)的求解.

2.2 方程(13)的离散

也采用局部化间断 Galerkin 方法, $\forall j = 1, \dots, N, l = 1, \dots, k$, 方程(13)的弱形式可离散为:

$$\begin{aligned}
& \int_{I_j} \partial_t \left[\sum_{p=0}^k (C_r)_j^p(t) \varphi_p(r) \right] \varphi_l(r) dr = \\
& N_q \int_{I_j} \left\{ \left[1 - \sum_{p=0}^k (C_r)_j^p \varphi_p(r) \right] \sum_{p=0}^k C_j^p \varphi_p(r) - \right. \\
& \left. N k \sum_{p=0}^k (C_r)_j^p \varphi_p(r) \right\} \varphi_l(r) dr, \tag{25}
\end{aligned}$$

同方程(12)的求解一样,对每个 $j(j = 1, \dots, N)$, 可得到一个关于变量 $\left\{ \partial_t (C_r)_j^l(t) \right\}_{l=0}^k$ 的 $(k+1) \times (k+1)$ 线性方程组。接下来的求解也同求解方程(12)一样进行。

2.3 计算步骤

1) 由初始条件和边界条件(9)、(10)可得:除 $C_1^0(0) = 1$ 之外,对所有 $j = 1, \dots, N; l = 0, \dots, k$, 有

$$C_j^l(0) = (C_r)_j^l(0) = 0, \tag{26}$$

2) 使用 2.1 节的方法求出 $C_j^l(t^1)$ ($j = 1, \dots, N; l = 0, \dots, k$), 这里 $t^1 = \Delta t$ 。

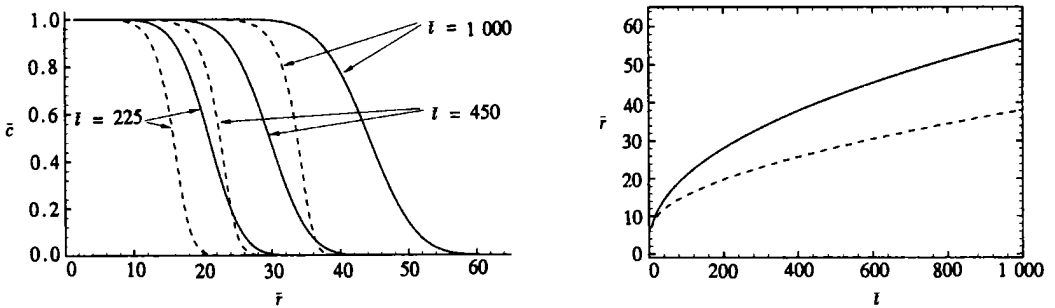
3) 将 $C_j^l(t^1)$ ($j = 1, \dots, N; l = 0, \dots, k$) 代入(25)式,使用 2.2 节的方法求出 $(C_r)_j^l(t^1)$ ($j = 1, \dots, N; l = 0, \dots, k$)。

再把 $C_j^l(t^1), (C_r)_j^l(t^1)$ 作为初始条件,重复 2)、3) 两步。该过程可循环重复计算到指定的时间。

3 数值实验情况

计算两种情况:(I) 对流—弥散情形:取 $N_D = 1, N_A = 0$; (II) 对流—弥散—吸附情形: $N_D = 1, N_A = 1, N_k = 0.1, N_q = 0.1$ 。按本文方法进行浓度计算。几个时刻浓度分布结果如图 1(a)所示。

定义 $\bar{C} = 0.01$ 为化学溶液的前沿浓度,则情形(I)和(II)的前沿运动规律如图 1(b)所示。



(a) 几个时刻渗流浓度分布图

(b) 浓度前沿($\bar{C} = 0.01$) 径向运动图

(“—”表示对流—弥散结果;“.....”表示对流—弥散—吸附结果)

图 1

图 1 是取 $P^1(I_j)$ 作为多项式空间的二阶方法的结果, 这里的结果的相应部分与[5]中的理论结果以及[1]中计算结果是吻合的, 因而计算结果是可信的。

本文方法计算的时间步长由 $N_D(\Delta t / \Delta r^2) \leq c$ 确定, 当 $R = 50, \Delta r = 50/160$, 取 $P^1(I_j)$ 作为多项式空间的二阶方法时, 必须取 $c \leq 0.08$ 计算。而取 $P^2(I_j)$ 作为多项式空间的三阶方法时, 必须取 $c \leq 0.013$ 计算。在 CPU 为 P4_1.7G, 配有内存为 256 兆的微机上进行计算, 计算到 $\bar{t} = 1000$ 单位时, 二阶方法取 $c = 0.08$ 的计算时间为 260 s, 三阶方法取 $c = 0.013$ 的计算时间为 1600 s。从计算时间上看是可以接受的, 因此方法是可行的。

[参 考 文 献]

[1] 刘慈群, 郭白奇. 有弥散和吸附的径向渗流的数值模拟[A]. 见: 周连弟, 邵维文 编. 2001 年第十五届全国水动力学研讨会文集[C]. 北京: 海洋出版社, 2001, 463—467.

- [2] Cockburn B, Shu C W. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems[J]. SIAM J Numer Anal, 1998, 35(6): 2440—2463.
- [3] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes [J]. J Comput Phys, 1988, 77(2): 439—471.
- [4] Satter A, Shum Y M, Adams W T, et al. Chemical transport in porous media with dispersion and rate-controlled adsorption[J]. Soc Pet Eng J, 1980, 20(3): 129—138.
- [5] Tang D H. Analytical solution of a velocity dependent dispersion problem[J]. Water Resour Res, 1979, 15(6): 1471—1478.

Local Discontinuous Galerkin Method for Radial Porous Flow With Dispersion and Adsorption

WANG Ji_wen^{1, 2}, LIU Ci_qun³

(1. State Key Laboratory of Fire Science,

University of Science and Technology of China, Hefei 230026, P. R. China;

2. Educational Department Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing,
Anhui University, Hefei 230039, P. R. China;

3. Institute of Porous Flow and Fluid Mechanics,

Chinese Academy of Science, Langfang, Hebei 065007, P. R. China)

Abstract: Based on the local discontinuous Galerkin methods for time-dependent convection-diffusion systems newly developed by Cockburn and Shu, according to the form of the generalized convection-diffusion equations which model the radial porous flow with dispersion and adsorption, a local discontinuous Galerkin method for radial porous flow with dispersion and adsorption was developed, a high order accurate new scheme for radial porous flow is obtained. The presented method was applied to the numerical tests of two cases of radial porous, i.e. the convection-dispersion flow and the convection-dispersion-adsorption flow, the corresponding parts of the numerical results are in good agreement with the published solutions, so the presented method is reliable. Reckoning of the computational cost also shows that the method is practicable.

Key words: dispersion; adsorption; radial porous flow; local discontinuous Galerkin method