应用数学和力学，第 8 卷第 5 期（1987年 5 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

椭圆型方程组边值问题近似解的收敛性*

李 清 溪

（武汉大学，1986年 3 月12日收到）

摘 要

本文研究了在矩形域内四阶系数不连续的椭圆型方程组边值问题近似解的收敛性问题，这对某一类弹性支承上的矩形板弯曲问题有参考价值.

一、前 言

在区域 Ω：$0<x<2a$，$0<y<2b$，我们考虑四阶系数不连继的椭圆型方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+k(x,y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=Q(x,y)\\&\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}-k(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=R(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中 $Q(x,y)$，$R(x,y)\in L_2(\Omega)$，

$$k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2h}{ab} & (\text{当}(x,y)\in\mathrm{I},\ \mathrm{III})\\[2mm] -\dfrac{2h}{ab} & (\text{当}(x,y)\in\mathrm{II},\ \mathrm{IV})\end{cases}\qquad (h\ \text{为常数})$$

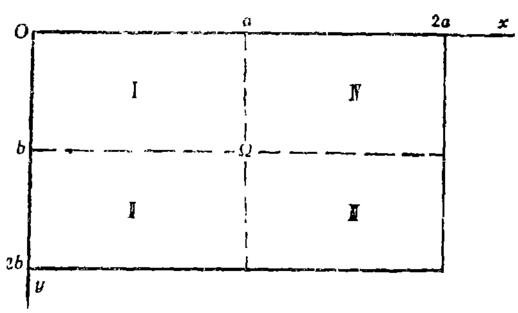

图 1

* 郭友中推荐.

在边界 $\partial\Omega$ 上具有条件：

$$\left.\begin{aligned} w|_{\partial\Omega}=\Delta w|_{\partial\Omega}=0 \\ \varphi|_{\partial\Omega}=\Delta\varphi|_{\partial\Omega}=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

还有衔接条件：在 $x=a$ 处

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_{a^-}^{a^+}=P(a,\ y)\frac{1}{2a}\int_0^{2a}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dx \\
&\left.\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right|_{a^-}^{a^+}=-P(a,\ y)\frac{1}{2a}\int_0^{2a}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dx \\
&\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{a^-}^{a^+}=0,\quad \left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right|_{a^-}^{a^+}=0 \\
&\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right|_{a^-}^{a^+}=0,\quad \left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\partial y}\right|_{a^-}^{a^+}=0 \\
&\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{a^-}^{a^+}=0,\quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{a^-}^{a^+}=0,\quad w\Big|_{a^-}^{a^+}=0,\quad \varphi\Big|_{a^-}^{a^+}=0
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

其中 $$P(x,y)\Big|_{x=a}=\begin{cases} -2\dfrac{y-b}{ab}h & (\text{当 } x=a,\ 0\leqslant y\leqslant b) \\ 2\dfrac{y-b}{ab}h & (\text{当 } x=a,\ b<y\leqslant 2b) \end{cases}$$

在 $y=b$ 处也有完全类似的条件.

问题 (1.1) (1.2) (1.3) 实际上是描述力学中一类弹性接触现象. 研究它具有重要的理论和应用意义. 当 $Q(x,\ y)\equiv$常数, $R(x,\ y)\equiv 0$, 此时 (1.1) (1.2) (1.3) 就是四块组合型弹性扭壳问题, 它的求解在工程建筑上有重要的用途. 运用求鞍点的方法[1], 可以讨论它的解之存在性. 在本文中我们主要讨论解的逼近问题, 将证明近似解的存在和收敛性. 特别是使用有限元素法, 得到了数值解的结果.

二、近似解的存在性

在 Ω 中, 考虑函数

$$\begin{aligned}
\Pi(w,\ \varphi)=&\iint_\Omega\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy \\
&-\iint_\Omega\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy \\
&+\iint_\Omega k(x,\ y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}w\,dxdy-\iint_\Omega Q(x,\ y)w\,dxdy \\
&+\iint_\Omega R(x,y)\varphi\,dxdy-\int_0^{2b}\int_0^{2a}\frac{1}{2a}\left[P(a,\ y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right]w|_{x=a}dxdy \\
&-\int_0^{2a}\int_0^{2b}\frac{1}{2b}\left[P_1(x,b)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]w|_{y=b}\,dydx
\end{aligned}$$

置K为如下函数$u(x,y)$，$(x,y)\in\Omega$的集合：$u(x,y)$在$\overline{\Omega}$上连续，在每块内（指区域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ和Ⅳ）有直到四阶的连续偏导数$\left(\text{其中}\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\text{直到边界}\partial\Omega\text{连续}\right)$，而且满足

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{a^-}^{a^+}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{b^-}^{b^+}=0$$

可以证明求解问题（1.1）（1.2）（1.3）等价于寻求一对确定的函数$(w_0',\ \varphi_0')\in K\times K$满足

$$\Pi(w_0',\ \varphi)\leqslant\Pi(w_0',\ \varphi_0')\leqslant\Pi(w,\ \varphi_0') \tag{2.1}$$

$$(\forall(w,\varphi)\in K\times K)$$

根据 Ekeland 和 Temam 定理[1]，存在唯一的$(w_0,\ \varphi_0)\in(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\times(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$满足（2.1），称$(w_0,\ \varphi_0)$为问题（1.1）（1.2）（1.3）的广义解。

现在假设$S_h\subset H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$为依赖于参数$h$的子空间，这里$H_0^1(\Omega)$，$H^2(\Omega)$为通常所指的 Sobolev 空间，而且有当$h\to 0$时，$S_h\to H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$。

在空间$S_h\times S_h$上，同样存在唯一的一对函数$(w_0^h,\ \varphi_0^h)$使得

$$\Pi(w_0^h,\ \varphi_h)\leqslant\Pi(w_0^h,\ \varphi_0^h)\leqslant\Pi(w_h,\ \varphi_0^h)\qquad(\forall(w_h,\ \varphi_h)\in S_h\times S_h) \tag{2.1$'$}$$

一般来讲，这里得到的$(w_0^h,\ \varphi_0^h)$不为$(w_0,\ \varphi_0)$，因此称为（1.1）（1.2）（1.3）的近似解。

三、近似解的收敛性

定理 1 如果在$H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$上，满足条件

1° 存在函数集合$\widetilde{H}\subset H^2\cap H_0^1$，且$\overline{\widetilde{H}}=H^2\cap H_0^1$；

2° 存在映射L_h：$\widetilde{H}\to S_h$，且

$$L_h u\xrightarrow{h\to 0}u\ (\text{强收敛}),\quad \forall u\in\widetilde{H},$$

则（2.1）′的解在$H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$上强收敛于问题（1.1）（1.2）（1.3）的解（广义解），就是说

$$\begin{cases} w_0^h\xrightarrow{h\to 0}w_0\ (\text{强收敛})\\ \varphi_0^h\xrightarrow{h\to 0}\varphi_0\ (\text{强收敛})\end{cases}$$

其中$(w_0,\ \varphi_0)$，$(w_0^h,\ \varphi_0^h)$分别为（2.1），（2.1）′的解。

证明 由于$(w_0^h,\ \varphi_0^h)$为（2.1）′的解，对任意$\varepsilon>0$和$w\in S_h$，我们有

$$\Pi(w_0^h,\ \varphi_0^h)\leqslant\Pi(w_0^h+\varepsilon w,\ \varphi_0^h) \tag{3.1}$$

但是

$$\begin{aligned}\Pi(w_0^h+\varepsilon w,\ \varphi_0^h)=&\Pi(w_0^h,\ \varphi_0^h)\\ &+\frac{1}{2}\iint_\Omega 2\varepsilon\left[\frac{\partial^2 w_0^h}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0^h}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]dxdy\\ &+\iint_\Omega\frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy\\ &+\varepsilon\iint_\Omega k(x,\ y)\ \frac{\partial^2\varphi_0^h}{\partial x\partial y}\ wdxdy-\varepsilon\iint_\Omega Q(x,y)wdxdy\end{aligned}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2a}\int_0^{2b}\int_0^{2a}\left[P(a,\ y)\frac{\partial^2\varphi_0^h}{\partial y^2}\right]w\Big|_{x=a}dxdy$$

$$-\frac{\varepsilon}{2b}\int_0^{2a}\int_0^{2b}\left[P_1(x,b)\frac{\partial^2\varphi_0^h}{\partial x^2}\right]w|_{y=b}dydx$$

所以

$$0\leqslant\frac{1}{2}\iint_\Omega 2\varepsilon\left[\frac{\partial^2 w_0^h}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0^h}{2y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 w_0^h}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]dxdy$$

$$+\iint_\Omega\frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$+\varepsilon\iint_\Omega k(x,\ y)\frac{\partial^2\varphi_0^h}{\partial x\partial y}wdxdy-\varepsilon\iint_\Omega Q(x,y)wdxdy$$

$$-\frac{\varepsilon}{2a}\int_0^{2b}\int_0^{2a}\left[P(a,\ y)\frac{\partial^2\varphi_0^h}{\partial y^2}\right]w\Big|_{x=a}dxdy$$

$$-\frac{\varepsilon}{2b}\int_0^{2a}\int_0^{2b}\left[P_1(x,b)\frac{\partial^2\varphi_0^h}{\partial x^2}\right]w|_{y=b}dydx$$

由 ε 的任意性，可知

$$\frac{1}{2}\iint_\Omega 2\left[\frac{\partial^2 w_0^h}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0^h}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 w_0^h}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]dxdy$$

$$=-\iint_\Omega k(x,\ y)\frac{\partial^2\varphi_0^h}{\partial x\partial y}wdxdy+\iint_\Omega Q(x,y)wdxdy$$

$$+\int_0^{2b}\int_0^{2a}\frac{1}{2a}\left[P(a,\ y)\frac{\partial^2\varphi_0^h}{\partial y^2}\right]w\Big|_{x=a}dxdy$$

$$+\int_0^{2a}\int_0^{2b}\frac{1}{2b}\left[P_1(x,b)\frac{\partial^2\varphi_0^h}{\partial x^2}\right]w\Big|_{y=b}dydx \tag{3.2}$$

另一方面，由 $S_h\subset H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$及$(w_0,\ \varphi_0)$与$(w_0^h,\ \varphi_0^h)$分别为其对应空间上的鞍点，不难得到

$$\Pi(w_0,\ \varphi_0^h)\leqslant\Pi(w,\ \varphi_0^h)\qquad(\forall w\in H^2\cap H_0^1)$$

应用同上面一样的方法，可以证明

$$\frac{1}{2}\iint_\Omega 2\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]dxdy$$

$$=-\iint_\Omega k(x,\ y)\frac{\partial^2\varphi_0^h}{\partial x\partial y}wdxdy+\iint_\Omega Q(x,y)wdxdy$$

$$+\int_0^{2b}\int_0^{2a}\frac{1}{2a}\left[P(a,\ y)\frac{\partial^2\varphi_0^h}{\partial y^2}\right]w|_{x=a}dxdy$$

$$+\int_0^{2a}\int_0^{2b}\frac{1}{2b}\left[P_1(x,b)\frac{\partial^2\varphi_0^h}{\partial x^2}\right]w|_{y=b}dydx\qquad(\forall w\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \tag{3.3}$$

因为 $S_h\subset H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，所以（3.3）式对$\forall w\in S_h$也当然成立。

将（3.2）－（3.3）

$$\iint_\Omega\left[\frac{\partial^2(w_0-w_0^h)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(w_0-w_0^h)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2(w_0-w_0^h)}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]dxdy=0 \tag{3.4}$$

置

$$|||u||| = \iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 u}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right]dxdy^{*)}$$

$$[u,v] = \iint_{\Omega}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial y^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right]dxdy$$

$$(u,\ v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

容易看出

$$|||w_0 - w_0^h - w|||^2 = |||w_0 - w_0^h|||^2 - 2[w_0 - w_0^h,\ w] + |||w|||^2$$

$$(\forall w \in S_h)$$

由式（3.4），我们有

$$|||w_0 - w_0^h - w|||^2 = |||w_0 - w_0^h|||^2 + |||w|||^2$$

$$|||w_0 - w_0^h||| \leqslant |||w_0 - (w_0^h + w)|||$$

$$|||w_0 - w_0^h||| \leqslant |||w_0 - w||| \qquad (\forall w \in S_h)$$

由 L_h 的定义，则有

$$|||w_0 - w_0^h||| \leqslant |||w_0 - L_h v||| \qquad (\forall v \in H^2 \cap H_0^1)$$

考虑 $h \to 0$,

$$\limsup_{h\to 0} |||w_0 - w_0^h||| \leqslant \lim_{h\to 0} |||w_0 - L_h v||| = |||w_0 - v|||$$

$$(\forall v \in H^2 \cap H_0^1)$$

上式对任意的 $v \in H^2 \cap H_0^1$ 成立，当然取 $v \equiv w_0$ 也成立。所以

$$\limsup_{h\to 0} |||w_0 - w_0^h||| \leqslant 0$$

当然有

$$\lim_{h\to 0} |||w_0 - w_0^h||| = 0$$

这就意味着 $\{w_0^h\}$ 当 $h \to 0$ 时，在 $H^2 \cap H_0^1$ 上强收敛于 w_0。类似的推理，$\{\varphi_0^h\}$ 当 $h \to 0$ 时，在 $H^2 \cap H_0^1$ 上也强收敛于 φ_0。

四、有 限 元 素 法 逼 近

在本节，我们讨论用有限元素法近似求解问题（1.1）（1.2）（1.3），并证明其近似解的收敛性。

1° 记号和定义

用有限元素法求问题（1.1）（1.2）（1.3）的数值解，首先把Ω（注意：这里Ω是矩形区域）划分为许多个三角形区域集合 T_h，h 为所有三角形 $T \in T_h$ 的最大直径。此时 T_h 为有限集，且满足

（1） $T \in \bar{\Omega}$，$\forall T \in T_h$；

*）实际上，对空间 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，$|||\cdot|||$ 与范数 $\|\cdot\|$ 等价[4]．

(2) $\bigcup_{T\in T_h} T=\overline{\Omega}$;

(3) T, $T'\in T_h$, $T\neq T'\Rightarrow T\cap T'=\phi$

或它们只有共公的顶点（或边界）.

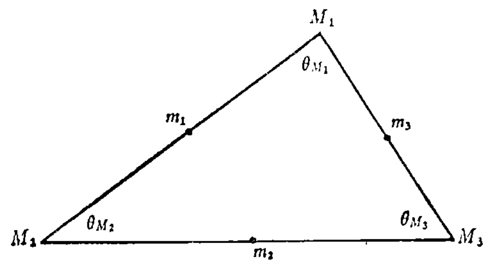

图 2

令

M表三角形$T\in T_h$的顶点

m表三角形$T\in T_h$的边之中点

$M_h=\{M|M\in\Omega,\ M\notin\partial\Omega\}$

$M'_h=\{m|m\in\Omega,\ m\notin\partial\Omega\}$

$P_k=\{$次数$\leqslant k$的x, y的多项式$\}$

为了给出空间$H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$的逼近，置

$$S^5_h=\{u_h|u_h\in C^1(\overline{\Omega}),\ u_h|_{\partial\Omega}=0;\ u_h|_T\in P_5,\ \forall T\in T_h\}$$

在这里$S^5_h\subset H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$。事实上，由$P_5\subset H^1(T)$, $\forall T\in T_h$和$S^5_h\subset C^0(\overline{\Omega})$，以及$u_h|_{\partial\Omega}=0$，可得$S^5_h\subset H^1_0(\Omega)$[4]。同样地，由$P_5\in H^2(T)$, $\forall T\in T_h$和$S^5_h\subset C^1(\overline{\Omega})$，可得$S^5_h\subset H^2(\Omega)$。所以$S^5_h$为$H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$的子空间，而且还是有限维。因此当$h\to 0$时，$S^5_h$为$H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$的逼近空间。

2° 主要结果

在这里，所谓用有限元素法求解，就是要在空间$S^5_h\times S^5_h$上寻找$\Pi(w,\ \varphi)$的鞍点，并把它作为问题（1.1）（1.2）（1.3）的数值解，然后讨论它们的收敛性。

定理 2 对于每个小的$h>0$，存在唯一的（w^h_*, φ^h_*）$\in S^5_h\times S^5_h$满足

$$\Pi(w^h_*,\ \varphi_h)\leqslant\Pi(w^h_*,\ \varphi^h_*)\leqslant\Pi(w_h,\ \varphi^h_*)\qquad(\forall(w_h,\ \varphi_h)\in S^5_h\times S^5_h)\tag{4.1}$$

由于$S^5_h\times S^5_h$为$(H^2(\Omega)\cap H^1_0)\times(H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega))$的子空间，定理结论当然成立。这样所得到的（$w^h_*$, φ^h_*）称为问题（1.1）（1.2）（1.3）的数值解。

定理 3 假设（w_0, φ_0）$\in(H^2\cap H^1_0)\times(H^2\cap H^1_0)$为满足（2.1）的问题（1.1）（1.2）（1.3）的解（广义解）；（w^h_*, φ^h_*）$\in S^5_h\times S^5_h$为满足（4.1）的问题（1.1）（1.2）（1.3）的数值解。如果当$h\to 0$时，三角形$T\in T_h$的内角θ有一致的下界$\theta_0>0$，那么

$$\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}|||w^h_*-w_0|||=0\\ \lim\limits_{h\to 0}|||\varphi^h_*-\varphi_0|||=0\end{cases}$$

证明 令

$$\widetilde{H}=\mathscr{D}(\Omega)\cap(H^2\cap H^1_0)$$

定义L_h为满足下面条件的映射：

(1) $\widetilde{H}\to S^5_h$;

(2) 对每一个$u\in\widetilde{H}$, $L_hu(P)=u(P)\qquad(\forall P\in(M_h+M'_h))$.

由此我们可以得到[2][3]

$$|||L_hu-u|||\leqslant ch\|u\|_{H^3(\Omega)}\qquad(\forall u\in\mathscr{D}(\Omega))$$

其中c为不依赖于h和u的常数。因而

$$\lim_{h\to 0}|||L_hu-u|||=0\qquad(\forall u\in\widetilde{H})$$

应用定理 1，立即可得本定理的结论。

参 考 文 献

[1] Ekeland, Temam, *Analyse Convexe et Probleme Variationnels*, North-Holland (1976).
[2] Glowinski, *Introduction to the Approximation of Elliptic Variational Inequalities*, Université Paris VI (1976).
[3] Strang, Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall (1973).
[4] Ciarlet, *Numerical Analysis of the Finite Element Method*, Les Presses de L'Université de Montréal (1976).

Convergence of the Approximate Solution for the Elliptic Boundary Value Problem

Li Qing-xi

(*Wuhan University, Wuhan*)

Abstract

The convergence of approximate solutions of boundary value problem of fourth order elliptic defferential equations with uncontinuous coefficients in a rectangular region is investigated in this paper. This is useful for certain bending problems of rectangular plate on elastic supports.