

文章编号: 1000-0887(2004)09-0889-06

# 一类非线性混沌系统混沌吸引子的冲击控制\*

马军海<sup>1,2</sup>, 任彪<sup>1</sup>, 陈予恕<sup>3</sup>

(1. 天津大学 管理学院, 天津 300072;

2. 天津财经学院, 天津 300222;

3. 天津大学 力学系, 天津 300072)

(我刊编委陈予恕来稿)

**摘要:** 在国内外研究工作的基础上, 给出了一类非线性混沌系统混沌吸引子的冲击控制方案, 运用普适方程的冲击控制理论导出了这类混沌系统混沌吸引子的冲击控制渐进稳定的条件, 利用这一条件给出了混沌吸引子渐进稳定冲击控制的区间上界, 最后给出了许多数据结果, 这些结果对于混沌吸引子的控制将有重要的参考价值。

**关键词:** 冲击控制; 混沌吸引子; 混沌; 渐进稳定

**中图分类号:** O175.14; O241.81 **文献标识码:** A

## 引 言

上个世纪 90 年代 Ott, Grebogi Yorke<sup>[1]</sup>, Pecora Carroll<sup>[2]</sup> 提出了混沌系统控制的观点和理论, 这一理论被称为 20 世纪科学的四大发现之一, 其有着广阔的应用前景, 已渗透到科学和实际问题的各个研究领域。

OGY<sup>[1]</sup> 控制方法是为了稳定控制实际上有一个稳定和一个不稳定方向的周期性轨道而设计的。其主要特征在于由于即将稳定化的周期性轨道是复杂动态系统的一部分, 通常仅仅运用局部小的瞬态控制参量扰动, 便可达到稳定控制的目的。随后 Ditto, Rauseu 和 Spano 就在周期性驱动的电 磁机弹性 带状系统的实验中有 效地控制了混沌状态。从理论的角度讲, Dressler 和 Nitsche 在 1992 年做了一个重要的观测, 假设, 对于确定的复杂系统, 动态过程是由复杂变换来描述的。为达到并有效保持稳定控制的目的, Dressler 和 Nitsche 建议通过改善 OGY<sup>[1]</sup> 控制将控制参量动态包括进来以解决这个问题。用这种新的方法, 他们能够在普通 OGY<sup>[1]</sup> 方法无效的系统 中达到稳定控制。

最近的研究进展似乎更关注非线性控制框架中的混沌同步问题, 这就将与这一特殊焦点

\* 收稿日期: 2002\_10\_25; 修订日期: 2004\_03\_25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19990150, 70271071)

作者简介: 马军海(1965—), 男, 教授, 博士, 博导(联系人, Tel: + 86\_22\_81593670; Fax: + 86\_22\_27401810; E\_mail: Lzqsly@126.com);

陈予恕,(1931—), 男, 山东肥城人、教授、博导, 俄罗斯科学院外籍院士

问题在混沌控制与混沌同步的研究结合起来<sup>[2-9]</sup>。

许多实际重要性的理论挑战仍然存在。时空混沌控制的一般方法目前并不可利用,然而这样的方法在实际环境中对于大多数控制应用来说是必要的。噪声如何影响控制和同步是另外一个有待解决的问题。在系统能够从一种状态移到相空间中远处的另一种状态的情况下的非线性控制对于进一步发展也是一个挑战。

自1990年以来,在混沌的控制和同步方面,学者们发表了成百上千篇的论文<sup>[1-9]</sup>,这些论文中的大多数都与可对系统持续连续的微扰控制方案有关。然而在模型化现实问题中,部分系统不能实施连续的微扰控制方案。因而我们有必要研究混沌系统中的冲击控制问题<sup>[5-7]</sup>,冲击控制的最关键之处是冲击控制能对那些无法持续连续扰动控制的系统实施冲击控制。这对于混沌鞍点的控制有着重要的参考价值。

## 1 不同方程的冲击控制理论<sup>[7]</sup>:

假设一非线性混沌系统为:

$$\dot{X} = f(t, X), \quad (1)$$

这里  $f: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$  是连续的,  $X \in \mathbf{R}^n$  是状态变量, 离散集  $\{\tau_i\}$  满足:

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \tau_{i+1} < \dots, i \rightarrow \infty, \tau_i \rightarrow \infty$$

$$\text{定义 1 } U(i, X) = \Delta X|_{t=\tau_i} \stackrel{\Delta}{=} X(\tau_i^+) - X(\tau_i^-), \quad (2)$$

$$\begin{cases} \dot{X} = f(t, X), & t \neq \tau_i, \Delta X = U(i, X), & t = \tau_i; \\ X(\tau_0) = X_0, t_0 \geq 0, & i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

定义 2 对  $(t, X) \in (\tau_{i-1}, \tau_i] \times \mathbf{R}^n$ ,

$$D^+ V(t, X) \stackrel{\Delta}{=} \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [V(t+h, X+h f(t, X)) - V(t, X)] \quad (4)$$

定义 3(比较系统) 假设  $V$  在  $X \in \mathbf{R}^n$  内是局部 Lipschitzian 的, 且  $\lim_{(t,y) \rightarrow (\tau_i^+, X)} V(t, y) =$

$V(\tau_i^+, X)$ , 则称  $V \in \mathcal{V}$  如果  $V \in \mathcal{V}$  并满足:

$$\begin{cases} D^+ V(t, X) \leq g(t, V(t, X)), & t \neq \tau_i, \\ V(t, X+U(i, X)) \leq \Psi_i(V(t, X)), & t = \tau_i; \end{cases} \quad (5)$$

这里  $g: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$  是连续的,  $\Psi_i: \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}_+$  是非递减的。则称系统

$$\dot{\omega} = g(t, \omega), t \neq \tau_i, \omega(\tau_i^+) = \Psi_i(\omega(\tau_i^-)), \omega(\tau_0^+) = \omega_0 \geq 0 \quad (6)$$

是(3)式的比较系统。

定义 4 函数  $\alpha$  属于集类  $\mathcal{A}$  如果  $\alpha$  满足下列条件:  $\alpha \in C[\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+]$ ,  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(x)$  对  $X$  是严格增加的,  $f(t, 0) = 0$ ,  $U(i, 0) = 0$  和  $g(t, 0) = 0$  对任意的  $i$ 。

定理 1 如下述 3 个条件满足:

- 1)  $V: \mathbf{R}_+ \times S_\rho \mapsto \mathbf{R}_+$ ,  $\rho > 0$ ,  $V \in \mathcal{V}$ ,  $D^+ V(t, X) \leq g(t, V(t, X))$ ,  $T \neq \tau_i$ ,
- 2) 存在  $\rho_0 > 0$ ,  $X \in S_{\rho_0}$ , 则  $X+U(i, X) \in S_{\rho_0}$ , 对任意的  $i$  有:

$$V(t, X+U(i, X)) \leq \Psi_i(V(t, X)), t = \tau_i$$

- 3)  $\beta(\|X\|) \leq V(t, X) \leq \alpha(\|X\|)$  这里  $\mathbf{R}_+ \times S_\rho$ ,  $\alpha(\cdot)$ ,  $\beta(\cdot) \in \mathcal{A}$

则比较系统(6)的平凡解和系统(3)的平凡解的稳定性相同。

定理 2 假设:  $g(t, \omega) = \lambda(t)\omega$ ,  $\lambda \in C^1[\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+]$ ,  $\Psi_i(\omega) = d_i\omega$ ,  $d_i \geq 0$  对任意的  $i$ ,

$\lambda(\tau_{i+1}) + \ln(\gamma d_i) \leq \lambda(\tau_i)$  对任意的  $i, \gamma > 1, \lambda(t) \geq 0$ , 则系统(3)的解是渐进稳定的。

## 2 一类非线性混沌系统混沌吸引子冲击控制的渐进稳定性

非线性混沌由下式表示<sup>[10,11]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{p} = -s(p+q), \\ \dot{q} = -q - \rho r, \\ \dot{r} = v + \rho pq \end{cases} \quad (7)$$

其中  $s(\geq 0), v(\geq 0)$  是两个正的参数。例如在参数  $s = 3, v = 5/2$  时, 系统出现混沌吸引子。令:

$$x = p - \sqrt{v/s}, y = q + \sqrt{v/s}, z = r - 1/s \quad (8)$$

则(7)式变为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -s(x+y), \\ \dot{y} = -x - y - \sqrt{vs}z - sxz, \\ \dot{z} = -\sqrt{us}x + \sqrt{usy} + sxy \end{cases} \quad (9)$$

比较(9)式的线性和非线性部分, 重写(1)式为:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + \Phi(X), X^T = (x, y, z), \\ A = \begin{pmatrix} -s & -s & 0 \\ -1 & -1 & -\sqrt{vs} \\ -\sqrt{us} & \sqrt{us} & 0 \end{pmatrix}, \Phi(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -sxz \\ sxy \end{pmatrix} \end{cases} \quad (10)$$

非线性混沌系统的冲击控制如下:

$$\dot{X} = AX + \Phi(X), t \neq \tau_i, \Delta X|_{t=\tau_i} = BX, \tau_{i+1} - \tau_i = \delta > 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

**定理 3** 假设  $B$  是哈密特(Hermite) 矩阵,  $d_1$  是矩阵  $(I + B^T)(I + B)$  的最大特征值, 且  $\rho(I + B) \leq 1, q$  是矩阵  $(A + A^T)$  的最大特征值, 如果  $0 \leq q \leq 1/\delta \ln(\xi d_1), \xi > 1$ , 则混沌系统(11)的冲击控制的渐进稳定的。

**证明** 取  $V(t, X) = X^T X$ , 对  $t \neq \tau_i$ ,

$$\begin{aligned} \text{有 } D^+ V(t, X) &= X^T A X + X^T A^T X + X^T \Phi(X) + \Phi^T(X) X \leq \\ & q X^T X + 2(sxyz - sxyz) = qV(t, X), \end{aligned}$$

可得:  $\rho(I + B) = \|I + B\|$ 。

若  $\rho_0 > 0$  和  $X \in S_{\rho_0}$ , 则

$$\begin{aligned} \|X + U(i, X)\| &= \|X + BX\| \leq \|I + B\| \|X\| = \\ & \rho(I + B) \|X\| \leq \|X\|. \end{aligned}$$

由于  $X + U(i, X) \in S_{\rho_0}$ , 所以  $\rho(I + B) \leq 1$ 。

$$\begin{aligned} \text{对 } t = \tau_i \text{ 可得: } V(\tau_i, X + BX) &= (X + BX)^T (X + BX) = \\ & X^T (I + B^T)(I + B) X \leq d_1 V(\tau_i, X). \end{aligned}$$

所以定理 1 的条件 2) 和条件 3) 满足, 则混沌系统(11)的渐进稳定性等同于以下系统(12)的渐进稳定性。

$$\dot{\omega} = q\omega, t \neq \tau_i, \omega(\tau_i^+) = d_1 \omega(\tau_i), \omega(\tau_0^+) = \omega_0 \geq 0 \quad (12)$$

由于  $0 \leq q \leq (1/\delta) \ln(\xi d_1)$ , 所以

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} q dt + \ln(\xi d_1) \leq 0, \quad \xi > 1 \quad (13)$$

$$\delta_{\max} = -\frac{\ln(\xi d_1)}{q} > 0, \quad \xi \rightarrow 1^+, \quad 0 < d_1 < 1 \quad (14)$$

### 3 数值结果

在这里我们给出关于冲击控制的一些数值结果。

实验 1 在这个实验中选着矩阵  $B$  为:

$$B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

算得:  $d_1 = (k+1)^2$  取在参数  $s = 3, v = 5/2$  时, 系统所对应的平衡点出现混沌吸引子。

此时  $A + A^T = \begin{pmatrix} -2s & -s-1 & -\sqrt{vs} \\ -s-1 & -2 & 0 \\ -\sqrt{vs} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 其特征根由方程(15)决定:

$$\lambda^3 + (s+1)\lambda^2 - [(s-1)^2 + vs]\lambda - 2vs = 0 \quad (15)$$

算得:  $q = 2.60956456$

由此可得冲击稳定控制的区域为:

$$0 \leq \delta \leq \frac{(\ln \xi + \ln(k+1)^2)}{q}, \quad -2 \leq k \leq 0, \quad \xi > 1,$$

当  $\xi \rightarrow \infty$  时, 稳定区域逼近垂线  $k = -1$ 。

若取  $s = 3, v = 5/2$  时, 系统(11)的 4 096 点的  $x, y, z$  相图如图 1; 理论计算结果表明此种情况下非线性混沌系统存在混沌吸引子。

实验 2 在这个实验中选择矩阵  $B$  为:

$$B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7 \end{pmatrix},$$

算得

$$d_1 = \begin{cases} (k+1)^2, & (k+1)^2 \geq 0.09 \\ & -2 \leq k \leq 0, \\ 0.09, & \text{其它} \end{cases}$$

可得冲击稳定控制的区域为:

$$0 \leq \delta \leq \begin{cases} -\frac{\ln \xi + \ln(k+1)^2}{q}, & (k+1)^2 \geq 0.09, \\ -\frac{\ln \xi + \ln(0.09)}{q}, & \text{其它}, \end{cases} \quad -2 \leq k \leq 0, \quad \xi > 1,$$

当  $\xi \rightarrow \infty$  时, 稳定区域逼近垂线  $k = -1$ 。

从图中可以看出随着  $\xi$  值的增加, 其稳定的“人”字形区域在变小, 当  $\xi \rightarrow \infty$  时其稳定区域逼近垂线  $k = -1$ 。这与理论结果完全吻合。

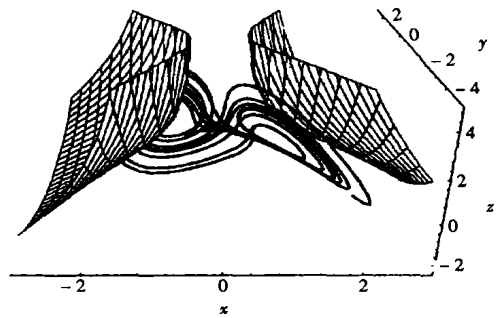


图 1  $v = 2.5, s = 3$  时系统(11)的前 4 096 点混沌吸引子的  $x, y, z$  相图

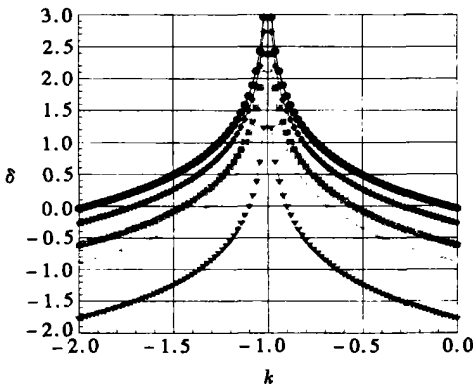


图2 实验1 稳定冲击控制的区域图  
(从上至下  $\xi$  分别为 1, 1, 2, 5, 10, 100,  
其稳定区域为中间的“人”字形区域)

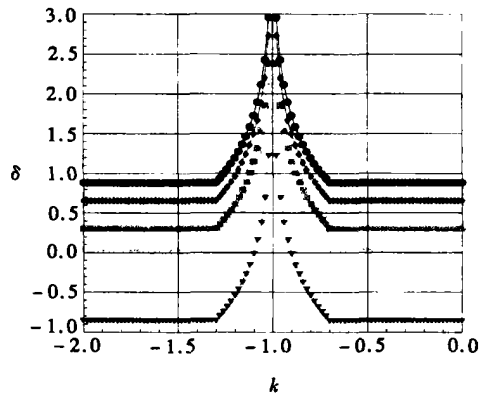


图3 实验2 稳定冲击控制的区域图  
(从上至下  $\xi$  分别为 1, 1, 2.5, 10, 100,  
其稳定区域为中间的“人”字形区域)

## 4 结论与讨论

实验结果表明本文给出了这类非线性混沌系统混沌吸引子的冲击控制方案是可行的, 运用普适方程的冲击控制理论导出了的非线性混沌系统混沌吸引子的冲击控制渐进稳定的条件中的时间间隔不是一成不变的. 对系统施加冲击控制能否将轨道保持在一个混沌相位中理论上是可能的但实际结果目前还不清楚.

### [参 考 文 献]

- [1] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Chaos controlling[J]. Phys Rev Lett, 1990, **64**(11): 1196—1199.
- [2] Pecora L M, Carroll T L. On the control and synchronization of chaos[J]. Phys Rev Lett, 1990, **64**(7): 821—827.
- [3] Ramirez Avila G M, Guisset J L, Deneubourg. Synchronization in light\_controlled oscillators[J]. Phys D, 2003, **182**(4): 254—273.
- [4] Chin Yi Chee, XU Dao\_lin. Control of the formation of projective synchronisation in lower\_dimensional discrete\_time systems[J]. Phys Lett A, 2003, **318**(12): 112—118.
- [5] Stojanovski T, Kocarev L, Parlitz U. Driving and synchronizing by chaotic impulses[J]. Phys Rev E, 1996, **54**(2): 2128—2131.
- [6] ZHU Jian\_dong, TIAN Yu\_ping. Nonlinear recursive delayed feedback control for chaotic discrete\_time systems[J]. Phys Lett A, 2003, **310**(2): 295—300.
- [7] YANG Tao, YANG Lin\_bao, YANG Chun\_mei. Impulsive synchronization of Lorenz systems[J]. Phys Lett A, 1997, **226**(6): 349—354.
- [8] 胡海岩. 力学系统混沌的主控控制[J]. 力学进展, 1996, **26**(4): 453—463.
- [9] 陈立群, 刘曾荣. 一类超混沌离散系统的控制[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(7): 661—665.
- [10] 马军海, 陈予恕. 一类非线性金融系统分岔混沌拓扑结构与全局复杂性研究(I)[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1119—1128.
- [11] 马军海, 陈予恕. 一类非线性金融系统分岔混沌拓扑结构与全局复杂性研究(II)[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(12): 1236—1242.

## Impulsive Control of Chaotic Attractors in Nonlinear Chaotic Systems

MA Jun\_hai<sup>1,2</sup>,    REN Biao<sup>1</sup>,    CHEN Yu\_shu<sup>3</sup>

(1. Management School, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;

2. Tianjin University of Finance and Economics, Tianjin 300222, P. R. China;

3. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

**Abstract:** Based on the study both domestic and abroad, an impulsive control scheme on chaotic attractors in one chaotic system was presented. By applying impulsive control theory of the universal equation, the asymptotically stable condition of impulsive control on chaotic attractors in such nonlinear chaotic system was deduced, and with it, the upper bond of the impulse interval for asymptotically stable control was given. Numerical results are presented which are considered with important reference value for control of chaotic attractors.

**Key words:** impulsive control; chaotic attractor; chaos; asymptotically stable