

# 求解瞬时温度场的有限元显式算法\*

黄 振 中

(中国气动力研究与发展中心, 1986年5月19日收到)

## 摘 要

在一公共节点为中心的各单元中, 对于线性形函数, 实际计算和数字实验表明, 温度在单元各节点上的时间导数用它在中心节点上的时间导数表示是可取和合理的。由此可在对微分方程用有限元法进行空间离散的基础上得到单个节点温度的时间导数与其周围节点温度的关系, 建立温度场的显式计算格式。它具有计算简捷的特点。用最大值原理对稳定性的分析导出了与稳式算法类似的稳定性条件。

## 一、引 言

用有限元法计算瞬时温度场, 在空间, 无论直接对微分方程进行离散<sup>[1,2]</sup>还是用热平衡原理进行离散<sup>[3,4]</sup>, 从导出的方程看, 不管对温度的时间导数项取什么差分形式, 每一时刻的温度场都要通过解一组代数方程获得。从这个意义上讲, 方程都是隐式的。因此, 人们试图寻求显式算法, 以避免解联立方程组<sup>[5,6,7]</sup>。实际上, 单元内各节点温度的时间导数可以用某种关系或近似假设彼此相互表示。由此可方便地导出计算瞬时温度场的显式有限元方程。

## 二、热传导问题的有限元方程

研究如下热传导问题

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = Q, & x_i \in \Omega, t \geq 0 & (2.1) \\ \vec{q} \cdot \vec{n} = h(T - T_s), & x_i \in \Gamma, t > 0 & (2.2) \\ T = T_0, & t = 0 & (2.3) \end{cases}$$

其中,  $\rho$  为密度,  $c$  为比热,  $Q$  为内部热源,  $T$  为温度,  $t$  为时间,  $\Omega$  为求解区域,  $\Gamma$  为  $\Omega$  的边界,  $\vec{n}$  是  $\Gamma$  的外法线方向余弦,  $T_s$  为环境温度,  $h$  为热交换系数,  $T_0$  为初始温度,  $x_i$  为笛卡尔坐标轴  $\vec{i}$  方向的坐标,  $\vec{q}$  为热流矢量。

在用有限元法求近似解时, 把  $\Omega$  划分成若干单元。设每个单元( $e$ )内有  $m$  个待定的节点温度, 插值形函数为  $N_1, N_2, \dots, N_m$ 。于是单元( $e$ )内的温度表示为

\* 张涵信推荐。

$$T^{(e)} = [N^{(e)}] \{T^{(e)}\} \quad (2.4)$$

其中

$$[N^{(e)}] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_m] \quad (2.5)$$

$$\{T^{(e)}\} = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_m]^T \quad (2.6)$$

并且设

$$Q^{(e)} = [N^{(e)}] \{Q^{(e)}\} \quad (2.7)$$

其中

$$\{Q^{(e)}\} = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_m]^T \quad (2.8)$$

在边界条件中设

$$q_{n_0} = hT_s$$

则(2.2)式可写为

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = hT - q_{n_0} \quad (2.9)$$

利用这些关系式, 根据加权余量法最终导得的常微分方程组为

$$[P] \{\dot{T}\} + [H^*] \{T\} = \{F^*\} \quad (2.10)$$

其中矩阵的阶数等于求解域内待求温度的节点数,  $[P]$ ,  $[H^*]$ ,  $\{F^*\}$  是分别由各单元的  $[P_{ji}^{(e)}]$ ,  $[H_{ji}^{*(e)}]$ ,  $\{F_j^{*(e)}\}$  在整个求解区域内装配起来的, 而

$$P_{ji}^{(e)} = \iiint_{\Omega^{(e)}} \rho c W_j^{(e)} N_i^{(e)} dv \quad (2.11)$$

$$H_{ji}^{(e)} = \iiint_{\Omega^{(e)}} \sum_i k_i \frac{\partial W_j^{(e)}}{\partial x_i} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x_i} dv \quad (2.12)$$

$$F_j^{(e)} = \iiint_{\Omega^{(e)}} [N^{(e)}] W_j^{(e)} dv \{Q^{(e)}\} \quad (2.13)$$

$$g_j^{(e)} = \iint_{\Gamma^{(e)}} q_{n_0}^{(e)} W_j^{(e)} ds \quad (2.14)$$

$$h_{ji}^{(e)} = \iint_{\Gamma^{(e)}} h^{(e)} W_j^{(e)} N_i^{(e)} ds \quad (2.15)$$

其中  $k_i$  为  $\vec{i}$  方向的导热系数, 另外

$$H_{ji}^{*(e)} = H_{ji}^{(e)} + h_{ji}^{(e)} \quad (2.16)$$

$$F_j^{*(e)} = F_j^{(e)} + g_j^{(e)} \quad (2.17)$$

显然, 积分式(2.14)和(2.15)只有在单元的周界是求解区域的实际边界时才存在, 在内部单元都是零。

对方程(2.10)通常化为下式来求解

$$\left( \frac{1}{\Delta t} [P] + \theta [H^*] \right) \{T\}_{t+\Delta t} = \left( \frac{1}{\Delta t} [P] - (1-\theta) [H^*] \right) \{T\}_t + \{F^*\} \quad (2.18)$$

其中,  $0 \leq \theta \leq 1$ . 对方程(2.10)中的时间导数项用加辽金法处理, 得  $\theta = 2/3^{[7]}$ , 用抛物线公式处理, 得  $\theta = 1/2^{[3]}$ , 若取  $\theta = 1$ , 相当于全隐式格式, 也可作变时间步长的三点差分处理<sup>[8]</sup>. 不管  $\theta$  取什么值, 即使取  $\theta = 0$ , 都必须求解联立方程组(2.18), 才能得到当前时刻的温度场. 这里统称这些为隐式算法。

方程组(2.10)中每一个方程所包含的温度对时间的导数涉及到若干个节点,其中包括矩阵[P]的一个对角线元素所对应的节点,这里称之为中心节点.以此为公共节点的周围单元构成一个隶属于每一方程的小区域,或称子域.其中各节点温度的时间导数一般是不相等的,在选用线性插值形函数的情况下,分析和计算表明,假设它们都与中心节点上的值相等,不仅不损害计算结果,而且能由此导出显式计算方程.因为这时方程组(2.10)中的每一个方程可写为

$$\sum_{(e)} \left[ \dot{T}_i \sum_{l=1}^m P_{il}^{(e)} + \sum_{l=1}^m H_{il}^{*(e)} T_l^{(e)} - F_i^{*(e)} \right] = 0 \tag{2.19}$$

其中下标*i*表示中心节点.因此,若取

$$\dot{T}_i = \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \tag{2.20}$$

则从方程(2.19)就导出一种显式有限元格式,即

$$T_i^{k+1} = T_i^k - \left[ \frac{\Delta t}{\sum_{(e)} \sum_{l=1}^m P_{il}^{(e)}} \sum_{(e)} \left( \sum_{l=1}^m H_{il}^{*(e)} T_l^{(e)} - F_i^{*(e)} \right) \right]^k \tag{2.21}$$

其中,右上标*k*表示时间层.当然还可以导出其它形式的显式格式.

利用方程(2.21)对几种导热问题进行的计算都得到了很好的结果.下面仅用对轴对称导热问题的分析和算例进行说明.

### 三、轴对称导热问题

设无热源,则轴对称导热方程为

$$\rho c r \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( r k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \tag{3.1}$$

其中*r*和*z*分别为径向和轴向坐标.划分三角形单元,构造线性插值函数,并把积分式(2.11)~(2.15)中的权函数取为形函数的指数形式

$$W_j = N_i^n, \quad n \geq 0 \tag{3.2}$$

其中*n*取整数.于是在(2.2)和(2.3)式的定解条件下,容易把方程(2.19)具体写成

$$\begin{aligned} \dot{T}_i = & \frac{-1}{\sum_{(e)} \rho c \Delta^{(e)} \left( \frac{n}{3} r_i + \bar{r}^{(e)} \right)} \left\{ \sum_{(e)} \left[ \frac{n+3}{4 \Delta^{(e)}} \left( \frac{n-1}{3} r_i + \bar{r}^{(e)} \right) \sum_{\alpha}^{j,m} (k_r^{(e)} b_i b_{\alpha} \right. \right. \\ & \left. \left. + k_z^{(e)} c_i c_{\alpha} \right) T_{\alpha}^{(e)} \right] + \frac{n+1}{6} \sum_{\beta}^{j,m} h^{(e)} l_{i\beta} \left[ ((n+2) r_i + r_{\beta}) (T_i - T_{\beta}^{(e)}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( r_i + \frac{2}{n+1} r_{\beta} \right) (T_{\beta}^{(e)} - T_s^{(e)}) \right] \right\} \tag{3.3} \end{aligned}$$

其中*i, j, m*表示三角形单元(e)的顶点的反时针方向编号.方程右端括号内的第二大项只有当边界元中的*i*和*j*或*i*和*m*同时是第三类边界条件的边界点时才存在.另外

$$\bar{r}^{(e)} = \frac{1}{3} (r_i + r_j + r_m) \tag{3.4}$$

$$\left. \begin{aligned}
 b_i &= r_j - r_m, & b_j &= r_m - r_i, & b_m &= r_i - r_j \\
 c_i &= z_m - z_j, & c_j &= z_i - z_m, & c_m &= z_j - z_i \\
 \Delta^{(e)} &= \frac{1}{2}(b_i c_j - b_j c_i) \\
 l_{ij} &= (b_m^2 + c_m^2)^{\frac{1}{2}}, & l_{im} &= (b_j^2 + c_j^2)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

在方程(3.3)中((3.5)式除外), 若令  $\bar{r}^{(e)} = r_i = r_\beta = 1$ , 则它就是求解平面导热问题的有限元方程。

有趣的是, 若在方程(3.3)中令  $n=0$ , 对于内点, 它即相当于文献[5]直接从导热方程出发借助于格林公式利用中值定理的近似积分得到的方程; 若令  $n=1$ , 则相当于文献[6]在温度的时间导数在三角形单元内处处相等的假设下利用变分原理得到的方程。

另外, 不难验证, 对于某些特殊的有限元网格, 例如在图1(与  $n=0$  对应)和图2(与

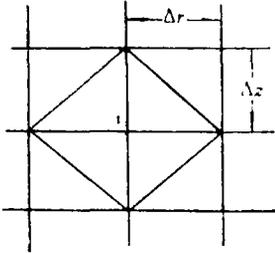


图 1

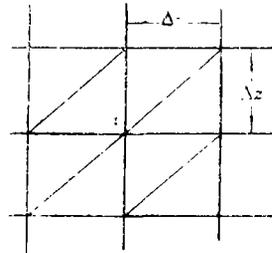


图 2

$n=1$  对应)的网格上, 关于中心点  $i$  的有限元方程(3.3)与微分方程(2.1)在该点用空间中心差分建立的差分方程具有完全相同的形式, 表明有限元方法与有限差分法具有内在的一致性。

### 四、稳定性分析

为便于对方程(2.21)进行稳定性分析, 把它改写为

$$\begin{aligned}
 T_i^{k+1} &= \left[ \left( 1 - \frac{\Delta t}{\sum_{(e)} \sum_{l=1}^m P_{il}^{(e)}} \sum_{(e)} H_{ii}^{*(e)} \right) T_i^k \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \frac{\Delta t}{\sum_{(e)} \sum_{l=1}^m P_{il}^{(e)}} \sum_{(e)} \left( \sum_{l=i} H_{il}^{*(e)} T_l^{(e)} - F_i^{*(e)} \right) \right] \right]^k \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

根据最大值原理<sup>(4,9,10)</sup>, 在时间步进计算中的稳定条件是

$$1 - \frac{\Delta t}{\sum_{(e)} \sum_{l=1}^m P_{il}^{(e)}} \sum_{(e)} H_{ii}^{*(e)} \geq 0 \quad (4.2)$$

$$- \sum_{(e)} H_{il}^{*(e)} \geq 0, \quad l \neq i \quad (4.3)$$

在轴对称情况下, 条件(4.2)可具体写为

$$\Delta t \leq \frac{\sum_{(e)} \rho c \Delta^{(e)} \left( \frac{n}{3} r_i + \bar{r}^{(e)} \right)}{\sum_{(e)} \frac{n+3}{4 \Delta^{(e)}} \left( \frac{n-1}{3} r_i + \bar{r}^{(e)} \right) (k_r^{(e)} b_i^2 + k_z^{(e)} c_i^2) + \frac{n+1}{6} \sum_{\beta} h^{(e)} l_{i\beta} [(n+2)r_i + r_{\beta}]} \quad (4.4)$$

其中，分母上的第二项只有在边界上才存在，在内点为零。对于某些特殊网格，在常物性（ $\rho c$  为常数）情况下，并  $k_r^{(e)} = k_z^{(e)} = k = \text{const}$ ，不等式(4.4)可在内点化为简单形式。如若  $\Delta r = \Delta z$ ，对图1所示的网格有

$$\Delta t \leq \frac{\Delta r^2}{2(n+2)} \frac{\rho c}{k} \quad (4.5)$$

对图2所示的网格有

$$\Delta t \leq \frac{3\Delta r^2}{4(n+2)} \frac{\rho c}{k} \quad (4.6)$$

不等式(4.4)右端分母的第二项表明，若  $h > 0$ ，则  $\Delta t$  将受到  $h$  的限制，大的  $h$  值会成为不能加大  $\Delta t$  的主要因素；若  $h$  很大，或变化激烈，会给  $\Delta t$  的选取造成困难，甚至导致不合理的结果<sup>[6]</sup>。因此遇到这种情况宜在在边界上对方程(3.3)用隐式格式求解。

不等式(4.3)实际上是稳定性对单元形状的要求。如图3所示，在轴对称情况，对中心节点  $i$  周围的任一节点  $k$ ，不等式(4.3)经过简单整理可化为

$$\frac{1}{\Delta^{(1)}} \left( \frac{n-1}{3} r_i + \bar{r}^{(1)} \right) (l_{ij}^2 + l_{jk}^2 - l_{ki}^2) + \frac{1}{\Delta^{(2)}} \left( \frac{n-1}{3} r_i + \bar{r}^{(2)} \right) \cdot (l_{km}^2 + l_{mi}^2 - l_{ik}^2) \geq 0 \quad (4.7)$$

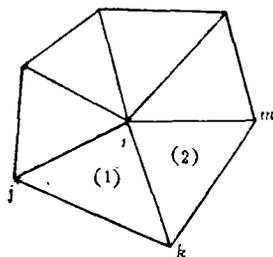


图 3

其中  $l_{ij}$  为点  $i$  和  $j$  间的距离，余类推。这是对二个共边三角形对角关系的限制。如果  $\angle ijk$  和  $\angle imk$  都小于  $\pi/2$ ，则不等式(4.7)成立，如果其中一个角大于  $\pi/2$ ，只要仍满足不等式(4.7)，仍然许可。这种限制类似于文献[11]从根据热平衡原理建立的有限元方程导出的条件，即二个共边三角形对角之和不大干  $\pi$ 。

### 五、数 字 实 验

均质球体的导热问题选为数字实验的一个对象。设初始温度为  $T_0$ ，把它突然置于环境温度为  $T_s$  的介质中均匀受热。这是一个具有解析解的球对称问题<sup>[12]</sup>，只需在柱坐标系内讨论子午面的一个象限。图4是划分的单元网格。

图5是球体不同半径位置上的无因次温度  $\Theta = (T - T_0) / (T_s - T_0)$  的数值解。对方程(3.3)，按(2.20)式的格式求解时，取  $n=1$  的结果与解析解吻合；取  $n=0$  的结果始终偏低；取  $n \geq 2$  的结果则始终偏高。表明了取  $n=1$  的最佳性。图5还绘出了  $\theta = 0.67$  时按隐式方程(2.18)的计算结果。它与解析解虽然总的说来也吻合良好，但不管  $\theta$  取什么值，球面下的若干排节点在计算初期总出现负的  $\Theta$  值。图6是表面下的第二排节点 ( $r/R = 0.9$ ) 的无因次温度用各种方法计算得的起始阶段的变化历史。从隐式格式得到的结果在一短时期内明显违背热传导规律，而显式格式的结果则好得多。

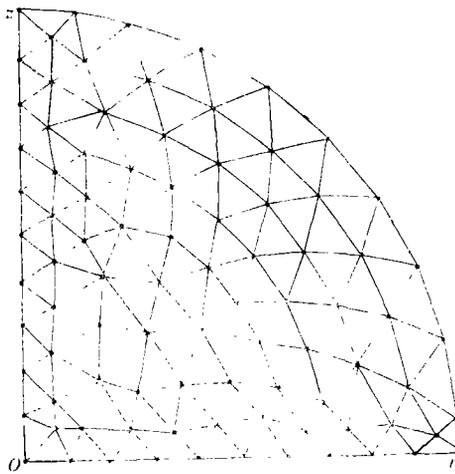
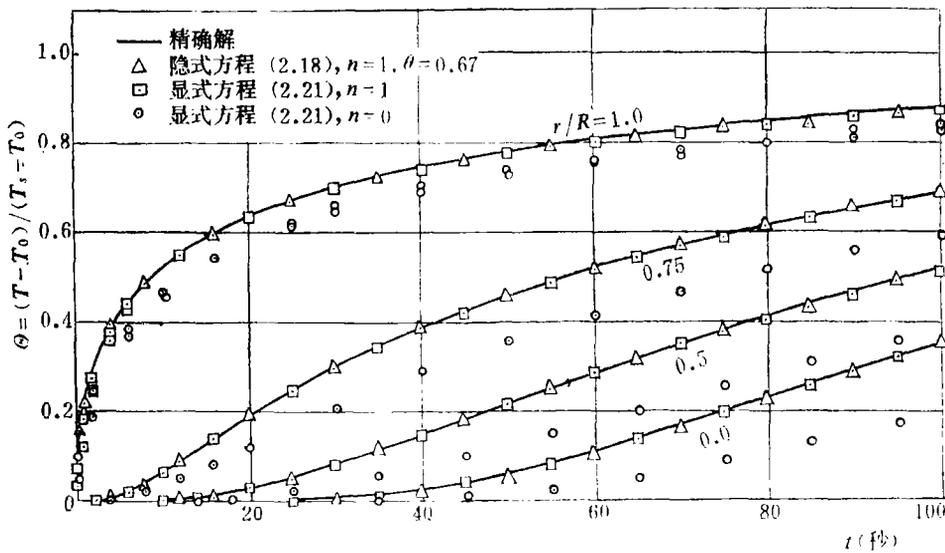
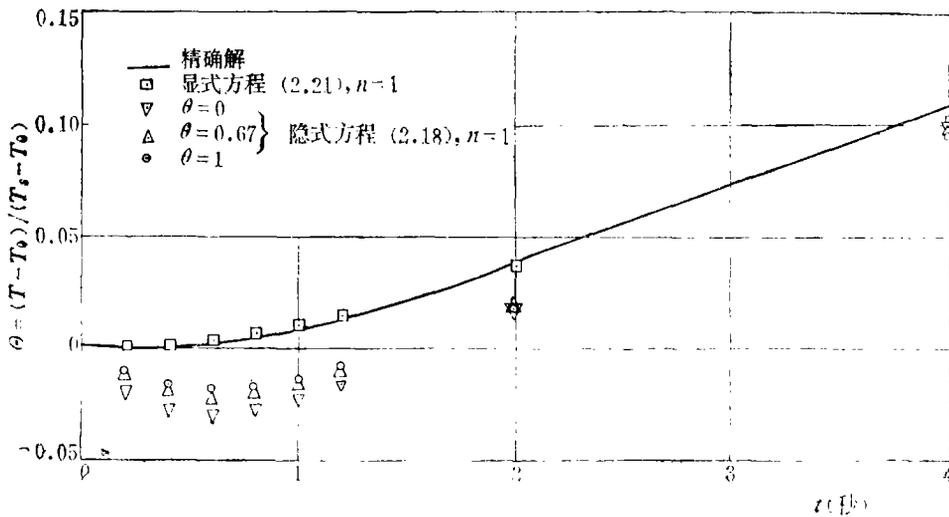


图 4 子午面内的单元网格划分



$R=0.1$ 米,  $k/\rho c=0.1443 \times 10^{-4}$ 米<sup>2</sup>/秒,  $h=60$ 米<sup>-1</sup>

图 5 球对称传热问题在柱坐标系中的数值解与精确解的比较



$R=0.1$ 米,  $k/\rho c=0.1443 \times 10^{-4}$ 米<sup>2</sup>/秒,  $h=60$ 米<sup>-1</sup>

图 6 在图 4 子午线下第二排节点 ( $r/R=0.9$ ) 的无因次温度随时间的典型变化历史

## 六、结 论

在每一个以中心节点为公共节点的各单元组成的小区域中,在线性形函数的情况下,能够以中心节点的温度关于时间的导数表示小区域中各节点的温度关于时间的导数。以此导出的求解瞬时温度场的显式有限元方程计算简捷,并便于进行稳定性分析。实际计算和本文的数字实验表明了这种算法的可行性和合理性。

### 参 考 文 献

- [1] Wilson, E. L. and R. E. Nickell, Application of the finite element method to heat conduction analysis, *Nuclear Engineering and Design*, 4 (1966), 276—286.
- [2] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science* (1971).
- [3] 王润富、陈和群、李克敌,在有限单元法中应用平衡原理求解不稳定温度场,全国计算力学会议论文(1980).
- [4] 515科研组,瞬变温度场问题的有限元解法和最大模原理,计算数学,4,4(1982).
- [5] 周顺兴,解抛物型方程的Dufort-Frankel格式和有限单元法,计算数学,4(1978),53—64.
- [6] 朱伯芳,《有限单元法原理与应用》,水利电力出版社(1979).
- [7] 刘润广,有限元法求解不稳定温度场及温度应力,全国计算力学会议论文(1980).
- [8] 孔祥谦,有限单元法求解不稳定导热问题中的时间差分格式及其变步长计算,工程热物理学报,3,3(1982).
- [9] 南京大学计算数学专业,《偏微分方程数值解法》,科学出版社(1979).
- [10] Nogotov, E. F., *Application of Numerical Heat Transfer* (1979).
- [11] 黄玉霞,带第三类边界条件的热传导方程的守恒型格式和最大模原理,计算数学,5,2(1983).
- [12] Ozisik, M. N., *Heat Conduction* (1980).

## A Finite Element Explicit Algorithm for Solving the Temporal Temperature Fields

Huang Zhen-zhong

*(China Aerodynamic Research and Development  
Center, Mianyang, Sichuan)*

### Abstract

Practical calculations and numerical experiments in this paper have shown that in elements relating to a common node it is acceptable and reasonable for derivatives of temperature with respect to time on nodes of those elements to be presented with one on common node, if linear interpolation shape function is taken. The relation between the derivative of temperature to time on a certain node and the temperature on other nodes around that node may therefore be established after discretization of the differential equation is made in space by the finite element method. Then an explicit scheme for calculating the temperature fields may be constructed. The obtained algebraic equations being simple and the procedure being straight will be its two tangible advantages and its calculating will, therefore, be fast. The stability analysis by the maximum principle, as in the example quoted, proves that the stability condition is similar to that in implicit algorithms.