

# 二流体系统中自由面及界面上的 二阶椭圆余弦波\*

刘宇陆 戴世强

(上海市应用数学和力学研究所, 1986年6月9日收到)

## 摘 要

本文考虑[1]中所建立的模式, 采用约化摄动法及PLK方法, 求得了自由面及界面上的二阶椭圆余弦波. 在退化情况下与文[3]和[4]中的结果符合.

## 一、引 言

随着海洋科学及海洋工程的发展, 人们越来越重视对海洋内波的研究. 从最近东中国海内波调查分析表明<sup>[2]</sup>, 强化分层模式适用于对东中国海的内波研究. 对于这种模式, 戴世强<sup>[1]</sup>分析并求得了界面及自由面上的二阶孤立波及其相互作用. 对于单层流体的高阶椭圆余弦波, Laitone和Fenton曾作了详细的讨论<sup>[3],[4]</sup>. 在工程中, 人们已经开始利用椭圆余弦波波型计算波浪力<sup>[5]</sup>. 为此研究二流体系统中的由自由面及界面二阶椭圆余弦波无论在理论上还是在工程应用上都有其重要的意义.

本文考虑含自由表面强化分层二流体系统, 并假定两层流体是静定分层、无粘不可压. 以文[1]中推广的Boussinesq方程为基础, 采用约化摄动法及PLK方法相结合, 得到了自由面和界面上的二阶椭圆余弦波. 在退化情况下与文[3]、[4]中的结果相一致.

## 二、基本方程及摄动展开

二流体模式如图1示. 设上下层流体的密度比为 $\sigma(\sigma = \rho_2/\rho_1, \sigma < 1)$ , 厚度比为 $r(r = H_2/H_1)$ . 略去表面及界面的张力影响, 并用如下特征量进行无量纲化: 长度 $H_1$ , 速度 $\sqrt{gH_1}$ , 时间 $\sqrt{H_1/g}$ , 记 $u_1, u_2$ 为上下层无量纲水平平均速度,  $h_1 = 1 + \zeta_1, h_2 = r(1 + \zeta_2)$ 为自由面及界面无量纲坐标, 采用Boussinesq浅水假定, 引进小参数 $\epsilon(\epsilon \ll 1)$ , 假定无量纲波幅为 $O(\epsilon)$ , 无量纲波数为 $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ , 要求动量方程精确到 $O(\epsilon^{\frac{3}{2}})$ 则可以得到如下

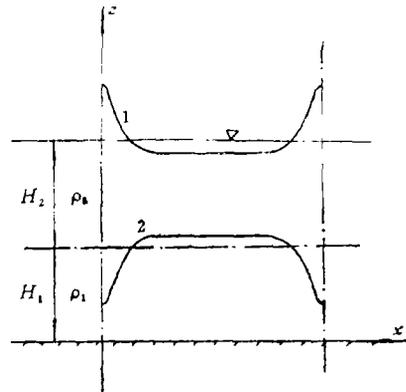


图 1

\* 中国科学院科学基金资助的课题.

基本方程<sup>[1]</sup>:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta_1 u_1) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta_2 u_2) = 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \sigma r \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u_1^2 \right) - \left( \frac{1}{3} + \sigma r \right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial t} - \frac{1}{2} \sigma r^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial t} \\ & - \left( \frac{2}{3} \zeta_1 + \sigma r \zeta_2 \right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial t} - \sigma r (\zeta_1 + r \zeta_2) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial t} + \sigma r \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} [\zeta_1 (u_2 - u_1)] \\ & - \frac{\partial}{\partial x} (\zeta_1 + \sigma r \zeta_2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} - \sigma r \frac{\partial}{\partial x} (\zeta_1 + r \zeta_2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - u_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \right) \\ & + \sigma r \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{2} \sigma r^2 \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \right] \\ & - \left( \frac{1}{12} \sigma r^3 + \frac{1}{45} \right) \frac{\partial^5 u_1}{\partial x^4 \partial t} - \frac{1}{24} \sigma r^4 \frac{\partial^5 u_2}{\partial x^4 \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + r \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u_2^2 \right) - \frac{1}{2} r \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial t} - \frac{1}{3} r^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial t} \\ & - \frac{1}{2} r \zeta_2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial t} - r \left( \frac{1}{2} \zeta_1 + \frac{2}{3} r \zeta_2 \right) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{2} r \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} [\zeta_1 (u_2 - u_1)] \\ & - \frac{\partial}{\partial x} (\zeta_1 + r \zeta_2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} - r \frac{\partial}{\partial x} (\zeta_1 + r \zeta_2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} r \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \right) \\ & + \frac{1}{3} r^2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \right) - \frac{1}{24} r^3 \frac{\partial^5 u_1}{\partial x^4 \partial t} - \frac{1}{45} r^4 \frac{\partial^5 u_2}{\partial x^4 \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{令 } U = (\zeta_1, \zeta_2, u_1, u_2)^T \quad (2.5)$$

作如下摄动展开和变换:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} k(x - c_R t), & \eta &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} l(x + c_L t) \\ c_R &= c(1 + \varepsilon_a R_1 + \varepsilon_a^2 R_2 + \dots), & c_L &= c(1 + \varepsilon_b L_1 + \varepsilon_b^2 L_2 + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$U = \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \varepsilon^3 U^{(3)} + \dots \quad (2.7)$$

其中  $\varepsilon_a, \varepsilon_b$  为波幅因子;  $c_R, c_L$  分别为右行和左行波速;  $k, l, R_i$  及  $L_i$  为待定常数, 将在消除长期项时起作用;  $c$  为线性重力波速:

$$c^2 = \frac{1}{2} [(1+r) \pm [(1-r)^2 + 4\sigma r]^{\frac{1}{2}}] \quad (2.8)$$

### 三、各阶摄动解

将(2.5)、(2.6)、(2.7)式代入到(2.1)~(2.4)式中, 采用约化摄动法的一般步骤, 可以得到各阶摄动解。

#### 1. 一阶近似解

取到  $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ , 得到一阶近似方程:

$$(M_0 - cI)k \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi} + (M_0 + cI)l \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad (3.1)$$

其中  $I$  是单位矩阵,  $M_0$  为:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & cr & 0 & 0 \\ 1 & r & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

而  $M_0 - cI$  所对应的左、右特征向量为:

$$L = \left( 1, c^2 - 1, \frac{1}{c}, \frac{1}{c}(c^2 - 1) \right), \quad R = \left( 1, \frac{1}{c^2 - r}, c, \frac{c}{c^2 - r} \right)^T \quad (3.2)$$

$M_0 + cI$  对应的左、右特征向量为:

$$\tilde{L} = \left( 1, c^2 - 1, -\frac{1}{c}, -\frac{1}{c}(c^2 - 1) \right), \quad \tilde{R} = \left( 1, \frac{1}{c^2 - r}, -c, -\frac{c}{c^2 - r} \right)^T \quad (3.3)$$

只考虑准简单右行波, (3.1) 式的解可以表示成如下形式:

$$U^{(1)} = a f_1(\xi) R \quad (3.4)$$

而  $f_1$  由下一阶近似确定.

## 2° 二阶近似解

精确到  $O(\varepsilon^{\frac{5}{2}})$  的方程如下:

$$(M_0 - cI) \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi} + (M_0 + cI) \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \eta} + S_1 f_1' + S_2 f_1 f_1' + S_3 f_1'' = 0 \quad (3.5)$$

对于 (3.5) 式分别乘以  $L, \tilde{L}$  而得到:

$$L(M_0 + cI) \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \eta} + L S_1 f_1' + L S_2 f_1 f_1' + L S_3 f_1'' = 0 \quad (3.6)$$

$$\tilde{L}(M_0 - cI) \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi} + \tilde{L} S_1 f_1' + \tilde{L} S_2 f_1 f_1' + \tilde{L} S_3 f_1'' = 0 \quad (3.7)$$

取如下参数:

$$R_1 = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha}, \quad k^2 = 3a\beta/V$$

$$\alpha = 1 + \frac{c^2 - 1}{c^2 - r}, \quad \beta = 1 + \frac{c^2 - 1}{(c^2 - r)^2}, \quad V = 1 + r^2 \frac{c^2 - 1}{c^2 - r} + 3c^2(c^2 - 1)$$

$$\text{令} \quad U^{(2)} = F^{(2)} R + G^{(2)} \tilde{R} \quad (3.8)$$

由消去长期项及只考虑右行波得到:

$$f_1'' - 3f_1 f_1' - f_1'' = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{dG^{(2)}}{d\xi} = R_1 \left[ 2f_1 f_1' - \frac{1}{2} f_1'' \right] \quad (3.10)$$

$$\frac{dF^{(2)}}{d\eta} = 0 \quad (3.11)$$

解 (3.9) ~ (3.11) 得:

$$G^{(2)} = a^2 \left[ R_1 (f_1^2 - \frac{1}{2} f_1) + Q_1 \right] \quad (3.12)$$

$$F^{(2)} = a^2 f_2 \quad (3.13)$$

$$f_1 = f_{20} + (f_{30} - f_{20}) \operatorname{cn}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{f_{30} - f_{10}} \xi \right) \quad (3.14)$$

其中  $Q_1$  为常数, 其它参数为:

$$\begin{aligned} H &= f_{30} - f_{20}, & m &= \frac{f_{30} - f_{20}}{f_{30} - f_{10}} \\ f_{10} &= -H \frac{E}{mK}, & f_{20} &= \frac{H}{m} \left( 1 - m - \frac{E}{K} \right) \\ f_{30} &= \frac{H}{m} \left( 1 - \frac{E}{K} \right), & H &= \frac{m}{2 - m - 3E/K} \end{aligned}$$

$K, E$  为第一、二类椭圆积分 (模数为  $m$ ):

$$K = \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi, \quad E = \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi$$

(3.13) 中  $f_2$  由下一阶近似确定.

### 3° 三阶近似

取到  $O(\varepsilon^{7/2})$  的方程, 利用前面的结果得到  $U^{(3)}$  所满足的方程, 经过繁冗的运算, 得到  $f_2$  所满足的方程:

$$f_2'' - (1 - 3f_1)f_2 = A_1 f_1 + A_2 f_1^2 + A_3 f_1^3 + A_0 \quad (3.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中} \quad A_1 &= - \left[ m_0 p_1 + 3s p_1 + 9q p_1 + \frac{1}{5} n (1 - 6p_1) - \frac{R_2}{R_1} - Q_1 - R_1 \left( 6p_1 - \frac{3}{2} \right) \right] \\ A_2 &= -m_0 - \frac{3}{2} s - 6q + \frac{3}{2} n + \frac{23}{4} R_1 \\ A_3 &= -4R_1 + \frac{3}{2} m_0 + \frac{3}{2} s + \frac{15}{2} q - \frac{3}{2} n \\ m_0 &= (1 + (\beta - 1)r^2)/V \\ n &= \frac{\beta}{V^2} \left[ 1 + \frac{15}{4} r^2 c^2 (c^2 - 1) + r^4 (\alpha - 1) \right] \\ s &= c^2 [1 + r(\beta - 1)]/V \\ q &= [(c^2 - 1)^2 + \sigma r]/V \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

其中  $A_0$  是常数, 由消去  $f_2$  中长期项令  $A_1 = 0$ , 得到  $R_2$ :

$$R_2 = R_1 \left[ m_0 p_1 + 3s p_1 + 9q p_1 + \frac{1}{5} n (1 - 6p_1) - Q_1 - R_1 \left( 6p_1 - \frac{3}{2} \right) \right] \quad (3.17)$$

解方程(3.10)得:

$$f_2 = C_0 + C_1 f_1 + C_2 f_1^2 \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中:} \quad C_0 &= -p_1 A_3, & C_1 &= \frac{2}{3} \left( A_2 + \frac{3}{2} A_3 \right) \\ C_2 &= -\frac{A_3}{2}, & A_0 &= 2C_2 p_2 - C_0 + C_1 p_1 \\ p_1 &= -\frac{1}{2} [f_{10} f_{20} + f_{20} f_{30} + f_{30} f_{10}] \\ p_2 &= -f_{10} f_{20} f_{30} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

于是自由面及界面的二阶修正为:

$$\xi_1^{(2)} = \varepsilon_2^2 \left[ C_0 + Q_1 + (C_1 - \frac{1}{2}R_1)f_1 + (C_2 + R_1)f_1^2 \right] \quad (3.20)$$

$$\xi_2^{(2)} = \frac{\varepsilon_2^2}{c^2 - r} \left[ C_0 + Q_1 + (C_1 - \frac{1}{2}R_1)f_1 + (C_2 + R_1)f_1^2 \right] \quad (3.21)$$

由质量守恒而得到:

$$\int_0^\lambda \xi_i^{(2)} d\xi = 0 \quad (i=1, 2) \quad (3.22)$$

$\lambda$ 为波长. 于是可以解出 $Q_1$ :

$$Q_1 = (C_2 + R_1) \left\{ f_{20}^2 - \frac{H^2}{3m^2} [(2-3m)(1-m) + (4m-2)\frac{E}{K}] \right\} - C_0 \quad (3.23)$$

至此二阶解已全部完成.

## 四、结果和讨论

记表面最大波幅为 $\varepsilon_R$ , 则有:

$$\varepsilon_a = \lambda_1 \varepsilon_R + \lambda_2 \varepsilon_R^2 + O(\varepsilon_R^3) \quad (4.1)$$

其中

$$\lambda_1 = H^{-1}, \quad \lambda_2 = -H^{-2} \left[ C_1 - \frac{1}{2}R_1 + (C_2 + R_1)(2f_{20} + H) \right] \quad (4.2)$$

于是由最大波幅表示的表面及界面升高:

$$\zeta_1 = \varepsilon_R [cn^2 u - h_1] - \varepsilon_R^2 (C_2 + R_1) [cn^2 u(1 - cn^2 u) + h_2] + O(\varepsilon_R^3) \quad (4.3)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{(c^2 - r)} \{ \varepsilon_R (cn^2 u - h_1) - \varepsilon_R^2 (C_2 + R_1) [cn^2 u(1 - cn^2 u) + h_2] + O(\varepsilon_R^3) \} \quad (4.4)$$

其中 
$$h_1 = \frac{1}{m} \left( 1 - m - \frac{E}{K} \right), \quad h_2 = \frac{1}{3m^2} \left[ \frac{E}{K} (m-2) + 2(1-m) \right] \quad (4.5)$$

而

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{f_{30} - f_{10}} \quad (4.6)$$

### 1\* 退化情况

令  $r=0$ , 得  $c^2=1$ ,  $C_2 + R_1 = \frac{3}{4}$

$$\zeta = \varepsilon_R (cn^2 u - h_1) + \varepsilon_R^2 \frac{3}{4} [cn^2 u (cn^2 u - 1) - h_2] + O(\varepsilon_R^3) \quad (4.7)$$

(4.7)与文献[4]中的结果相一致. 令 $m=1$ 得到

$$\zeta = \varepsilon_R \operatorname{sech}^2 u + \frac{3}{4} \varepsilon_R^2 [\operatorname{sech}^2 u (\operatorname{sech}^2 u - 1)] + O(\varepsilon_R^3) \quad (4.8)$$

(4.8)与文献[1]中的结果相一致.

2\* 对快模式  $c_+^2 > r$ ,  $\beta > 0$ ,  $V > 0$ , 由此得到 $\varepsilon_R > 0$ 而自由面升高:

$$\zeta' = \zeta_1 + r\zeta_2 = \frac{c^2}{c^2 - r} \zeta_1$$

有  $c^2/(c^2-r) > 0$ 。故自由及界面波峰均向上。而对慢模式当  $r < 1$  时,  $c^2 < r$ ,  $\beta < 0$ ,  $V > 0$ , 由此得到,  $\varepsilon_R < 0$ ,  $c^2/(c^2-r) < 0$ , 故自由波峰向上而界面波峰则向下, 并且有当  $\sigma \neq 1$  时,  $c^2 \ll 1$ , 于是有

$$|\xi'| \ll |\xi_1|$$

即界面波较自由面波幅大得多。

### 3° 波速

$$c_R = c[1 + \varepsilon_a R_1 + \varepsilon_a^2 R_2 + \dots] = c[1 + \lambda_1 R_1 \varepsilon_R + R_2(\lambda_1^2 + \lambda_2) \varepsilon_R^2 + \dots] \quad (4.9)$$

退化情况  $\sigma = 0$ ,  $r = 0$ , 得到  $H = 1$ ,  $m = 1$ ,  $R_1 = 1/2$ ,  $R_2 = 19/40$ ,  $C_1 = 3/4$ ,  $C_2 = 1/4$ , 这与文献[1]中的结果相一致。

周期

$$T = \frac{\lambda}{c_R} = \sqrt{\frac{m}{H}} \frac{4K}{c} \{ 1 - R_1 H^{-1} \varepsilon_R + [H^{-2} R_1 (C_1 - \frac{1}{2} R_1) + (C_2 + R_1)(2f_{20} + H) - H^{-2} R_2 + R_1^2 H^{-2}] \varepsilon_R^2 + O(\varepsilon_R^3) \} \quad (4.10)$$

以上我们得到了二阶表面及界面上的二阶椭圆余弦波, 在此工作基础上, 可以进一步研究椭圆余弦波的相互作用, 以及利用此结果计算内波与海洋结构物的相互作用。

### 参 考 文 献

- [1] 戴世强, 一个二流体系统中两对孤立波的相互作用, 中国科学, A辑, 26 (1983), 1008—1017.
- [2] 束星北等, 用单站测量确定近海内潮波的方向和速度, 海洋学报, 7 (1985), 665—673.
- [3] Laitone, E. V., The second approximation to cnoidal and solitary waves, *J. of Fluid Mech.*, 9 (1960), 430—444.
- [4] Fenton, J. D., A high-order cnoidal wave theory, *J. of Fluid Mech.*, 94, 1 (1979), 129—161.
- [5] 邱大洪, 椭圆余弦波在工程中的应用, 大连工学院学报, 21, 1 (1982), 87—96.

## Second-Order Cnoidal Waves at the Free Surface and Interface of a Two-Fluid System

Liu Yu-lu     Dai Shi-qiang

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

### Abstract

In this paper, using the PLK method and reductive perturbation method, we obtained the second approximation to cnoidal waves at the free surface and interface for the two-fluid system considered in [1]. The corresponding results in [3] and [4] may be obtained as special cases in this paper.