

含孔洞有限板与加固板的连接问题 的分区广义变分原理解法*

陈宜亨 周德交 王平

(西安交通大学, 1985年6月13日收到)

摘 要

本文提出了一种新的有限元解法, 采用复变函数作为有限单元模式, 结合运用分区广义变分原理, 解决了经贴焊加固板后的含孔洞有限板应力集中系数的计算问题, 得到了级数形式的解析解。计算实践表明, 本方法成功地分析了加固板与含孔洞有限板在焊接线上的位移连续和内力平衡问题。由于仅需划分三个单元, 故与常规有限元方法比较, 本方法可大大节约计算机内存, 提高精度, 降低计算时间。应力集中系数和焊接线处应力的数值计算结果列于诸表之中, 可供工程技术人员设计参考。

一、引 言

在船体、容器、机壳等物体的表面出现孔洞时, 工程技术人员通常采用贴焊加固板的方法来补救。但是, 这一问题的计算研究尚未有人做过。其复杂性是显而易见的, 需要解决加固板与含孔洞有限板在焊接线上的连接问题, 即焊接线上两块板的位移连续和内力平衡问题。本文采用 Laurent 或 Power 级数作为有限单元模式, 仅将整个区域划分成三个单元, 运用分区广义变分原理 (Partitioning Concept of the Generalized Variational Method), 得到了该问题的级数形式的解析解。两个电算实例的数值结果表明, 本方法足够精确地保证了焊接线上两块板的位移连续和内力平衡。应力集中系数和焊接线处的应力的数值计算结果, 使我们对加固板的选择有了定量的认识, 可供工程技术人员设计时考虑。

二、解法的基本原理

把有限板和加固板所构成的区域划分为三个单元 Σ_I 、 Σ_E 和 Σ_S 。其中 Σ_I 为有限板焊接线以内的部分; Σ_E 为有限板焊接线以外的部分; Σ_S 为加固板所占有区域 (参见图1)。忽略板面间的接触应力, 假设三个区域的弹性体均处于平面应力状态。本问题所应满足的方程和边界条件如下:

$$\sigma_{i,j} + \bar{F}_i = 0 \quad (\text{在 } \Sigma \text{ 内}) \quad (2.1)$$

* 钱伟长推荐。

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{在 } \Sigma \text{ 内}) \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \quad (\text{在 } \Sigma \text{ 内}) \quad (2.3)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad (\text{在 } \Sigma_E \text{ 边界之 } S_\sigma \text{ 上}) \quad (2.4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad (\text{在 } \Sigma_E \text{ 边界之 } S_u \text{ 上}) \quad (2.5)$$

$$t \cdot T_i^{(E)} + t \cdot T_i^{(I)} + h \cdot T_i^{(S)} = 0 \quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上}) \quad (2.6)$$

$$u_i^{(E)} = u_i^{(I)} = u_i^{(S)} \quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上}) \quad (2.7)$$

式中: A 为应变能密度; \bar{F}_i 为体力; t 和 h 分别为有限板和加固板的厚度; Γ 为焊接线; S_σ 为有限板边界线 S 中指定应力的部分; S_u 为 S 中指定位移的部分; i, j 分别为 1 或 2.

由文献[2, 5, 6]的研究可知, 采用分区广义变分原理可将 (2.6)(2.7) 这两个辅助方程归并入泛函之驻值条件中去. 取泛函:

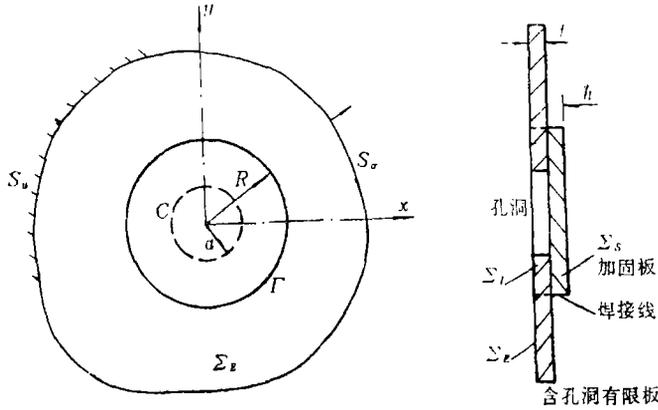


图 1

$$\begin{aligned} \Pi = & \iint_{\Sigma} \left[A(e_{ij}) - \sigma_{ij} \cdot \left(e_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} \right) - \bar{F}_i \cdot u_i \right] d\sigma \\ & - t \cdot \int_{S_\sigma} \bar{T}_i \cdot u_i ds - t \cdot \int_{S_u} T_i \cdot (u_i - \bar{u}_i) ds \\ & + h \cdot \int_{\Gamma} T_i^{(S)} \cdot (u_i^{(I)} - u_i^{(S)}) ds + t \cdot \int_{\Gamma} T_i^{(E)} \cdot (u_i^{(I)} - u_i^{(E)}) ds \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\text{并取驻值: } \delta \Pi = 0 \quad (2.9)$$

经整理可得:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \cdot \delta e_{ij} - \left(e_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} \right) \cdot \delta \sigma_{ij} - (\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i) \cdot \delta u_i \right] d\sigma \\ & + t \cdot \int_{S_\sigma} (T_i - \bar{T}_i) \cdot \delta u_i ds - t \cdot \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i) \cdot \delta T_i ds \\ & + \int_{\Gamma} \left[(t \cdot T_i^{(E)} + t \cdot T_i^{(I)} + h \cdot T_i^{(S)}) \cdot \delta u_i^{(I)} + h \cdot (u_i^{(I)} - u_i^{(S)}) \cdot \delta T_i^{(S)} \right] ds \end{aligned}$$

$$+t \cdot (u_i^{(I)} - u_i^{(E)}) \cdot \delta T_i^{(E)}] ds = 0 \quad (2.10)$$

不难发现(2.10)式和(2.1)~(2.7)式等价。也就是说,此问题的解由泛函(2.8)的驻值条件确定。其中的应变能密度 $A(e_{ij})$ 的积分运算,采用 Clepeyon 定理比较方便^[9]。在 Σ_S 中显然有:

$$\iint_{\Sigma_S} A(e_{ij}) d\sigma = \frac{h}{2} \cdot \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^{(S)} \cdot n_j \cdot u_i^{(S)} ds \quad (2.11)$$

式中 n_j 为 Γ 逆时针走向对应之外法线方向余弦。在 Σ_E 和 Σ_I 单元中,由于是两连域,可证明:

$$\iint_{\Sigma_E} A(e_{ij}) d\sigma = \frac{t}{2} \cdot \int_S \sigma_{ij}^{(E)} \cdot n_j \cdot u_i^{(E)} ds - \frac{t}{2} \cdot \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^{(E)} \cdot n_j \cdot u_i^{(E)} ds \quad (2.12)$$

$$\iint_{\Sigma_I} A(e_{ij}) d\sigma = \frac{t}{2} \cdot \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^{(I)} \cdot n_j \cdot u_i^{(I)} ds - \frac{t}{2} \cdot \int_C \sigma_{ij}^{(I)} \cdot n_j \cdot u_i^{(I)} ds \quad (2.13)$$

其中 C 为半径为 a 的圆周(参见图1)。

由专著[7],在每个单元中引用两个解析函数和它们的一阶导数: $\varphi(z)$, $\varphi'(z) = \Phi(z)$; $\omega(z)$, $\omega'(z) = \Omega(z)$ 。对应的应力和位移分量分别为:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4\text{Re}(\Phi(z)) \quad (2.14)$$

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \cdot \Phi'(z) \quad (2.15)$$

$$2G(u_1 + iu_2) = \kappa \cdot \varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \cdot \Phi(z) \quad (2.16)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; ν 为波松比; G 为剪切弹性模量; z 为复变量。

考虑到对称性,可选择 Laurent 级数为 Σ_I 和 Σ_E 中的有限单元模式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_E(z) &= \sum_{k=1}^M A_k \cdot z^{M-2k} \\ \omega_E(z) &= \sum_{k=1}^M B_k \cdot z^{M-2k} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I(z) &= \sum_{k=1}^M E_k \cdot z^{M-2k} \\ \omega_I(z) &= \sum_{k=1}^M F_k \cdot z^{M-2k} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

很容易证明(2.17)(2.18)满足位移单值条件:

$$\oint_{L_1} (u_1^{(E)} + iu_2^{(E)}) ds = 0 \quad (2.19)$$

$$\oint_{L_2} (u_1^{(I)} + iu_2^{(I)}) ds = 0 \quad (2.20)$$

其中 L_1 和 L_2 分别为 Σ_E 内环绕 Γ 的任意围道和 Σ_I 内环绕 C 的任意围道; A_k 、 B_k 、 E_k 和 F_k 为待定实常数。

在 Σ_s 内考虑到对称性有限元模式可取 Power 级数:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_S(z) &= \sum_{k=1}^M C_k \cdot z^{2k-1} \\ \omega_S(z) &= \sum_{k=1}^M D_k \cdot z^{2k-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

式中 C_k 、 D_k 也是待定实系数。

代(2.17)(2.18)(2.21)入(2.14)(2.15)(2.16)可得:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^I &= \sum_{k=1}^M E_k \cdot \varepsilon_k^{(ij)}(r, \theta) + \sum_{k=1}^M F_k X_k^{(ij)}(r, \theta) \\ u_i^I &= \sum_{k=1}^M E_k \cdot W_k^{(i)}(r, \theta) + \sum_{k=1}^M F_k \cdot V_k^{(i)}(r, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^E &= \sum_{k=1}^M A_k \cdot \xi_k^{(ij)}(r, \theta) + \sum_{k=1}^M B_k \cdot \eta_k^{(ij)}(r, \theta) \\ u_i^E &= \sum_{k=1}^M A_k \cdot G_k^{(i)}(r, \theta) + \sum_{k=1}^M B_k \cdot H_k^{(i)}(r, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^S &= \sum_{k=1}^M C_k \cdot \beta_k^{(ij)}(r, \theta) + \sum_{k=1}^M D_k \cdot \alpha_k^{(ij)}(r, \theta) \\ u_i^S &= \sum_{k=1}^M C_k \cdot P_k^{(i)}(r, \theta) + \sum_{k=1}^M D_k \cdot Q_k^{(i)}(r, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

其中 $\varepsilon_k^{(ij)}(r, \theta), \dots, Q_k^{(i)}(r, \theta)$ 均是 (r, θ) 的已知函数, 具体公式列于附录之中。

代(2.22)(2.23)(2.24)入泛函(2.8), 并令 $\delta\Pi=0$, 可得:

$$\left. \begin{aligned} \partial\Pi/\partial E_l &= 0 \\ \partial\Pi/\partial F_l &= 0 \\ \partial\Pi/\partial A_l &= 0 \\ \partial\Pi/\partial B_l &= 0 \\ \partial\Pi/\partial C_l &= 0 \\ \partial\Pi/\partial D_l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (l=1, 2, \dots, M) \quad (2.25)$$

这显然是有关 E_l 、 F_l 、 A_l 、 B_l 、 C_l 和 D_l 的 $6M$ 阶线性代数方程组, 我们记它为:

$$[K]\{\Psi\}=\{p\} \quad (2.26)$$

这里 $[K]$ 为 $6M \times 6M$ 对称矩阵; $\{\Psi\}$ 为待定实常数 $E_1, E_2, \dots, E_M; F_1, \dots, F_M; A_1, \dots, A_M; B_1, \dots, B_M; C_1, \dots, C_M; D_1, \dots, D_M$ 构成的未知列向量; $\{p\}$ 为边界线 S 上 \bar{T}_i 和 \bar{u}_i 所引出的载荷列向量。

解(2.26)式, 得到 E_k, \dots, D_k 诸实系数值, 则 Σ_l 、 Σ_E 和 Σ_S 域中任一点的应力或位移可分别由(2.22)(2.23)(2.24)式计算。将孔洞边诸点的坐标代入(2.22)式, 则应力集中系数就可得到。

三、诸矩阵元素的计算

由上节的讨论可知, 问题转化为计算矩阵 $[K]$ 和列向量 $\{D\}$ 的诸元素。由于模式(2.17)(2.18)(2.21)满足应变位移关系式(2.2), 如果再忽略体力, 则泛函(2.8)式面积分括号中的后两项为零。由(2.25)式可得 $6M$ 个等式:

$$\begin{aligned} & \frac{t}{2} \cdot \iint_{\Gamma} \left[\varepsilon_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \sum_{k=1}^M (E_k \cdot W_k^{(i)} + F_k \cdot V_k^{(i)}) + \sum_{k=1}^M (E_k \cdot \varepsilon_k^{(ij)} + F_k \cdot X_k^{(ij)}) \cdot n_j \cdot W_i^{(i)} \right] ds \\ & - \frac{t}{2} \iint_C \left[\text{被积函数同前一项} \right] ds + h \cdot \iint_{\Gamma} \sum_{k=1}^M (C_k \cdot \beta_k^{(ij)} + D_k \cdot \alpha_k^{(ij)}) \cdot n_j \cdot W_i^{(i)} ds \\ & - t \cdot \iint_{\Gamma} \sum_{k=1}^M (A_k \xi_k^{(ij)} + B_k \cdot \eta_k^{(ij)}) \cdot n_j \cdot W_i^{(i)} ds = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{t}{2} \cdot \iint_{\Gamma} \left[X_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \sum_{k=1}^M (E_k \cdot W_k^{(i)} + F_k \cdot V_k^{(i)}) + \sum_{k=1}^M (E_k \cdot \varepsilon_k^{(ij)} + F_k \cdot X_k^{(ij)}) \cdot n_j \cdot V_i^{(i)} \right] ds \\ & - \frac{t}{2} \cdot \iint_C \left[\text{被积函数同前一项} \right] ds + h \cdot \iint_{\Gamma} \sum_{k=1}^M (C_k \cdot \beta_k^{(ij)} + D_k \cdot \alpha_k^{(ij)}) \cdot n_j \cdot V_i^{(i)} ds \\ & - t \cdot \iint_{\Gamma} \sum_{k=1}^M (A_k \cdot \xi_k^{(ij)} + B_k \cdot \eta_k^{(ij)}) \cdot n_j \cdot V_i^{(i)} ds = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{t}{2} \cdot \iint_S \left[\xi_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \sum_{k=1}^M (A_k \cdot G_k^{(i)} + B_k \cdot H_k^{(i)}) + \sum_{k=1}^M (A_k \cdot \xi_k^{(ij)} + B_k \cdot \eta_k^{(ij)}) \cdot n_j \cdot G_i^{(i)} \right] ds \\ & + \frac{t}{2} \cdot \iint_{\Gamma} \left[\text{被积函数同前一项} \right] ds - t \cdot \iint_{S_u} \left[\text{被积函数同前一项} \right] ds \\ & - t \cdot \iint_{\Gamma} \xi_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \sum_{k=1}^M (E_k \cdot W_k^{(i)} + F_k \cdot V_k^{(i)}) ds = t \cdot \iint_{S_\sigma} \bar{T}_i \cdot G_i^{(i)} ds - t \cdot \iint_{S_u} \xi_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \bar{u}_i ds \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{t}{2} \cdot \iint_S \left[\eta_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \sum_{k=1}^M (A_k \cdot G_k^{(i)} + B_k \cdot H_k^{(i)}) + \sum_{k=1}^M (A_k \cdot \xi_k^{(ij)} + B_k \cdot \eta_k^{(ij)}) \cdot n_j \cdot H_i^{(i)} \right] ds \\ & + \frac{t}{2} \cdot \iint_{\Gamma} \left[\text{被积函数同前一项} \right] ds - t \cdot \iint_{S_u} \left[\text{被积函数同前一项} \right] ds \\ & - t \cdot \iint_{\Gamma} \eta_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \sum_{k=1}^M (E_k \cdot W_k^{(i)} + F_k \cdot V_k^{(i)}) ds = t \cdot \iint_{S_\sigma} \bar{T}_i \cdot H_i^{(i)} ds - t \cdot \iint_{S_u} \eta_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \bar{u}_i ds \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h}{2} \cdot \int_{\Gamma} \left[\beta_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \sum_{k=1}^M (C_k \cdot P_k^{(i)} + D_k \cdot Q_k^{(i)}) + \sum_{k=1}^M (C_k \cdot \beta_k^{(ij)} + D_k \cdot \alpha_k^{(ij)}) \cdot n_j \cdot P_i^{(i)} \right] ds \\
& + h \cdot \int_{\Gamma} \beta_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \sum_{k=1}^M (E_k \cdot W_k^{(i)} + F_k \cdot V_k^{(i)}) ds = 0 \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{t}{2} \cdot \int_{\Gamma} \left[\alpha_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \sum_{k=1}^M (C_k \cdot P_k^{(i)} + D_k \cdot Q_k^{(i)}) + \sum_{k=1}^M (C_k \cdot \beta_k^{(ij)} + D_k \cdot \alpha_k^{(ij)}) \cdot n_j \cdot Q_i^{(i)} \right] ds \\
& + h \cdot \int_{\Gamma} \alpha_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \sum_{k=1}^M (E_k \cdot W_k^{(i)} + F_k \cdot V_k^{(i)}) ds = 0 \tag{3.6}
\end{aligned}$$

其中 $l=1, 2, \dots, M$; 对 i, j 使用了张量求和约定。

把矩阵 $[K]$ 分为 36 个 $M \times M$ 的子阵, 由于对称性, 只需计算 21 个。除了 $[K_{35}]$ 、 $[K_{36}]$ 、 $[K_{45}]$ 、 $[K_{46}]$ 为零阵以外, 其余 17 个, 很容易由 (3.1)(3.2)(3.3)(3.4)(3.5)(3.6) 推出公式

$$\begin{aligned}
[K_{11}] &= \frac{t}{2} \cdot \int_{\Gamma} [\varepsilon_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot W_k^{(i)} + \varepsilon_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot W_i^{(i)}] ds - \frac{t}{2} \cdot \int_{\sigma} [\text{被积函数同前一项}] ds \\
[K_{12}] &= \frac{t}{2} \cdot \int_{\Gamma} [\varepsilon_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot V_k^{(i)} + X_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot W_i^{(i)}] ds - \frac{t}{2} \cdot \int_{\sigma} [\text{被积函数同前一项}] ds \\
[K_{13}] &= -t \cdot \int_{\Gamma} \xi_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot W_i^{(i)} ds \\
[K_{14}] &= -t \cdot \int_{\Gamma} \eta_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot W_i^{(i)} ds \\
[K_{15}] &= h \cdot \int_{\Gamma} \beta_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot W_i^{(i)} ds \\
[K_{16}] &= h \cdot \int_{\Gamma} \alpha_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot W_i^{(i)} ds \\
[K_{22}] &= \frac{t}{2} \cdot \int_{\Gamma} [X_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot V_k^{(i)} + X_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot V_i^{(i)}] ds - \frac{t}{2} \cdot \int_{\sigma} [\text{被积函数同前一项}] ds \\
[K_{23}] &= -t \cdot \int_{\Gamma} \xi_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot V_i^{(i)} ds \\
[K_{24}] &= -t \cdot \int_{\Gamma} \eta_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot V_i^{(i)} ds \\
[K_{26}] &= h \cdot \int_{\Gamma} \beta_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot V_i^{(i)} ds \\
[K_{26}] &= h \cdot \int_{\Gamma} \alpha_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot V_i^{(i)} ds \\
[K_{33}] &= \frac{t}{2} \cdot \int_{\sigma} (\xi_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot G_k^{(i)} + \xi_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot G_i^{(i)}) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{t}{2} \cdot \int_{\Gamma} (\text{被积函数同前一项}) ds - t \cdot \int_{S_{\sigma}} (\text{被积函数同前一项}) ds \\
[K_{34}] &= \frac{t}{2} \cdot \int_S (\xi_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot H_k^{(i)} + \eta_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot G_i^{(i)}) ds \\
& + \frac{t}{2} \cdot \int_{\Gamma} (\text{被积函数同前一项}) ds - t \cdot \int_{S_{\sigma}} (\text{被积函数同前一项}) ds \\
[K_{44}] &= \frac{t}{2} \cdot \int_S (\eta_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot H_k^{(i)} + \eta_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot H_i^{(i)}) ds \\
& + \frac{t}{2} \cdot \int_{\Gamma} (\text{被积函数同前一项}) ds - t \cdot \int_{S_{\sigma}} (\text{被积函数同前一项}) ds \\
[K_{55}] &= -\frac{h}{2} \cdot \int_{\Gamma} (\beta_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot P_k^{(i)} + \beta_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot P_i^{(i)}) ds \\
[K_{56}] &= -\frac{h}{2} \cdot \int_{\Gamma} (\beta_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot Q_k^{(i)} + \alpha_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot P_i^{(i)}) ds \\
[K_{66}] &= -\frac{h}{2} \cdot \int_{\Gamma} (\alpha_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot Q_k^{(i)} + \alpha_k^{(ij)} \cdot n_j \cdot P_i^{(i)}) ds
\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 k, l 分别为 $1, 2, \dots, M$; 对 i, j 用张量求和约定。

列向量 $\{p\} = (\{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}, \{p_4\}, \{p_5\}, \{p_6\})^T$, 除 $\{p_1\}, \{p_2\}, \{p_5\}, \{p_6\}$ 为零之外, 由(3.3)(3.4)可得:

$$\left. \begin{aligned}
\{p_3\} &= t \cdot \int_{S_{\sigma}} \bar{T}_i \cdot G_i^{(i)} ds - t \cdot \int_{S_{\sigma}} \xi_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \bar{u}_i ds \\
\{p_4\} &= t \cdot \int_{S_{\sigma}} \bar{T}_i \cdot H_i^{(i)} ds - t \cdot \int_{S_{\sigma}} \eta_i^{(ij)} \cdot n_j \cdot \bar{u}_i ds
\end{aligned} \right\} \tag{3.8}$$

上面(3.7)(3.8)中的所有曲线积分均可用数值方法达到所希望的精度。

四、数值结果和讨论

取图 2、图 3 所示方形板作为计算实例。

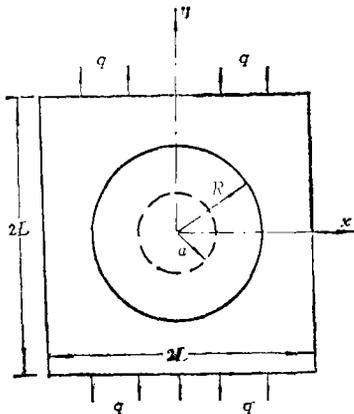


图 2

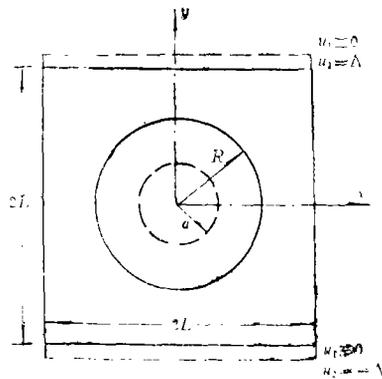


图 3

图2中, 方形板的外边界全部是应力边界, 则 $S=S_\sigma$, $S_u=0$; 图3中, 外边界既有应力边界(方形板两条垂直线), 也有位移边界(方形板两条水平线), 是一个混合边值问题。由于对称性, 诸线积分仅计算第一象限即可。我们编制了电算程序在DPS8/52计算机上进行计算, 发现诸级数项数取9, Simpson积分的分割数取8, 得到的结果已足够精确。表1和表6为加固板半径 R 变化时对应力集中系数的影响, 保持 a 、 L 、 t 、 h 为常量。表2和表7列出了 h 变化对应力集中系数的影响, 保持 a 、 R 、 L 和 t 为常量。可以发现, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 两种算例的应力集中系数均趋于未加固的孔板的应力集中系数。这证明本方法是有效的、精确的。为了便于检查在焊接线 Γ 上位移连续性和内力平衡, 程序中设计有计算 Γ 上诸点应力和位移的过程。表3和表8列出了用(2.22)(2.23)(2.24)式分别计算的 Γ 上诸点的位移, 可以发现, 位移的连续性几乎是精确地得到满足。表4和表9列出了由(2.22)(2.23)(2.24)式分别计算的 Γ 上诸点内力, 可以发现, 内力平衡条件也得到满足。这再一次证明了本方法的可靠性。值得指出的是表4和表9的第8行即是焊缝所受应力, 可供工程人员设计参考。表5和表10列出了波松比对应力集中系数的影响, 可以看到, δ 对 ν 的变化是不敏感的。

表1 图2情况 R 变化对应力集中系数 δ 之影响 ($t=1, h=1, a=1, L=10$)
未加固时 $\delta=3.084$

| | | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $R=$ | 1.05 | 1.10 | 1.20 | 1.30 | 1.40 | 1.50 | 1.60 | 1.70 |
| δ | 1.059 | 1.107 | 1.182 | 1.239 | 1.285 | 1.324 | 1.358 | 1.387 |
| 下降率 | 2.912 | 2.786 | 2.609 | 2.489 | 2.400 | 2.329 | 2.271 | 2.224 |
| $R=$ | 1.80 | 1.90 | 2.00 | 2.20 | 2.40 | 2.60 | 2.80 | 3.00 |
| δ | 1.413 | 1.437 | 1.458 | 1.493 | 1.520 | 1.541 | 1.557 | 1.569 |
| 下降率 | 2.183 | 2.146 | 2.115 | 2.066 | 2.029 | 2.001 | 1.981 | 1.966 |

表2 图2情况 h 变化对 δ 之影响 ($t=1, a=1, R=2, L=10$)

| | | | | | | | |
|----------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $h=$ | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 | 0.5 | 1.0 | 2.0 |
| δ | 3.084 | 3.081 | 3.051 | 2.775 | 1.980 | 1.458 | 0.954 |
| 下降率 | 1.000 | 1.001 | 1.011 | 1.111 | 1.558 | 2.115 | 3.233 |

对应未加固的应力集中系数为3.084。

表3 图2情况由(2.22)(2.23)(2.24)分别计算的 Γ 上诸点位移
($t=1, a=1, R=2, L=10, h=1$)

| | | | | | | | | | | | |
|-------------|---------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|----------------|
| $\theta=$ | 0.00 | 0.05 π | 0.10 π | 0.15 π | 0.20 π | 0.25 π | 0.30 π | 0.35 π | 0.40 π | 0.45 π | 0.50 π |
| $2Gu_1^x/q$ | -0.3950 | -0.3838 | -0.3518 | -0.3037 | -0.2462 | -0.1865 | -0.1312 | -0.0847 | -0.0487 | -0.0217 | $\sim 10^{-9}$ |
| $2Gu_1^y/q$ | 0.0 | 0.1476 | 0.2922 | 0.4499 | 0.6039 | 0.7552 | 0.8968 | 1.020 | 1.117 | 1.178 | 1.199 |
| $2Gu_2^x/q$ | -0.3953 | -0.3841 | -0.3522 | -0.3041 | -0.2465 | -0.1868 | -0.1314 | -0.0849 | -0.0488 | -0.0218 | $\sim 10^{-9}$ |
| $2Gu_2^y/q$ | 0.0 | 0.1476 | 0.2973 | 0.4500 | 0.6041 | 0.7554 | 0.8971 | 1.021 | 1.117 | 1.178 | 1.199 |
| $2Gu_3^x/q$ | -0.3950 | -0.3838 | -0.3518 | -0.3037 | -0.2462 | -0.1865 | -0.1312 | -0.0847 | -0.0487 | -0.0217 | $\sim 10^{-9}$ |
| $2Gu_3^y/q$ | 0.0 | 0.1476 | 0.2972 | 0.4499 | 0.6039 | 0.7552 | 0.8968 | 1.020 | 1.117 | 1.178 | 1.199 |

表 4

图 2 情况由(2.22)(2.23)(2.24)分别计算的 Γ 上诸点内力
($t=1, a=1, R=2, L=10, h=1$)

| | | | | | | | | | | | |
|-----------------|---------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|----------------|
| $\theta=$ | 0.00 | 0.05 π | 0.10 π | 0.15 π | 0.20 π | 0.25 π | 0.30 π | 0.35 π | 0.40 π | 0.45 π | 0.50 π |
| $t \cdot T_x^I$ | 0.1512 | 0.1351 | 0.0906 | 0.0271 | -0.0414 | -0.1002 | -0.1365 | -0.1425 | -0.1170 | -0.0657 | $\sim 10^{-9}$ |
| $t \cdot T_x^E$ | 0.1114 | 0.1004 | 0.0699 | 0.0265 | -0.0206 | -0.0613 | -0.0869 | -0.0922 | -0.0763 | -0.0430 | $\sim 10^{-9}$ |
| $h \cdot T_x^S$ | -0.0398 | -0.0347 | -0.0206 | -0.0006 | 0.0208 | +0.0389 | 0.0495 | 0.0503 | 0.0407 | 0.0227 | $\sim 10^{-9}$ |
| $t \cdot T_y^I$ | 0.0 | 0.1256 | 0.2352 | 0.3162 | 0.3613 | 0.3707 | 0.3508 | 0.3135 | 0.2731 | 0.2425 | 0.2312 |
| $t \cdot T_y^E$ | 0.0 | 0.2197 | 0.4253 | 0.6049 | 0.7507 | 0.8598 | 0.9341 | 0.9795 | 1.004 | 1.015 | 1.018 |
| $h \cdot T_y^S$ | 0.0 | 0.0941 | 0.1901 | 0.2888 | 0.3894 | 0.4891 | 0.5833 | 0.6659 | 0.7307 | 0.7721 | 0.7864 |
| $h \cdot T_y^S$ | 0.0398 | 0.1003 | 0.1912 | 0.2888 | 0.3900 | 0.4906 | 0.5854 | 0.6678 | 0.7318 | 0.7724 | 0.7864 |

表 5

波松比对应力集中系数的影响 ($t=1, a=1, R=2, L=10, h=1$)

| | | | | | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ν | 0.20 | 0.22 | 0.24 | 0.26 | 0.28 | 0.30 | 0.32 | 0.34 | 0.36 | 0.38 | 0.40 |
| δ | 1.461 | 1.461 | 1.460 | 1.460 | 1.459 | 1.458 | 1.456 | 1.455 | 1.453 | 1.451 | 1.449 |
| 下降率 | 2.111 | 2.111 | 2.112 | 2.112 | 2.114 | 2.115 | 2.118 | 2.120 | 2.123 | 2.125 | 2.128 |

表 6

图 3 情况 R 变化对应力集中系数 δ 的影响 ($t=1, h=1, a=1, L=10$)

| | | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $R=$ | 1.05 | 1.10 | 1.20 | 1.30 | 1.40 | 1.50 | 1.60 | 1.70 |
| δ | 1.120 | 1.215 | 1.400 | 1.718 | 1.785 | 1.844 | 1.896 | 1.941 |
| 下降率 | 3.734 | 3.442 | 2.987 | 2.434 | 2.343 | 2.268 | 2.206 | 2.155 |
| $R=$ | 1.80 | 1.90 | 2.00 | 2.20 | 2.40 | 2.60 | 2.80 | 3.00 |
| δ | 1.985 | 2.025 | 2.061 | 2.126 | 2.183 | 2.234 | 2.279 | 2.321 |
| 下降率 | 2.107 | 2.065 | 2.029 | 1.967 | 1.916 | 1.871 | 1.835 | 1.802 |

表 7

图 3 情况 h 变化对 δ 的影响 ($t=1, a=1, R=2, L=10$)

| | | | | | | | | |
|----------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $h=$ | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
| δ | 4.050 | 3.989 | 3.770 | 3.497 | 2.522 | 2.061 | 1.654 | 1.381 |
| 下降率 | 1.033 | 1.048 | 1.109 | 1.196 | 1.658 | 2.029 | 2.528 | 3.028 |

对应未加固的应力集中系数为 4.182; $\delta = \sigma_{\theta\theta} / (2G\Delta/L)$.

表 8

图 3 情况由(2.22)(2.23)(2.24)分别计算的 Γ 上诸点位移
($t=1, a=1, R=2, L=10, h=1$)

| | | | | | | | | | | | |
|-----------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------------|-----------|-----------|----------------|-----------------|----------------|
| $\theta=$ | 0.0 | 0.1 π | 0.2 π | 0.3 π | 0.4 π | 0.5 π | 0.6 π | 0.8 π | π | 1.5 π | 2 π |
| u_x^I | -0.0527 | -0.0467 | -0.0320 | -0.0163 | -0.0056 | $\sim 10^{-10}$ | 0.0056 | 0.0320 | 0.0528 | $\sim 10^{-10}$ | -0.0528 |
| u_x^E | 0.0 | 0.0419 | 0.0852 | 0.1266 | 0.1576 | 0.1692 | 0.1576 | 0.0852 | $\sim 10^{-9}$ | -0.1692 | $\sim 10^{-9}$ |
| u_x^S | -0.0528 | -0.0468 | -0.0320 | -0.0163 | -0.0056 | $\sim 10^{-10}$ | 0.0056 | 0.0320 | 0.0528 | $\sim 10^{-10}$ | -0.0528 |
| u_y^I | 0.0 | 0.0420 | 0.0853 | 0.1267 | 0.1577 | 0.1694 | 0.1577 | 0.0853 | $\sim 10^{-9}$ | -0.1694 | $\sim 10^{-9}$ |
| u_y^E | -0.0527 | -0.0467 | -0.0320 | -0.0163 | -0.0056 | $\sim 10^{-10}$ | 0.0056 | 0.0320 | 0.0528 | $\sim 10^{-10}$ | -0.0528 |
| u_y^S | 0.0 | 0.0419 | 0.0852 | 0.1266 | 0.1576 | 0.1692 | 0.1576 | 0.0852 | $\sim 10^{-9}$ | -0.1692 | $\sim 10^{-9}$ |

表 9 图 3 情况由(2.22)(2.23)(2.24)分别计算的 Γ 上诸点内力
($t=1, a=1, R=2, L=10, h=1$)

| θ | 0.0 | 0.1 π | 0.2 π | 0.3 π | 0.4 π | 0.5 π | 0.6 π | 0.8 π | π | 1.5 π | 2 π |
|----------------------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------------|-----------|-----------|----------------|----------------|----------------|
| $t \cdot T_r$ | 0.0219 | 0.0136 | -0.0046 | -0.0178 | -0.0155 | $\sim 10^{-9}$ | 0.0155 | 0.0046 | -0.0219 | $\sim 10^{-9}$ | 0.0219 |
| $t \cdot T_\theta^E$ | 0.0183 | 0.0127 | 0.0004 | -0.0091 | -0.0087 | $\sim 10^{-10}$ | 0.0087 | -0.0004 | -0.0183 | $\sim 10^{-9}$ | 0.0183 |
| $h \cdot T_\theta^S$ | -0.0036 | -0.0009 | 0.0070 | 0.0087 | 0.0068 | $\sim 10^{-10}$ | -0.0068 | -0.0050 | 0.0036 | $\sim 10^{-9}$ | -0.0036 |
| $t \cdot T_y$ | 0.0 | 0.0331 | 0.509 | 0.050 | 0.0390 | 0.0332 | 0.0390 | 0.0509 | $\sim 10^{-9}$ | -0.0332 | $\sim 10^{-9}$ |
| $t \cdot T_z$ | 0.0 | 0.0602 | 0.1064 | 0.133 | 0.1430 | 0.1447 | 0.1427 | 0.1064 | $\sim 10^{-9}$ | -0.1447 | $\sim 10^{-8}$ |
| $h \cdot T_z^S$ | 0.0 | 0.0271 | 0.0555 | 0.083 | 0.1040 | 0.1116 | 0.1037 | 0.0555 | $\sim 10^{-9}$ | -0.1116 | $\sim 10^{-9}$ |
| $h \cdot T_y^S$ | 0.0036 | 0.0271 | 0.0557 | 0.0835 | 0.1042 | 0.1116 | 0.1039 | 0.0557 | 0.0036 | 0.1116 | 0.0036 |

表 10 图 3 情况波松比对应力集中系数的影响 ($t=1, a=1, R=2, L=10, h=1$)

| ν | 0.20 | 0.22 | 0.24 | 0.26 | 0.28 | 0.30 | 0.32 | 0.34 | 0.36 | 0.38 | 0.40 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| δ | 1.856 | 1.896 | 1.936 | 1.977 | 2.019 | 2.061 | 2.104 | 2.147 | 2.191 | 2.235 | — |
| 下降率 | 2.253 | 2.206 | 2.160 | 2.115 | 2.071 | 2.029 | 1.988 | 1.948 | 1.909 | 1.871 | — |

本文的完成曾得到陆毅中教授的有益指教，特致谢意。

附 录

由模式 (2.17)(2.18)(2.21)，代入(2.14)(2.15)(2.16)式，可得 (2.22)(2.23)(2.24) 式中的诸函数为：

$$e_k^{(11)}(r, \theta) = 3(M-2k) \cdot r^{M-2k-1} \cdot \cos(M-2k-1)\theta - 2\sin\theta \cdot (M-2k)(M-2k-1) \cdot r^{M-2k-1} \cdot \sin(M-2k-2)\theta$$

$$e_k^{(12)}(r, \theta) = e_k^{(21)}(r, \theta) = -(M-2k) \cdot r^{M-2k-1} \cdot \sin(M-2k-1)\theta - 2\sin\theta \cdot (M-2k)(M-2k-1) \cdot r^{M-2k-1} \cdot \cos(M-2k-2)\theta$$

$$e_k^{(22)}(r, \theta) = (M-2k) \cdot r^{M-2k-1} \cdot \cos(M-2k-1)\theta + 2\sin\theta \cdot (M-2k)(M-2k-1) \cdot r^{M-2k-1} \cdot \sin(M-2k-2)\theta$$

$$X_k^{(11)}(r, \theta) = -(M-2k) \cdot r^{M-2k-1} \cdot \cos(M-2k-1)\theta$$

$$X_k^{(12)}(r, \theta) = X_k^{(21)}(r, \theta) = (M-2k) \cdot r^{M-2k-1} \cdot \sin(M-2k-1)\theta$$

$$X_k^{(22)}(r, \theta) = (M-2k) \cdot r^{M-2k-1} \cdot \cos(M-2k-1)\theta$$

$$W_k^{(1)}(r, \theta) = \kappa \cdot r^{M-2k} \cdot \cos(M-2k)\theta - 2\sin\theta \cdot (M-2k) \cdot r^{M-2k} \cdot \sin(M-2k-1)\theta$$

$$W_k^{(2)}(r, \theta) = \kappa \cdot r^{M-2k} \cdot \sin(M-2k)\theta - 2\sin\theta \cdot (M-2k) \cdot r^{M-2k} \cdot \cos(M-2k-1)\theta$$

$$V_k^{(1)}(r, \theta) = -r^{M-2k} \cdot \cos(M-2k)\theta$$

$$V_k^{(2)}(r, \theta) = r^{M-2k} \cdot \sin(M-2k)\theta$$

$$\xi_k^{(41)}(r, \theta) = e_k^{(41)}(r, \theta)$$

$$\eta_k^{(41)}(r, \theta) = X_k^{(41)}(r, \theta)$$

$$G_k^{(4)}(r, \theta) = W_k^{(4)}(r, \theta)$$

$$H_k^{(4)}(r, \theta) = V_k^{(4)}(r, \theta)$$

$$\beta_k^{(11)}(r, \theta) = 3(2k-1) \cdot r^{2k-2} \cdot \cos(2k-2)\theta - 2\sin\theta \cdot (2k-1)(2k-2) \cdot r^{2k-2} \cdot \sin(2k-3)\theta$$

$$\beta_k^{(12)}(r, \theta) = \beta_k^{(21)}(r, \theta) = -(2k-1) \cdot r^{2k-2} \cdot \sin(2k-2)\theta - 2\sin\theta \cdot (2k-1)(2k-2) \cdot r^{2k-2} \cdot \cos(2k-3)\theta$$

$$\beta_k^{(22)}(r, \theta) = (2k-1) \cdot r^{2k-2} \cdot \cos(2k-2)\theta + 2\sin\theta \cdot (2k-1)(2k-2) \cdot r^{2k-2} \cdot \sin(2k-3)\theta$$

$$\alpha_k^{(11)}(r, \theta) = -(2k-1) \cdot r^{2k-2} \cdot \cos(2k-2)\theta$$

$$\alpha_k^{(12)}(r, \theta) = \alpha_k^{(21)}(r, \theta) = (2k-1) \cdot r^{2k-2} \cdot \sin(2k-2)\theta$$

$$\alpha_k^{(22)}(r, \theta) = (2k-1) \cdot r^{2k-2} \cdot \cos(2k-2)\theta$$

$$P_k^{(1)}(r, \theta) = \kappa \cdot r^{2k-1} \cdot \cos(2k-1)\theta - 2\sin\theta \cdot (2k-1) \cdot r^{2k-1} \cdot \sin(2k-2)\theta$$

$$P_k^{(2)}(r, \theta) = \kappa \cdot r^{2k-1} \cdot \sin(2k-1)\theta - 2\sin\theta \cdot (2k-1) \cdot r^{2k-1} \cdot \cos(2k-2)\theta$$

$$Q_h^{(1)}(r, \theta) = -r^{2k-1} \cdot \cos(2k-1)\theta$$

$$Q_h^{(2)}(r, \theta) = r^{2k-1} \cdot \sin(2k-1)\theta$$

式中 $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$; ν 为波松比; i, j 分别等于 1 或 2.

参 考 文 献

- [1] Zhen, Y. H., On a finite element model for solving Dirichlet's problem of Laplace's equation, *Inter. J. Num. Meth. Engng.*, **18**, 5 (1982), 687—700.
- [2] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, Oxford (1975).
- [3] 陈宜亨, 两连域保角映射成环域的一种方法, *应用数学和力学*, **4**, 6 (1983), 853—860.
- [4] Zhen Y. Z., Solution of plane notch problems for a finite plate by the generalized variational method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **42**, 1 (1984), 57—70.
- [5] 龙驭球, 弹性厚板的分区广义变分原理, *应用数学和力学*, **4**, 2 (1983), 165—172.
- [6] 龙驭球, 弹性力学的分区广义变分原理, *上海力学*, **2**, 2 (1981), 1—9.
- [7] Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, P. Noordhoff Ltd, Groningen, (1953).
- [8] 钱伟长, 《变分法及有限元》, 科学出版社 (1980).
- [9] 钱伟长等, 《弹性力学》, 科学出版社 (1956).
- [10] Chen Yi-heng, On the partitioning concept of the generalized variational method and a complex function finite element model for solving stiffened problems for a finite internally cracked plate (to be published).

Solution of the Connection Problems between a Finite Holed Plate and a Stiffener by Using the Partitioning Concept of the Generalized Variational Method

Chen Yi-heng Zhou De-jiao Wang Ping

(*Xi'an Jiaotong University, Xi'an*)

Abstract

In this paper a new finite element method is presented, in which complex functions are chosen to be the finite element model and the partitioning concept of the generalized variational method is utilized. The stress concentration factors for a finite holed plate welded by a stiffener are calculated and the analytical solutions in series form are obtained. From some computer trials it is demonstrated that the problem of displacement compatibility and continuity of tractions between the holed plate and the stiffener is successfully analysed by using this method. Since only three elements need to be formulated, relatively less storage is required than the usual finite element methods. Furthermore, the accuracy of solutions is improved and the computer time requirements are considerably reduced. Numerical results of stress concentration factors and stresses along the welded-line which may be referential to engineers are shown in tables.