应用数学和力学，第8卷第7期（1987年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于散度、旋度和梯度及有关定理的注记

郭友中

（中国科学院武汉数学物理研究所）

戴振铎

（美国密西根大学电机工程和计算机科学系）

（1986年6月2日收到）

摘 要

本文是关于散度、旋度和梯度的统一定义的继续和在并矢与实复转化等方面的补充，目的在于推广外微分形式的一种表写及其应用。

文献[1]中，作者用统一的模式导出了散度、旋度和梯度的一般表达式，实际上给出了引入外微分形式的一个自然途径。这显然是很有意义的工作。

我们知道，在应用数学和力学中，常用的描述方法有标量法、张量矩阵法、矢量并矢法以及外形式法等。标量法公式冗繁，难于记忆，容易掩盖问题的实质；张量矩阵法可以在一定条件下混合使用，互相转化（参见[2]），强调了描述的坐标不变性，突出了问题的概念和本质，简化了公式，但却使用了大量角标以致书写和排印尚嫌累赘；矢量并矢法（或双点张量法）使得公式高度浓缩，外形异常简洁（参见[3]），然而在反称运算中手续仍然繁复；外微分形式集外积与外微分这两种运算于一身，克服了上述缺点，但却引入了许多新的运算法则，失掉了矢量等简洁的形式（参见[4]），一直未能为物理学和工程技术界广大学者所接受。本文采用[2,5]中由李国平教授首先提出的方法，希望保持更多的优点。

下面着重在三维 Euclid 空间E^3中进行讨论，高维情况下也有类似的表写方法。

一、外 微 分

在右旋 Descartes 坐标系$O\text{-}x_1x_2x_3$中，沿坐标架取$d\mathbf{x}_i(i=1, 2, 3)$为基矢量。矢量$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$的叉积表示的有向面积可沿有向面积$d\mathbf{x}_i\times d\mathbf{x}_j\equiv d\mathbf{S}_k(i\to j\to k\to i)$作成的基矢量分解为：

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix} d\mathbf{S}_1 & d\mathbf{S}_2 & d\mathbf{S}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} d\mathbf{x}_2\times d\mathbf{x}_3+\begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix} d\mathbf{x}_3\times d\mathbf{x}_1$$
$$+\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} d\mathbf{x}_1\times d\mathbf{x}_2 \tag{1.1}$$

对于有向体积$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$可用有向体积基矢量$(d\mathbf{x}_1\times d\mathbf{x}_2)\cdot d\mathbf{x}_3$来表示：

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}(d\mathbf{x}_1\times d\mathbf{x}_2)\cdot d\mathbf{x}_3 \tag{1.2}$$

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$的面积

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=\left[\begin{vmatrix}A_2 & A_3\\ B_2 & B_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}A_3 & A_1\\ B_3 & B_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$的体积

$$|(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}|=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix} \tag{1.4}$$

推广式(1.1)～(1.2)中的点积(·)和叉积(×)为外积(∧)，使之满足

（1）　数乘：$f(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\equiv f\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\quad(f\in R)$；

（2）　分配律：$\mathbf{A}\wedge(\mathbf{B}+\mathbf{C})\equiv\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}+\mathbf{A}\wedge\mathbf{C}$；

（3）　反称律：$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\equiv-\mathbf{B}\wedge\mathbf{A}$；

（4）　结合律：$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}\equiv\mathbf{A}\wedge(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})\equiv(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\wedge\mathbf{C}$。

这里的外积及其关系应理解为有向线段、有向面积及有向体积及其间的外积关系；结合律中说的即是有向体积（参见式(1.2)）。

有向微分线段、有向微分面积及有向微分体积分别简记为

$$d\mathbf{l}\equiv(dx_1,\ dx_2,\ dx_3)=d\mathbf{x}_1+d\mathbf{x}_2+d\mathbf{x}_3$$
$$d\mathbf{S}\equiv(dx_2dx_3,\ dx_3dx_1,\ dx_1dx_2)$$
$$=d\mathbf{x}_2\wedge d\mathbf{x}_3+d\mathbf{x}_3\wedge d\mathbf{x}_1+d\mathbf{x}_1\wedge d\mathbf{x}_3$$
$$d\mathbf{V}\equiv dx_1dx_2dx_3=d\mathbf{x}_1\wedge d\mathbf{x}_2\wedge d\mathbf{x}_3$$

我们看到，在线积分

$$\int_L[A_1(\mathbf{x})dx_1+A_2(\mathbf{x})dx_2+A_3(\mathbf{x})dx_3]$$

中出现的是一级外微分形式

$$\alpha(\mathbf{x})\equiv A_1(\mathbf{x})dx_1+A_2(\mathbf{x})dx_2+A_3(\mathbf{x})dx_3\equiv\left\langle\begin{matrix}d\mathbf{l}\\ \mathbf{A}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle$$

面积分

$$\int_S[B_1(\mathbf{x})dx_2dx_3+B_2(\mathbf{x})dx_3dx_1+B_3(\mathbf{x})dx_1dx_2]$$

中出现的是二级外微分形式

$$\beta(\mathbf{x})\equiv B_1(\mathbf{x})dx_2dx_3+B_2(\mathbf{x})dx_3dx_1+B_3(\mathbf{x})dx_1dx_2$$
$$\equiv\left\langle\begin{matrix}d\mathbf{S}\\ \mathbf{B}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle$$

体积分

$$\int_V C(\mathbf{x})dx_1dx_2dx_3$$

中出现的是三级外微分形式

$$\gamma(\mathbf{x})\equiv C(\mathbf{x})dx_1dx_2dx_3\equiv\left\langle\begin{matrix}d\mathbf{V}\\ C(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle$$

注意：上述微分矢量的乘积的确满足外积的定义，例如反称律：

$$dx_i dx_j = (\delta_{ij}-1)dx_j dx_i = d\mathbf{x}_i \wedge d\mathbf{x}_j$$

式中δ_{ij}是 Kronecker 符号。所以微分形式可以不再重写成黑体字母。

通过简单计算，我们有：

$$\left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle = (E_2F_3 - E_3F_2)dx_2dx_3 + (E_3F_1 - E_1F_3) \cdot dx_3dx_1 + (E_1F_2 - E_2F_1)dx_1dx_2 = \left\langle \begin{matrix} dS \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \tag{1.5}$$

这就是矢量代数中的叉积，又

$$\left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} dS \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} dS \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle = (E_1F_1 + E_2F_2 + E_3F_3)dx_1dx_2dx_3 = \left\langle \begin{matrix} dV \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \tag{1.6}$$

这就是矢量代数中的点积；混合积的表达式是：

$$\left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} dS \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} dV \\ [\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x})] \end{matrix} \right\rangle \tag{1.7}$$

一种外积统一了矢量代数中的两种乘积。

坐标变换也变得十分简便。试以 Descartes 坐标变到球极坐标为例，有：

$$\mathbf{x} \equiv (r\sin\phi\cos\theta,\ r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\phi)$$

其中$r \geqslant 0$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant \phi \leqslant \pi$；

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= (\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi)dr \\ &\quad + (\cos\phi\cos\theta,\ \cos\phi\sin\theta,\ -\sin\phi)rd\phi \\ &\quad + (-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0)r\sin\phi d\theta \\ &\equiv (dr)\mathbf{e}_1 + (rd\phi)\mathbf{e}_2 + (r\sin\phi d\theta)\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{1.8}$$

[1]中的几个极限过程相当于这里的外微分运算（d），它们满足下面的性质

（1） 线性：$d(\alpha+\beta) \equiv d\alpha + d\beta$，$d(f\gamma) \equiv fd\gamma$；

（2） Leibnitz 法则：$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$；

（3） 幂零性：$dd\omega = 0$；

（4） 全微性：$dH = \partial_1 H dx_1 + \partial_2 H dx_2 + \partial_3 H dx_3$。

这里$\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$，$p$是外微分形式的级。

外微分形式进行外微分后，一般级别提升一级。例如关于性质（2）有：

$$d\langle H(\mathbf{x})\rangle = \partial_1 H dx_1 + \partial_2 H dx_2 + \partial_3 H dx_3 = \left\langle \begin{matrix} dl \\ \nabla H(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathrm{grad} H(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \tag{1.9}$$

$\nabla \equiv (\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3)$是 Hamilton 算符，$H(\mathbf{x})$为梯度场；

$$d\left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle = (\partial_2 G_3(\mathbf{x}) - \partial_3 G_2(\mathbf{x}))dx_2dx_3 + (\partial_3 G_1(\mathbf{x}) - \partial_1 G_3(\mathbf{x}))dx_3dx_1 + (\partial_1 G_2(\mathbf{x}) - \partial_2 G_1(\mathbf{x})) \cdot dx_1dx_2$$

$$=\left\langle\frac{dS}{\nabla\times\mathbf{G}(\mathbf{x})}\right\rangle=\left\langle\frac{dS}{\mathrm{rot}\mathbf{G}(\mathbf{x})}\right\rangle, \tag{1.10}$$

$\mathbf{G}(\mathbf{x})$ 为旋量场；

$$d\left\langle\frac{dS}{\mathbf{F}(\mathbf{x})}\right\rangle=(\partial_1F_1(\mathbf{x})+\partial_2F_2(\mathbf{x})+\partial_3F_3(\mathbf{x}))dx_1dx_2dx_3$$

$$=\left\langle\frac{dV}{\nabla\mathbf{F}(\mathbf{x})}\right\rangle=\left\langle\frac{dV}{\mathrm{div}\mathbf{F}(\mathbf{x})}\right\rangle \tag{1.11}$$

$\mathbf{F}(\mathbf{x})$为散度场。它们都提升了一级。

一种外微分统一了矢量分析中[1]的三种运算。

二、Poincaré 定理与逆定理

对关系(1.9)和(1.10)再进行一次外微分运算，由于性质(3)有：

$$dd\langle H(\mathbf{x})\rangle=d\left\langle\frac{dl}{\nabla H(\mathbf{x})}\right\rangle=d\left\langle\frac{dl}{\mathrm{grad}H(\mathbf{x})}\right\rangle$$

$$=\left\langle\frac{dS}{\nabla\times\nabla H(\mathbf{x})}\right\rangle=\left\langle\frac{dS}{\mathrm{rot}\cdot\mathrm{grad}H(\mathbf{x})}\right\rangle=0 \tag{2.1}$$

$$dd\left\langle\frac{dl}{\mathbf{G}(\mathbf{x})}\right\rangle=d\left\langle\frac{dS}{\nabla\times\mathbf{G}(\mathbf{x})}\right\rangle=d\left\langle\frac{dS}{\mathrm{rot}\mathbf{G}(\mathbf{x})}\right\rangle$$

$$=\left\langle\frac{dS}{\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{G}(\mathbf{x})}\right\rangle=\left\langle\frac{dv}{\mathrm{div}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{G}(\mathbf{x})}\right\rangle=0 \tag{2.2}$$

幂零性即 Poincaré 定理，它统一了矢量分析中的著名公式：

$$\mathrm{rot}\cdot\mathrm{grad}H(\mathbf{x})=0,\ \mathrm{div}\cdot\mathrm{rot}G(\mathbf{x})=0 \tag{2.3}$$

因此，Gauss 定理和 Stockes 定理可以分别写成：

$$\left.\begin{aligned}\int_L\left\langle\frac{dl}{\mathbf{G}(\mathbf{x})}\right\rangle&=\int_S d\left\langle\frac{dl}{\mathbf{G}(\mathbf{x})}\right\rangle\\ \int_S\left\langle\frac{dS}{\mathbf{G}(\mathbf{x})}\right\rangle&=\int_V d\left\langle\frac{dS}{\mathbf{G}(\mathbf{x})}\right\rangle\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

第一式中L是定向曲面S的边界，第二式中S是三维区域V的边界。对于一般的区域Ω及其边界$\partial\Omega$，式(2.4)可以统一写成：

$$\int_{\partial\Omega}\omega(\mathbf{x})=\int_\Omega d\omega(\mathbf{x}) \tag{2.5}$$

或

$$\langle\partial\Omega,\ \omega\rangle=\langle\Omega,\ d\omega\rangle \tag{2.5$'$}$$

后一种形式强调了算符∂与d的对偶性，揭示了整体性与局部性之间的内在联系。

推广到高维及流形上就有更多的乘积和性质。使用这一工具，场论的很多篇幅得以大大简化（参见[5]）。

Poincaé 定理是说：外微分形式的二阶混合偏导数相等。这是微分方程和微分几何中许多可积性条件的概括。使$d\omega=0$成立的形式ω称为闭形式；存在形式η，使$d\eta=\omega$成立的形式ω称为正合形式。Poincaré 逆定理则说：正合形式是闭形式。它在物理和力学中保证了位势的存在性。它是一个局部性质，一般只适用于单连通区域。

由式(1.8)知道，每个标量场$H(\mathbf{x})$对应一个矢量场$\nabla H(\mathbf{x})$；反过来，任一矢量场$\mathbf{G}(\mathbf{x})$就不一定是某个标量场$H(\mathbf{x})$的梯度。如果回答是肯定的，则

$$d\langle H(\mathbf{x})\rangle=\left\langle\begin{matrix}dl\\ \nabla H(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}dl\\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle$$

的充要条件是

$$dd\langle H(\mathbf{x})\rangle=d\left\langle\begin{matrix}dl\\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}dS\\ \nabla\times\mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=0 \tag{2.6}$$

又如由式(1.9)知道，每一矢量场$\mathbf{G}(\mathbf{x})$必对应另一矢量场$\nabla\times\mathbf{G}(\mathbf{x})$；反过来，对任一矢量场$\mathbf{F}(\mathbf{x})$存在另一矢量场$\mathbf{G}(\mathbf{x})$，使

$$d\left\langle\begin{matrix}dl\\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}dS\\ \nabla\times\mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}dS\\ \mathbf{F}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle$$

成立的充要条件是

$$dd\left\langle\begin{matrix}dl\\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=d\left\langle\begin{matrix}dS\\ \mathbf{F}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}dV\\ \nabla\mathbf{F}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=0 \tag{2.7}$$

再如弹性理论中的协调条件实际上也是 Poincaré 逆定理（参见[6]）。热力学中的 Legendre 变换说明其中的微分是外微分，因而系统的内能、Helmhotz 能量、Gibbs 自由能以及焓都是一级外微分形式。Maxwell 关系保持了形式的闭性，即保证了 Poincaré 逆定理成立（参见[5]）。线（弹）性边值问题可用线性算子$A:U\to U^*$表示，U是实 Hilbert 空间，U^*是它的对偶空间。位移$\mathbf{u}\in U$，则力$\mathbf{f}\in U^*$。线弹性力学问题可写成

$$\mathcal{L}(\mathbf{u})\equiv A\mathbf{u}-\mathbf{f}=0 \tag{2.8}$$

记d为弱微分（变分）算子，如果线性算子$\mathcal{L}'(\mathbf{u})=A$，$A$是对称的，即

$$\langle A\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\rangle-\langle A\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1\rangle=0 \tag{2.9}$$

则$\mathcal{L}(\mathbf{u})$是势算子。此时，变分逆问题有解，即存在泛函

$$J(\mathbf{u})=2\int\langle At\mathbf{u}-\mathbf{f},\ \mathbf{u}\rangle dt=\langle A\mathbf{u}-2\mathbf{f},\ \mathbf{u}\rangle \tag{2.10}$$

这里$\langle\cdots\rangle$是对偶积。

引入 Hilbert 空间（或子空间）H_1与H_2的外积空间$H\equiv H_1\wedge H_2$，$H_1\perp H_2$，则任一$d\mathbf{v}\in H$必有$d\mathbf{u}_i\in H_i$，$i=1,2$，使$d\mathbf{v}=d\mathbf{u}_1+d\mathbf{u}_2$；令$d\mathbf{u}_1d\mathbf{u}_2\equiv d\mathbf{u}_1\wedge d\mathbf{u}_2\equiv-d\mathbf{u}_2\wedge d\mathbf{u}_1\equiv-d\mathbf{u}_2\cdot d\mathbf{u}_1$。因此，条件(2.9)实际上就是 Hibert 空间中的 Poincaré 定理，事实上，用我们已经熟悉的记法，易得：

$$dd\langle J(\mathbf{u})\rangle=d\left\langle\begin{matrix}d\mathbf{v}\\ \nabla J(\mathbf{u})\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}d\mathbf{u}_1\ d\mathbf{u}_2\\ \nabla\times\nabla J(\mathbf{u})\end{matrix}\right\rangle$$
$$=[\langle A\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\rangle-\langle A\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1\rangle]d\mathbf{u}_1d\mathbf{u}_2=0$$

这时，如果$J(\mathbf{u})$是部分已知（或灰色）的，则另一部分（例如约束条件）可以用 Lagrange 乘子法来进行识别（参见[7]）。

式（2.9）是泛函（2.10）存在的充要条件，称为 Vainberg 定理（参见[8]）。此时

$$dJ(\mathbf{u})=J(\mathbf{u}+d\mathbf{u})-J(\mathbf{u})=\langle J'(\mathbf{u}),\ d\mathbf{u}\rangle$$
$$\equiv\left\langle\begin{matrix}d\mathbf{u}\\ A\mathbf{u}-\mathbf{f}\end{matrix}\right\rangle \tag{2.11}$$

将解空间投影到由基$\{L_1,\ \cdots,\ L_n\}$张成的有限维子空间上，令$\mathbf{e}\equiv A\mathbf{u}-\mathbf{f}$称为残量，于是有近似式

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{u}^n&\equiv N_1L_1+\cdots+N_nL_n\equiv\mathbf{NL}\\ \mathbf{f}^n&\equiv M_1L_1+\cdots+M_nL_n\equiv\mathbf{ML}\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

在有限元分析中，N_i称为节点i的形函数。由式(2.11)，有

$$dJ(\mathbf{u}^n)=\langle \mathbf{e}^n,\ \mathbf{N}d\mathbf{L}\rangle \tag{2.11$'$}$$

式中$d\mathbf{L}\equiv(dL_1,\ \cdots,\ dL_n)$，$\mathbf{e}^n\equiv A\mathbf{u}^n-\mathbf{f}^n$。式(2.11)$'$左端是由变分泛函得到的有限元方程，右端则是直接由算子 A 得到的加权残量法有限元方程。前者称为 Ritz 法，后者称为 Galerkin 法，在式(2.11)成立时，它们是等价的（参见[9]）。

三、星运算与上微分

星运算或 Hodge 运算，算符用"*"表示，在E^3中可用简单方法定义：

$$\left.\begin{aligned}&*dx_i\equiv\epsilon_{ijk}dx_jdx_k, \quad &&*(dx_jdx_k)\equiv\epsilon_{ijk}dx_i\\ &*(dx_idx_jdx_k)\equiv\epsilon_{ijk}, &&*\epsilon_{ijk}\equiv dx_idx_jdx_k\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

本文指标重复不求和，ϵ_{ijk}为 Eddington 符号。

由此

$$\begin{aligned}d*d\langle H(\mathbf{x})\rangle&=d\left\langle\begin{matrix}dS\\ \nabla H(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}dS\\ \nabla\nabla H(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\\ &=\left\langle\begin{matrix}dV\\ \mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}H(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}dV\\ \Delta H(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中$\Delta\equiv\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2$称为 Laplace 算子。又如

$$\begin{aligned}d\langle F(\mathbf{x})\rangle*d\langle G(\mathbf{x})\rangle&=\left\langle\begin{matrix}dl\\ \nabla F(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}dS\\ \nabla G(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\\ &=\left\langle\begin{matrix}dV\\ \mathrm{grad}F(\mathbf{x})\cdot\mathrm{grad}G(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\\ &=\left\langle\begin{matrix}dV\\ \partial_1F(\mathbf{x})\cdot\partial_1G(\mathbf{x})+\partial_2F(\mathbf{x})\cdot\partial_2G(\mathbf{x})+\partial_3F(\mathbf{x})\cdot\partial_3G(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\end{aligned} \tag{3.3}$$

这是一个很有用的结果，特别是当$F(\mathbf{x})=G(\mathbf{x})$时，有

$$\begin{aligned}d\langle F(\mathbf{x})\rangle*d\langle F(\mathbf{x})\rangle&=\left\langle\begin{matrix}dV\\ \nabla F(\mathbf{x})\cdot\nabla F(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}dV\\ \mathrm{grad}^2F(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\\ &=\left\langle\begin{matrix}dV\\ (\partial_1F(\mathbf{x}))^2+(\partial_2F(\mathbf{x}))^2+(\partial_3F(\mathbf{x}))^2\end{matrix}\right\rangle\end{aligned} \tag{3.3$'$}$$

在四维 Lorentz 空时M^4中，取$d\mathbf{x}_1$，$d\mathbf{x}_2$，$d\mathbf{x}_3$，$d\mathbf{t}$为正交基，规取三正一负，则

$$\left.\begin{aligned}&*(dx_idt)\equiv\epsilon_{ijk}dx_jdx_k\\ &*(dx_jdx_k)\equiv\epsilon_{ijk}dtdx_i\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

令光连$c\equiv1$，$\mathbf{E}(\mathbf{x},\ t)$是电场强度，$\mathbf{H}(\mathbf{x},\ t)$是磁场强度，对二级外微分形式

$$\omega(\mathbf{x},t)\equiv\left\langle\begin{matrix}dt\\ \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\end{matrix}\right\rangle dt+\left\langle\begin{matrix}dS\\ \mathbf{H}(\mathbf{x},t)\end{matrix}\right\rangle$$

进行星运算，有

$$*\omega(\mathbf{x},t)=-\left\langle\begin{matrix}dl\\ \mathbf{H}(\mathbf{x},t)\end{matrix}\right\rangle dt+\left\langle\begin{matrix}dS\\ \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\end{matrix}\right\rangle \tag{3.5}$$

于是，Maxwell 方程组成为：

$$d\omega(\mathbf{x},t)=0,\quad d*\omega(\mathbf{x},t)=\left\langle\begin{matrix}dt\\ \rho(\mathbf{x},t)\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}dl\\ \mathbf{j}(\mathbf{x},t)\end{matrix}\right\rangle \tag{3.6}$$

式中ρ是电荷密度，$\mathbf{j}$是电流密度；在真空中成为：

$$d\omega(\mathbf{x},t)=0,\quad d*\omega(\mathbf{x},t)=0 \tag{3.6$'$}$$

对 p 级形式；算子

$$\delta \equiv *^{-1} d * (-1)^{p} \tag{3.7}$$

称为上微分，算子

$$\Delta \equiv d\delta - \delta d \tag{3.8}$$

称为de Rham 算子。

在E^3中，$*^2=1$（或$*^{-1}=*$），所以

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta}\left\langle \begin{matrix} dS \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle &= d*d*(-1)^2\left\langle \begin{matrix} dS \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle - *d*(-1)^2 d\left\langle \begin{matrix} dS \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \\
&= d*\left\langle \begin{matrix} dS \\ \nabla\times\mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle - *d*\left\langle \begin{matrix} dV \\ \nabla\mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{matrix} dS \\ \nabla\times\nabla\times\mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle - \left\langle \begin{matrix} dS \\ \nabla\nabla\mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \equiv \left\langle \begin{matrix} dS \\ \Delta\mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta}\left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle &= d*d*(-1)\left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle - *d*(-1)d\left\langle \begin{matrix} dl \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \\
&= -d*\left\langle \begin{matrix} dV \\ \nabla\mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle + *d*\left\langle \begin{matrix} dS \\ \nabla\times\mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \\
&= -\left\langle \begin{matrix} dl \\ \nabla\nabla\mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} dl \\ \nabla\times\nabla\times\mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle \equiv -\left\langle \begin{matrix} dl \\ \Delta\mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.10}$$

由此可见，在E^3中除一个与p有关的符号外，$\mathbf{\Delta}$就是Δ，因而算子$\mathbf{\Delta}$是 Laplace 算子Δ的自然推广。

四、变分原理与守恒定律

试以一个动力系统为例，$\mathbf{q}$为它的局部坐标矢量，$\mathbf{p}$为广义动量，$L(\mathbf{q}(t),\ \mathbf{p}(t),\ t)$是系统的 Lagrange 函数，设曲线$\Gamma(0)\equiv\{\mathbf{q}(t):\ t\in[t_1,\ t_2]\}$和曲线$\Gamma(\lambda)\equiv\{\mathbf{q}(t,\ \lambda)\equiv\mathbf{q}(t)+\lambda\boldsymbol{\zeta}(t):\ t\in[t_1,t_2],\ \boldsymbol{\zeta}(t_1)=\boldsymbol{\zeta}(t_2)=0\}$。记$\partial\Omega\equiv\Gamma(1)-\Gamma(\lambda)$，$\Omega$是曲线$\Gamma(\lambda)$由$\lambda=1$至$\lambda$作微小变形时所扫过的曲面。根据 Stockes 定理(2.5)′及作用量原理或变分原理，有

$$\begin{aligned}
&\langle\Gamma(0),\ L(\mathbf{q}(t),\ \mathbf{p}(t),\ t)\rangle-\langle\Gamma(\lambda),L(\mathbf{q}(t,\lambda),\ \mathbf{p}(t,\lambda),t)\rangle \\
&=\langle\partial\Omega,L\rangle=\langle\Omega,dL\rangle=0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

由此，得 Lagrange 矢量$\mathbf{E}(L)$所应满足的条件

$$dL=\sum\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right]\dot{q}_j dt\equiv\sum E_j(L)\dot{q}_j dt=0 \tag{4.2}$$

这就简洁地证明了分析力学中的一个重要定理。

作用量原理要求积分$\langle\Gamma,L\rangle$对所采用的坐标变换是不变的。一般说来，变换

$$\bar{\mathbf{q}}\equiv\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q},t,\mathbf{w}),\quad \bar{t}\equiv\bar{t}(\mathbf{q},t,\mathbf{w}) \tag{4.3}$$

组成一个r参数变换群；$\mathbf{q}$与$\mathbf{w}$都是r维矢量，且

$$\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q},t,0),\quad t=\bar{t}(\mathbf{q},t,0) \tag{4.4}$$

它们将一条路径Γ变为另一条$\bar{\Gamma}$，L必需满足一定条件才能使积分$\langle\Gamma,L\rangle$保持不变。这些条件是物理和力学中许多守恒定律的统一描述，数学上称为 Noether 定理：积分$\langle\Gamma,L\rangle$在r参数变换群(4.3)～(4.4)作用下，存在r个$E_j(L)$的不同1形式，它们沿极值路径Γ都是闭形式。

在一般情况下，定理的证明很繁复，用这里介绍的方法只要在参数空间$\mathbf{w}=\mathbf{0}$处，用式(4.1)计算dL，即得所求。

五、并矢与Green定理的推广

非线性物理采用的描述工具各家不同，国际上采用两点张量法或并矢法越来越多。这一方法特别适用于描写非线性弹性理论的有限变形，克服了有些方法容易引起混乱的缺点（参见[3]）。

讨论两个E^3空间$\bar{E}$与$\underline{E}$之张量积$\bar{\mathbf{E}}\times\underline{\mathbf{E}}$，它们的坐标系分别取为$O\text{-}x^1x^2x^3$与$O\text{-}x_1x_2x_3$，相应地引入下面的记法：

$$
\begin{aligned}
&d\bar{l}\equiv(dx^i),\quad d\underline{l}\equiv(dx_i);\\
&d\bar{S}\equiv(\epsilon_{i}{}^{j}{}_{k}dx^jdx^k),\quad d\underline{S}\equiv(\epsilon^{\ j k}_{i}dx_jdx_k);\\
&d\bar{V}\equiv dx^1dx^2dx^3,\quad d\underline{V}\equiv dx_1dx_2dx_3;\\
&\overset{*}{d\bar{l}}\equiv *d\bar{l},\quad \underset{*}{dl}\equiv *d\underline{l};\quad \overset{*}{d\bar{S}}\equiv *d\bar{S},\quad \underset{*}{dS}\equiv *d\underline{S};\\
&\left\langle \underset{\bar{\mathbf{A}}}{d\underline{l}\;\;d\bar{l}}\right\rangle\equiv A_i{}^{}_{j}dx_idx^j,\cdots
\end{aligned}
$$

其中ϵ^{ijk}与ϵ_{ijk}以及$\epsilon_i{}^{jk}$与$\epsilon^{\ j}_{i\ k}$等同义，$\bar{\mathbf{A}}$是二阶张量。我们知道，对它可以用矩阵或矢量来表示（参见[9]）：

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{A}}&\equiv[\mathbf{A}^1,\ \mathbf{A}^2,\ \mathbf{A}^3]\equiv[\mathbf{A}^j]\\
&\equiv[\mathbf{A}_i]\equiv[A_i^j]\qquad(i,\ j=1,\ 2,\ 3).
\end{aligned}
$$

张量$\bar{\mathbf{A}}$与$\bar{\mathbf{B}}$的乘积理解为

$$
\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}\equiv[A_k^i\,B_j^k]
$$

为了方便起见，本节采用了 Einstein 求和约定：同一项中两个指标相同时，须对这一指标由1～3求和，如上面的指标k。

矢量代数中的点积与叉积，在二阶张量中将有四种乘积，称为双点叉积，它们的符号是：$:$，$\underset{\cdot}{\times}$，$\overset{\cdot}{\times}$，$\overset{\times}{\times}$。利用外积运算，也可将之统一进行处理，例如

$$
\begin{aligned}
\left\langle \underset{\bar{\mathbf{A}}}{d\underline{S}\;\;d\bar{l}}\right\rangle\left\langle \underset{\bar{\mathbf{B}}}{d\underline{l}\;\;d\bar{S}}\right\rangle&=(\epsilon_i{}^{k}A_k^i dx_jdx_kdx^h)\\
&\quad\cdot(\epsilon^{l}_{\ mn}B_l^i dx_hdx^mdx^n)=A_k^iB_l^k d\underline{V}d\bar{V}\\
&\equiv\left\langle \underset{\bar{\mathbf{A}}:\bar{\mathbf{B}}}{d\underline{V}\;\;d\bar{V}}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \underset{\bar{\mathbf{A}}}{d\underline{l}\;\;d\bar{l}}\right\rangle\left\langle \underset{\bar{\mathbf{B}}}{d\underline{S}\;\;d\bar{l}}\right\rangle&=(A_l^i dx_idx^l)(\epsilon_i{}^{jk}B_m^i dx_jdx_kdx^m)\\
&=A_l^iB_m^i d\underline{V}dx^ldx^m\\
&\equiv\left\langle \underset{\bar{\mathbf{A}}\underset{\cdot}{\times}\bar{\mathbf{B}}}{d\underline{V}\;\;d\bar{S}}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \underset{\bar{\mathbf{A}}}{d\underline{l}\;\;d\bar{l}}\right\rangle\left\langle \underset{\bar{\mathbf{B}}}{d\underline{l}\;\;d\bar{S}}\right\rangle&=(A_i^i dx_ldx^i)(\epsilon_i{}^{jk}B_m^i dx_mdx^jdx^k)\\
&=A_l^iB_i^m dx_ldx_m d\bar{V}\\
&=\left\langle \underset{\bar{\mathbf{A}}\overset{\cdot}{\times}\bar{\mathbf{B}}}{d\underline{S}\;\;d\bar{V}}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \underset{\bar{\mathbf{A}}}{d\underline{l}\;\;d\bar{l}}\right\rangle\left\langle \underset{\bar{\mathbf{B}}}{d\underline{l}\;\;d\bar{l}}\right\rangle&=(A_l^i dx_idx^l)(B_m^j dx_jdx^m)\\
&=A_l^iB_m^j dx_idx_jdx^ldx^m
\end{aligned}
$$

$$\equiv\left\langle\begin{matrix} d\underline{S}\ \ d\bar{S} \\ \bar{\mathbf{A}}\overset{\times}{\times}\bar{\mathbf{B}}\end{matrix}\right\rangle \tag{5.4}$$

如果$\bar{\mathbf{A}}$，$\bar{\mathbf{B}}$都是对称张量，则

$$\bar{\mathbf{A}}\underset{\cdot}{\times}\bar{\mathbf{B}}=\bar{\mathbf{A}}\overset{\cdot}{\times}\bar{\mathbf{B}}=-\bar{\mathbf{B}}\underset{\cdot}{\times}\bar{\mathbf{A}}=-\bar{\mathbf{B}}\overset{\cdot}{\times}\bar{\mathbf{A}};$$

$$\bar{\mathbf{A}}\overset{\times}{\times}\bar{\mathbf{B}}=\bar{\mathbf{B}}\overset{\times}{\times}\bar{\mathbf{A}};\quad \bar{\mathbf{A}}:\bar{\mathbf{B}}=\bar{\mathbf{B}}:\bar{\mathbf{A}}$$

对于式(1.9)～(1.11)与(2.1)和(2.2)有多种多样的推广。

令

$$\left\langle\begin{matrix} d\underline{S} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\equiv *\underline{d}\left[\left\langle\begin{matrix} d\underline{l} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix} d\underline{l} \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\right]$$

$$=\left\langle\begin{matrix} d\underline{S} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{Q}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle-\left\langle\begin{matrix} d\underline{S} \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x})\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{P}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle$$

则

$$\underline{d}\left\langle\begin{matrix} d\underline{S} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix} d\underline{V} \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{P}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle-\left\langle\begin{matrix} d\underline{V} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{Q}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle$$

由式(2.4)，得 Stratton 的矢量 Green 定理：

$$\int_S\left\langle\begin{matrix} d\underline{S} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=\int_S\left\langle\begin{matrix} d\underline{S} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{Q}(\mathbf{x})-\mathbf{Q}(\mathbf{x})\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{P}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle$$

$$=\int_V\left\langle\begin{matrix} dV \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{P}(\mathbf{x})-\mathbf{P}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{Q}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle$$

$$=\int_V\underline{d}\left\langle\begin{matrix} d\underline{S} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle \tag{5.5}$$

又如令

$$-\left\langle\begin{matrix} d\underline{S} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\equiv\left\langle\begin{matrix} d\bar{l} \\ 1\end{matrix}\right\rangle *\underline{d}\left[\left\langle\begin{matrix} d\underline{l} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix} d\underline{l}\ \ d\bar{l} \\ Q(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\right]$$

$$=\left\langle\begin{matrix} d\bar{l} \\ 1\end{matrix}\right\rangle *\left[\left\langle\begin{matrix} d\underline{S} \\ \boldsymbol{\nabla}\times\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix} d\underline{l}\ \ d\bar{l} \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\right.$$

$$\left.+\left\langle\begin{matrix} d\underline{l} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix} d\underline{S}\ \ d\bar{l} \\ \boldsymbol{\nabla}\times Q(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\right]$$

$$=\left\langle\begin{matrix} d\bar{l} \\ 1\end{matrix}\right\rangle\left[\left\langle\begin{matrix} d\bar{l} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\times Q(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\right.$$

$$\left.-\left\langle\begin{matrix} d\bar{l} \\ \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{P}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\right]$$

则

$$\bar{d}\left\langle\begin{matrix} d\bar{S} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix} d\bar{l} \\ 1\end{matrix}\right\rangle\left[\left\langle\begin{matrix} d\bar{S} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times Q(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle-\left\langle\begin{matrix} d\bar{S} \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{P}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\right]$$

$$\int_S\left\langle\begin{matrix} d\bar{S} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle=\int_S\left\langle\begin{matrix} d\bar{S} \\ Q(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{P}(\mathbf{x})-\mathbf{P}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\times Q(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle$$

$$=\int_V\left\langle\begin{matrix} d\bar{V} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times Q(\mathbf{x})-Q(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{P}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle$$

$$=\int_V\bar{d}\left\langle\begin{matrix} d\bar{S} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle \tag{5.6}$$

这是定理(2.10)的推广，称为矢量-并矢 Green 定理。

进一步可以推广为并矢-并矢 Green 定理：

$$\int_S\left\langle\begin{matrix} d\bar{S} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\equiv-\int_S *\underline{d}\left[\left\langle\begin{matrix} d\underline{l}\ \ d\bar{l} \\ Q(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix} d\underline{l}\ \ d\bar{l} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\right]\left\langle\begin{matrix} d\bar{l} \\ 1\end{matrix}\right\rangle$$

$$=-\int_S\left[\left\langle\begin{matrix}d\bar{S}\\ Q(\mathbf{x})\cdot\nabla\times\mathbf{P}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle-\left\langle\begin{matrix}d\bar{S}\\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\cdot\nabla\times Q(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\right]$$

$$=-\int_V\left[\left\langle\begin{matrix}d\bar{V}\\ Q(\mathbf{x})\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{P}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle-\left\langle\begin{matrix}d\bar{V}\\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\cdot\nabla\times\nabla\times Q(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle\right]$$

$$=-\int_V\bar{d}\left\langle\begin{matrix}d\bar{S}\\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\rangle \tag{5.7}$$

这三个方程在电磁学中有重要的意义。

六、实复转化

复数$z\equiv x+iy$的共轭记作$\bar{z}\equiv x-iy$，则双实变量的复值函数可以写成复变量的形式：由$x=(z+\bar{z})/2$，$y=(z-\bar{z})/2i$，则

$$\begin{aligned}f(x,\ y)&\equiv u(x,\ y)+iv(x,\ y)\\&=u((z+\bar{z})/2,\ (z-\bar{z})/2i)\\&\quad+iv((z+\bar{z})/2,\ (z-\bar{z})/2i)\\&\equiv F(z,\ \bar{z})\end{aligned} \tag{6.1}$$

设S是复平面上的有限单连区域，边界∂S是简单连续曲线，u与v在S中对x，y的偏导数存在且连续，则可进行实复转化：

$$\begin{aligned}\partial f(x,\ y)/\partial x&=[\partial F(z,\ \bar{z})/\partial z](\partial z/\partial x)\\&\quad+[\partial F(z,\ \bar{z})/\partial\bar{z}](\partial\bar{z}/\partial x)\\&=\partial F(z,\ \bar{z})/\partial z+\partial F(z,\ \bar{z})/\partial\bar{z},\\ \partial f(x,\ y)/\partial y&=[\partial F(z,\ \bar{z})/\partial z](\partial z/\partial y)\\&\quad+[\partial F(z,\ \bar{z})/\partial\bar{z}](\partial\bar{z}/\partial y)\\&=i\partial F(z,\ \bar{z})/\partial z-i\partial F(z,\ \bar{z})/\partial\bar{z}\end{aligned}$$

由此可得两个新的偏微分算子：

$$\left.\begin{aligned}\partial_z&\equiv\partial/\partial z=(\partial/\partial x-i\partial/\partial y)/2\\ \partial_{\bar{z}}&\equiv\partial/\partial\bar{z}=(\partial/\partial x+i\partial/\partial y)/2\end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

下面将R^2中的1-形式为例转化为复变量的形式：

$$\begin{aligned}\left\langle\begin{matrix}dl\\ \mathbf{e}(x,y)\end{matrix}\right\rangle&\equiv e_x(x,y)dx+e_y(x,y)dy\\&=E_x(z,\bar{z})(dz+d\bar{z})/2+E_y(z,\bar{z})(dz-d\bar{z})/2i\\&=[E_x(z,\bar{z})-iE_y(z,\bar{z})]dz/2\\&\quad+[E_x(z,\bar{z})+iE_y(z,\bar{z})]d\bar{z}/2\\&\equiv E_z(z,\bar{z})dz+E_{\bar{z}}(z,\bar{z})d\bar{z}\equiv\left\langle\begin{matrix}dL\\ \mathbf{E}(z,\bar{z})\end{matrix}\right\rangle\end{aligned} \tag{6.3}$$

且

$$\begin{aligned}d\left\langle\begin{matrix}dL\\ \mathbf{E}(z,\ \bar{z})\end{matrix}\right\rangle&=[\partial_z E_{\bar{z}}(z,\bar{z})-\partial_{\bar{z}}E_z(z,\bar{z})]dzd\bar{z}\\&=\left\langle\begin{matrix}dS\\ \nabla\times\mathbf{E}(z,\ \bar{z})\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}dS\\ \mathrm{rot}\mathbf{E}(z,\ \bar{z})\end{matrix}\right\rangle\end{aligned} \tag{6.4}$$

因此，又有复 Green 定理：

$$\int_{\partial S}\left\langle\begin{matrix}dL\\ \mathbf{E}(z,\bar{z})\end{matrix}\right\rangle=\int_S d\left\langle\begin{matrix}dL\\ \mathbf{E}(z,\bar{z})\end{matrix}\right\rangle \tag{6.5}$$

一般微积分学由实变量向复变量的转化还是20世纪的事，因而尚有大量工作要作，尽管解析函数的究研早在18世纪就已进行了。

如果在S中

$$\partial_{\bar z}\mathsf{E}(z,\ \bar z)=0 \tag{6.6}$$

则由复 Green 定理(6.5)

$$\int_{\partial S}\mathsf{E}(z,\ \bar z)dz=\int_S d\mathsf{E}(z,\bar z)dz$$

$$=\int_S \partial_{\bar z}\mathsf{E}(z,\bar z)d\bar z dz=0 \tag{6.7}$$

这就是解析函数理论中著名的 Cauchy 定理，其中

$$d\bar z dz=(dx-idy)(dx+idy)=2idxdy$$

所以条件(6.6)即是 Cauchy-Riemann 条件：

$$\frac{1}{2}(\partial_x+i\partial_y)(u+iv)$$

$$=\frac{1}{2}[(\partial_x u-\partial_y v)+i(\partial_x v-\partial_y u)]=0$$

或

$$\partial_x u=\partial_y v,\quad \partial_x v=-\partial_y u \tag{6.8}$$

解析函数在弹性理论中有很多应用。

将条件(6.6)略加推广，成为：

$$\partial_{\bar z}\mathsf{E}(z,\bar z)=a(z)\mathsf{E}(z,\bar z)+b(z) \tag{6.9}$$

则 Cauchy 定理应推广为：

$$\int_{\partial S}\mathsf{E}(z,\ \bar z)dz=\int_S\{a(z)\mathsf{E}(z,\bar z)+b(z)\}d\bar z dz \tag{6.10}$$

这里$a(z)$与$b(z)$都是解析函数。这种函数称为广义解析函数，在连续介质力学，特别是弹性薄壳的无矩理论中为用甚多。

更多的应用可在[4]～[6]，[10]，[11]中找到。

参 考 文 献

[1] 郑振铎，散度、旋度和梯度的统一定义，应用数学和力学，7，1 (1986)，1—6.
[2] 李国平、郭友中，一般相对性量子场论(二)，湖北人民出版社 (1981).
[3] 郭仲衡，《非线性弹性理论》，科学出版社 (1981).
[4] Handers, H., *Differential forms*, 修订版，Academia Press (1983).
[5] 郭友中、陈银通，外微分及其应用，《现代工程数学手册》(第三卷，第47章)，(1986).
[6] 郭友中，弹塑性理论中的互补变分原理，科学通报，23 (1983)，1435—1439.
[7] 钱伟长，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学与力学，4，2 (1983)，137—150.
[8] Vainberg, M. M., *Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations*, Wiley, New York (1973).
[9] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill Book Company, New York (1977).
[10] Deschamps, G. A., Electromagnetics and Differential Forms, *Proceedings of the*

IEEE, **69**, 6 (1981), 676—696.
[11] 李国平、郭友中，《一般相对性量子场论》(一)，湖北人民出版社 (1982).

A Note on Divergence, Rotation and Gradient and Their Associated Theorems

Guo You-zhong
(*Institute of Mathematical Sciences, Academia Sinica, Wuhan*)
Tai Chen-to
(*Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of Michigan, USA*)

Abstract

In this note, the essence and some supplements for the unified definition of divergence, rotation and gradient advanced by Tai have been presented based on the method of exterior differential form with an expression of vectors or tensors. The main purpose of this note is to introduce the useful expressions and their applications, and to simplify the proofs of many theorems in various field theories, and they are also important because of their utility for establishing a wide class of principles.