

奇点附近的各向异性塑性应力场*

林 拜 松

(中南工业大学, 1986年 6 月 1 日收到)

摘 要

在奇点附近的理想塑性应力分量都只是 θ 的函数的条件下, 利用平衡方程和 Hill 各向异性屈服条件, 本文导出了反平面应变和平面应变两者奇点附近的各向异性塑性应力场的一般解析表达式. 将这些一般解析表达式用于具体裂纹及有奇点的平面应变体, 我们就得到 I 型、II 型、III 型和 I-II 复合型裂纹尖端的各向异性塑性应力场以及有奇点的各向异性塑性平面应变体的极限载荷.

一、引 言

就我们所知, 没有人研究过反平面应变和平面应变两者奇点附近的各向异性塑性应力场. 为此, 我们利用文献[1~2]中的方法去解决上述问题.

在奇点附近的理想塑性应力分量都只是 θ 的函数的条件下, 利用平衡方程和 Hill 各向异性屈服条件, 本文导出了反平面应变和平面应变两者奇点附近的各向异性塑性应力场的一般解析表达式. 将这些一般解析表达式用于具体裂纹及有奇点的平面应变体, 我们就得到 I 型、II 型、III 型和 I-II 复合型裂纹尖端的各向异性塑性应力场以及有奇点的各向异性塑性平面应变体的极限载荷.

显然, 各向同性塑性应力场是对应的各向异性塑性应力场的特殊情形. 所以, [1]中的有些结果是本文中对应结果的特殊情形.

二、反 平 面 应 变

将直角卡氏坐标系 (x, y, z) 的原点放在裂纹的尖点 O 上. 如图 1 所示, 而 x, y, z 轴是各向异性主轴.

对于反平面应变情形, 设应力分量 τ_{xz} 和 τ_{yz} 都只是 θ 的函数, 则平衡方程变成

$$\sin\theta \frac{d\tau_{xz}}{d\theta} - \cos\theta \frac{d\tau_{yz}}{d\theta} = 0 \quad (2.1)$$

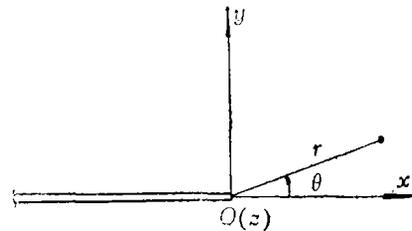


图 1

* 钱伟长推荐.

而 Hill 各向异性屈服条件是^[8]

$$\left(\frac{\tau_{xz}}{S}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{yz}}{R}\right)^2 = 1 \quad (2.2)$$

这里, S 和 R 分别是相对于 x, z 轴和 y, z 轴的剪切屈服应力。

利用 (2.1) 和 (2.2), 我们导出 III 型裂纹尖端的各向异性塑性应力场的一般解析表达式为:

(1) 均匀应力区

$$\tau_{xz} = a_1, \quad \tau_{yz} = a_2 \quad (2.3)$$

这里, a_1 和 a_2 是两个积分常数。

(2) 非均匀应力区

$$\frac{\tau_{xz}}{S} = \pm \sqrt{\frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta + \frac{R^2}{S^2} \cos^2 \theta}}, \quad \frac{\tau_{yz}}{R} = \pm \sqrt{\frac{\frac{R}{S} \cos \theta}{\sin^2 \theta + \frac{R^2}{S^2} \cos^2 \theta}} \quad (2.4)$$

将 (2.3) 和 (2.4) 直接用于 III 型裂纹, 我们就得到 III 型裂纹尖端的各向异性塑性应力场的解析表达式为:

1) $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$\tau_{xz} = -\frac{S \cdot \sin \theta}{\left(\sin^2 \theta + \frac{R^2}{S^2} \cos^2 \theta\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \tau_{yz} = S \left(\sin^2 \theta + \frac{R^2}{S^2} \cos^2 \theta\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.5a)$$

2) $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$

$$\tau_{xz} = -S, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (2.5b)$$

显然, 对于各向同性材料, 我们有

$$S = R = k \quad (2.6)$$

式中 k 是剪切屈服应力。于是, (2.5) 变成:

1) $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$\tau_{xz} = -k \sin \theta, \quad \tau_{yz} = k \cos \theta \quad (2.7a)$$

2) $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$

$$\tau_{xz} = -k, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (2.7b)$$

这是 III 型裂纹尖端的理想塑性应力场^[1]。

三、平 面 应 变

设在平面应变状态中, 各向异性的 z 主轴垂直于流动平面。假定应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 都只是 θ 的函数, 于是平衡方程变成

$$-\sin \theta \frac{d\sigma_x}{d\theta} + \cos \theta \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} = 0, \quad \cos \theta \frac{d\sigma_y}{d\theta} - \sin \theta \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} = 0 \quad (3.1)$$

而平面应变 Hill 各向异性屈服条件为^[3]

$$\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4(1-c)} + \tau_{xy}^2 = T^2 \quad (3.2)$$

这里, T 是相对于 x, y 轴的剪切屈服应力, 而 c 是描绘流动平面内各向异性状态的参量。如

果材料是各向同性的, 则 c 为零, 而 T 等于 k .

利用 (3.1) 和 (3.2), 我们就得到奇点附近的各向异性塑性应力场的一般解析表达式为:

(1) 均匀应力区

$$\sigma_x = b_1, \sigma_y = b_2, \tau_{xy} = b_3 \quad (3.3)$$

这里 b_i ($i=1\sim 3$) 是三个积分常数.

该区内的应力分量 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 为:

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sigma_r \} &= \frac{b_1 + b_2}{2} \pm \frac{b_1 - b_2}{2} \cos 2\theta \pm b_3 \sin 2\theta \\ \sigma_\theta \} & \\ \tau_{r\theta} &= b_3 \cos 2\theta - \frac{b_1 - b_2}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

(2) 非均匀应力区

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \pm \frac{T \cos 2\theta}{[1 - c \sin^2(2\theta)]^{\frac{1}{2}}}, \sigma_x - \sigma_y = \mp \frac{T(1-c) \sin 2\theta}{[1 - c \sin^2(2\theta)]^{\frac{1}{2}}} \\ \sigma_x + \sigma_y &= \pm \left[\frac{c \sin 4\theta}{2[1 - c \sin^2(2\theta)]^{\frac{1}{2}}} + E(2\theta_0, \sqrt{c}) - E(2\theta, \sqrt{c}) + b_4 \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

这里 b_4 是一个积分常数, 而 $E(2\theta, \sqrt{c})$ 是第二类椭圆积分, 即

$$E(2\theta, \sqrt{c}) = \int_0^{2\theta} (1 - c \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} d\alpha \quad (3.6)$$

该区内的应力分量 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 是:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \pm T \left[\frac{c \sin 4\theta}{[1 - c \sin^2(2\theta)]^{\frac{1}{2}}} + E(2\theta_0, \sqrt{c}) - E(2\theta, \sqrt{c}) + b_4 \right] \\ \sigma_\theta &= \pm T [E(2\theta_0, \sqrt{c}) - E(2\theta, \sqrt{c}) + b_4] \\ \tau_{r\theta} &= \pm T \sqrt{1 - c \sin^2(2\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

这里 θ_0 是一个待定常数.

如果平面应变奇点附近的各向异性塑性应力场存在着径向的应力间断线, 则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta^+ &= \sigma_\theta^-, \tau_{r\theta}^+ = \tau_{r\theta}^- \\ \sigma_r^+ - \sigma_r^- &= \frac{4(1-c) \sqrt{T^2(1-c \sin^2(2\theta)) - \tau_{r\theta}^2}}{1 - c \sin^2(2\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

从 (3.4)、(3.7) 和 (3.8) 容易看出, 径向的应力间断线只能出现在均匀应力区 (3.4), 而非均匀应力区 (3.8) 内的应力分量 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 都是连续的. 这个结论与文献 [1] 的相同.

将 (3.4) 和 (3.8) 用于 I 型裂纹和 II 型裂纹, 我们就可以导出这些裂纹尖端的各向异性塑性应力场的解析表达式. 结果表示如下:

(1) I 型裂纹

I 型裂纹尖端的各向异性塑性应力场为:

1) $0 \leq \theta \leq \pi/4$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta \} &= T [\sqrt{1-c} + 2E \pm \cos 2\theta], \tau_{r\theta} = T \sqrt{1-c} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.9a)$$

2) $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= T \left[\frac{c \sin 4\theta}{\sqrt{1-c\sin^2(2\theta)}} + \sqrt{1-c} + 3E - E(2\theta, \sqrt{c}) \right] \\ \sigma_\theta &= T[\sqrt{1-c} + 3E - E(2\theta, \sqrt{c})], \quad \tau_{r\theta} = T\sqrt{1-c\sin^2(2\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (3.9b)$$

3) $3\pi/4 \leq \theta \leq \pi$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = T\sqrt{1-c} \cdot (1 \pm \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = -T\sqrt{1-c} \sin 2\theta \quad (3.9c)$$

这里

$$E = E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{c}\right) = \int_0^{\pi/2} (1 - c\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} d\alpha \quad (3.10)$$

是第二类完全椭圆积分。

如果材料是各向同性的，式 (3.9) 就变成 I 型裂纹尖端的理想塑性应力场 ([1], (3.6))。

(2) II 型裂纹

II 型裂纹尖端的各向异性塑性应力场是：

1) $0 \leq \theta \leq \theta_1$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= T \left[\frac{c\sin 4\theta}{\sqrt{1-c\sin^2(2\theta)}} - E(2\theta, \sqrt{c}) \right] \\ \sigma_\theta &= -T \cdot E(2\theta, \sqrt{c}), \quad \tau_{r\theta} = T\sqrt{1-c\sin^2(2\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (3.11a)$$

2) $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = \begin{pmatrix} \sigma_r + \sigma_\theta \\ 2 \end{pmatrix}_{\theta=\theta_2} \pm \begin{pmatrix} \sigma_r - \sigma_\theta \\ 2 \end{pmatrix}_{\theta=\theta_2} \cos 2(\theta - \theta_2) \\ \pm (\tau_{r\theta})_{\theta=\theta_2} \sin 2(\theta - \theta_2) \\ \tau_{r\theta} = - \begin{pmatrix} \sigma_r - \sigma_\theta \\ 2 \end{pmatrix}_{\theta=\theta_2} \sin 2(\theta - \theta_2) + (\tau_{r\theta})_{\theta=\theta_2} \cos 2(\theta - \theta_2) \end{aligned} \quad (3.11b)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_r + \sigma_\theta \\ 2 \end{pmatrix}_{\theta=\theta_2} &= -T \left[\frac{c\sin 4\theta_2}{2\sqrt{1-c\sin^2(2\theta_2)}} + \sqrt{1-c} + 3E - E(2\theta_2, \sqrt{c}) \right] \\ \begin{pmatrix} \sigma_r - \sigma_\theta \\ 2 \end{pmatrix}_{\theta=\theta_2} &= -\frac{Tc\sin 4\theta_2}{2\sqrt{1-c\sin^2(2\theta_2)}}, \quad (\tau_{r\theta})_{\theta=\theta_2} = -T\sqrt{1-c\sin^2(2\theta_2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.11c)$$

3) $\theta_2 \leq \theta \leq 3\pi/4$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -T \left[\frac{c\sin 4\theta}{\sqrt{1-c\sin^2(2\theta)}} + \sqrt{1-c} + 3E - E(2\theta, \sqrt{c}) \right] \\ \sigma_\theta &= -T[\sqrt{1-c} + 3E - E(2\theta, \sqrt{c})], \quad \tau_{r\theta} = -T\sqrt{1-c\sin^2(2\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (3.11d)$$

4) $3\pi/4 \leq \theta \leq \pi$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = -T\sqrt{1-c} \cdot (1 \pm \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = T\sqrt{1-c} \cdot \sin 2\theta \quad (3.11e)$$

径向线 $\theta = \theta_1$ 上的应力连续条件给出如下确定 θ_1 和 θ_2 的方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{c\sin 4\theta_2}{2[1-c\sin^2(2\theta_2)]^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{1-c} + 3E - E(2\theta_2, \sqrt{c}) \\ - E(2\theta_1, \sqrt{c}) + \frac{c\sin 4\theta_1}{2[1-c\sin^2(2\theta_1)]^{\frac{1}{2}}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11f)$$

$$\begin{aligned} & \frac{c \sin 4 \theta_2}{2[1-c \sin ^2(2 \theta_2)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin 2 \theta_2 + [1-c \sin ^2(2 \theta_2)]^{\frac{1}{2}} \cos 2 \theta_2 \\ & + \frac{c \sin 4 \theta_1}{2[1-c \sin ^2(2 \theta_1)]^{\frac{1}{2}}} \sin 2 \theta_1 + [1-c \sin ^2(2 \theta_1)]^{\frac{1}{2}} \cos 2 \theta_1 = 0 \end{aligned}$$

如果材料是各向同性的, 则式 (3.11) 就变为 II 型裂纹尖端的理想塑性应力场 ([1], (3.7))。

将 (3.4) 和 (3.8) 用于有奇点的平面应变问题, 我们就可以得到奇点附近的各向异性塑性应力场和极限载荷。举两个例子来说明这个方法的应用。

(1) 刚性平头冲模的压入

如图 2 所示, x, y 轴是各向异性主轴。假设在极限状态下, 冲模下面的压力分布是均匀的, 即 $P=2ap$ 。于是奇点 O 和 O' 附近的各向异性塑性应力场分别是

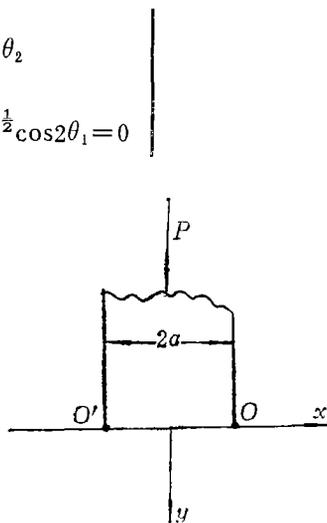


图 2

(i) 奇点 O

- 1) $0 \leq \theta \leq \pi/4$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = -T \sqrt{1-c} (1 \pm \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = T \sqrt{1-c} \sin 2\theta \quad (3.12a)$$

- 2) $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -T \left[\frac{c \sin 4\theta}{\sqrt{1-c \sin^2(2\theta)}} + E(2\theta, \sqrt{c}) + \sqrt{1-c} - E \right] \\ \sigma_\theta &= -T [E(2\theta, \sqrt{c}) - E + \sqrt{1-c}], \quad \tau_{r\theta} = T \sqrt{1-c} \sin^2(2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.12b)$$

- 3) $3\pi/4 \leq \theta \leq \pi$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = -p + T \sqrt{1-c} \cdot (1 \pm \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = -T \sqrt{1-c} \cdot \sin 2\theta \quad (3.12c)$$

(ii) 奇点 O'

- 1) $0 \leq \theta \leq \pi/4$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = -p + T \sqrt{1-c} (1 \pm \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = -T \sqrt{1-c} \sin 2\theta \quad (3.13a)$$

- 2) $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= T \left[\frac{c \sin 4\theta}{\sqrt{1-c \sin^2(2\theta)}} + E(2\theta, \sqrt{c}) - E + \sqrt{1-c} \right] - p \\ \sigma_\theta &= T [E(2\theta, \sqrt{c}) - E + \sqrt{1-c}] - p, \quad \tau_{r\theta} = -T \sqrt{1-c} \sin^2(2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.13b)$$

- 3) $3\pi/4 \leq \theta \leq \pi$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = -T \sqrt{1-c} \cdot (1 \pm \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = T \sqrt{1-c} \sin 2\theta \quad (3.13c)$$

利用径向线 $\theta=3\pi/4$ 上的应力连续条件, 从(3.12)或 (3.13) 我们就求出极限载荷为:

$$P_* = 4aT [E + \sqrt{1-c}] \quad (3.14)$$

当 c 是零而 T 等于 k 时, 该式就化为 Prandtl 公式 $P_* = 2ak(2 + \pi)$ 。

(2) 具有理想切口板条的拉伸

如图 3 所示, x, y 轴是各向异性主轴, 在极限状态下, 奇点 O 附近的各向异性塑性应力场为:

$$1) \quad 0 \leq \theta \leq \pi/4$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = T[\sqrt{1-c} + 2E \pm \cos 2\theta], \quad \left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} = T\sqrt{1-c} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.14a)$$

$$2) \quad \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = T \left[\frac{c \sin 4\theta}{\sqrt{1-c \sin^2(2\theta)}} + \sqrt{1-c} \right. \\ \left. + 3E - E(2\theta, \sqrt{c}) \right] \\ \sigma_\theta = T[\sqrt{1-c} + 3E - E(2\theta, \sqrt{c})] \\ \tau_{r\theta} = T \cdot \sqrt{1-c \sin^2(2\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (3.14b)$$

$$3) \quad 3\pi/4 \leq \theta \leq \pi$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = T\sqrt{1-c} \cdot (1 \pm \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = -T\sqrt{1-c} \cdot \sin 2\theta \quad (3.14c)$$

由式 (3.14a) 求出横截面 oo' 上的应力分量为:

$$\sigma_x = T[\sqrt{1-c} + 2E - 1], \quad \sigma_y = T[\sqrt{1-c} + 2E + 1] \quad (3.15)$$

从而极限载荷为:

$$P_* = 2kT[\sqrt{1-c} + 2E + 1] \quad (3.16)$$

当 c 为零, 而 T 等于 k 时, 这个式子就变成公式 $P_* = 2kh(2 + \pi)$ ([4], (41.1)).

参 考 文 献

- [1] 林拜松, 静止裂纹尖端的理想塑性应力场, 应用数学和力学, 6, 5 (1985), 415—421.
- [2] 林拜松, 高速扩散裂纹尖端的理想弹塑性场, 应用数学和力学, 6, 10 (1985), 939—946.
- [3] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford (1950).
- [4] Kachanov, L. M., *Foundation of the Theory of Plasticity*, London (1971).

Anisotropic Plastic Stress Field Near a Singular Point

Lin Bai-song

(Central-South University of Technology, Changsha)

Abstract

On condition that any perfectly plastic stress component near a singular point is nothing but the function of θ only, making use of equilibrium equations and Hill anisotropic yield condition, we derive the general analytical expressions of the anisotropic plastic stress field near a singular point in both the cases of anti-plane and in-plane strain. Applying these general analytical expressions to the concrete cracks and the plane-strain bodies with a singular point, the anisotropic plastic stress fields at the tips of mode I, Mode II, Mode III and mixed mode I-II cracks, and the limit loads of anisotropic plastic plane-strain bodies with a singular point are obtained.

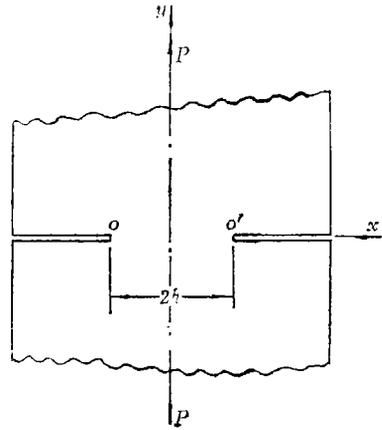


图 3