应用数学和力学，第8卷第8期(1987年8月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

矩形薄板弹性弯曲问题的一般解析解法*

黄　炎

(国防科技大学，1986年2月13日收到)

摘　要

本文对求解矩形薄板弹性弯曲问题采用先建立微分方程的一般解，然后根据问题的边界条件确定积分常数，这样求解比采用迭加法求解要简单容易。

一、基本方程的解

如图1所示，矩形薄板弹性弯曲的基本方程为[1]

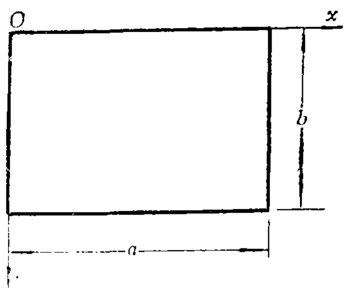

图　1

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D}\tag{1.1}$$

当四边为简支时可取双正弦级数解

$$w=\sum_m\sum_n A_{mn}\sin\alpha x\sin\beta y\tag{1.2}$$

式中

$$A_{mn}=\frac{4\int_0^a\int_0^b q\sin\alpha x\sin\beta y dxdy}{Dab(\alpha^2+\beta^2)^2}\tag{1.3}$$

$$\alpha=\frac{m\pi}{a}\qquad(m=1,2,\cdots,\infty)\tag{1.4}$$

$$\beta=\frac{n\pi}{b}\qquad(n=1,2,\cdots,\infty)\tag{1.5}$$

当两对边为简支时可得单正弦级数解

$$w=\sum_m(A_m\cosh\alpha y+B_m\sinh\alpha y+C_m\alpha y\sinh\alpha y+D_m\alpha y\cosh\alpha y)\sin\alpha x\tag{1.6}$$

等式(1.1)也可取其他形式的解：余弦级数，多项式或其他函数。对于各种不同边界条件的问题，虽然可以采用迭加法[2,3]，但求解过程十分复杂。

本文建议先建立方程(1.1)的一般解，然后根据边界条件确定积分常数，并取为

$$w=\sum_m[A_m\sinh\alpha(b-y)+B_m\sinh\alpha y+C_m\alpha y\cosh\alpha(b-y)+D_m\alpha y\cosh\alpha y]\sin\alpha x/\sinh\alpha b$$
$$+\sum_n[E_n\sinh\beta(a-x)+F_n\sinh\beta x+G_n\beta x\cosh\beta(a-x)+H_n\beta x\cosh\beta x]\sin\beta y/\sinh\beta a$$

* 钱伟长推荐。
1983年5月31日第一次收到。

$$+a_{00}+a_{10}\frac{x}{a}+a_{01}\frac{y}{b}+a_{11}\frac{xy}{ab}+a_{20}\frac{x^2}{a^2}+a_{02}\frac{y^2}{b^2}$$

$$+a_{21}\frac{x^2y}{a^2b}+a_{12}\frac{xy^2}{ab^2}+a_{30}\frac{x^3}{a^3}+a_{03}\frac{y^3}{b^3}+a_{31}\frac{x^3y}{a^3b}+a_{13}\frac{xy^3}{ab^3}+w_0 \tag{1.7}$$

w_0为等式(1.1)的任一特解，本文取等式(1.2)。

将等式(1.6)和等式(1.7)的第一部分比较有两点不同，一是在等式(1.7)中多了一除数$\sinh\alpha b$，这可使积分常数的系数均变化在[-1, +1]中而不致变成很大的数；二是改用$\sinh\alpha(b-y)$来代替$\cosh\alpha y$避免了αy很大时积分常数A_m和B_m接近相同。

等式(1.7)的第一部分可满足$y=0$和$y=b$两个边为任意边界条件，第二部分可满足$x=0$和$x=a$两个边为任意边界条件。此外必须补充一多项式来满足角点的边界条件，其中前四项可满足四个角点的挠度条件，后八项可满足四个角点每两边的弯矩条件。采用等式(1.2)作特解虽然收敛差，但可通过数学演算来改善收敛速度。

二、边 界 条 件

等式(1.7)共有$4m+4n+12$个积分常数，这可由边界条件来确定。其中每个边有二个边界条件：即挠度或等效剪力，斜度或弯矩均应分别等于边界的已知值。在每个边界条件所建立的方程式中将非正弦函数均展成正弦级数，根据正交性可得到$4m+4n$个方程式。另外每个角有三个角点条件：即挠度或反力，角的两边的斜度或弯矩应分别等于相应的已知值，故又有4×3个方程式。因此可以求解全部积分常数。等式(1.7)中的函数可展成如下的正弦级数

$$1=\sum_m\frac{2(1-\cos m\pi)}{m\pi}\sin\alpha x \tag{2.1}$$

$$\frac{x}{a}=-\sum_m\frac{2\cos m\pi}{m\pi}\sin\alpha x \tag{2.2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}=-\sum_m\left[\frac{2\cos m\pi}{m\pi}+\frac{4(1-\cos m\pi)}{(m\pi)^3}\right]\sin\alpha x \tag{2.3}$$

$$\frac{x^3}{a^3}=-\sum_m\left[\frac{2\cos m\pi}{m\pi}-\frac{12\cos m\pi}{(m\pi)^3}\right]\sin\alpha x \tag{2.4}$$

$$\frac{\sinh\beta(a-x)}{\sinh\beta a}=\sum_m\frac{2\alpha}{a(\alpha^2+\beta^2)}\sin\alpha x \tag{2.5}$$

$$\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta a}=-\sum_m\frac{2\alpha\cos m\pi}{a(\alpha^2+\beta^2)}\sin\alpha x \tag{2.6}$$

$$\beta x\frac{\cosh\beta(a-x)}{\sinh\beta a}=\sum_m\left(\frac{2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{\beta a\cos m\pi}{\sinh\beta a}\right)\frac{2\alpha}{a(\alpha^2+\beta^2)}\sin\alpha x \tag{2.7}$$

$$\beta x\frac{\cosh\beta x}{\sinh\beta a}=\sum_m\left(\frac{2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}-\beta a\coth\beta a\right)\frac{2\alpha\cos m\pi}{a(\alpha^2+\beta^2)}\sin\alpha x \tag{2.8}$$

三、例

以两相邻边固定两相邻边自由的矩形板为例，如图2所示。边界条件和角点条件是

$$(w)_{x=0}=0 \tag{3.1}$$

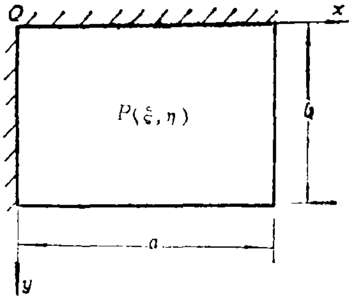

图 2

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}=0 \tag{3.2}$$

$$(M_x)_{x=a}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a}=0 \tag{3.3}$$

$$(V_x)_{x=a}=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]_{x=a}=0 \tag{3.4}$$

$$(w)_{y=0}=0 \tag{3.5}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=0 \tag{3.6}$$

$$(M_y)_{y=b}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b}=0 \tag{3.7}$$

$$(V_y)_{y=b}=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]_{y=b}=0 \tag{3.8}$$

$$w_{(0,0)}=0 \tag{3.9}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(0,0)}=0 \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{(0,0)}=0 \tag{3.11}$$

$$w_{(a,0)}=0 \tag{3.12}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{(a,0)}=0 \tag{3.13}$$

$$M_{x(a,0)}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{(a,0)}=0 \tag{3.14}$$

$$w_{(0,b)}=0 \tag{3.15}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(0,b)}=0 \tag{3.16}$$

$$M_{y(0,b)}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{(0,b)}=0 \tag{3.17}$$

$$R_{(a,b)}=2D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{(a,b)}=0 \tag{3.18}$$

$$M_{x(a,b)}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{(a,b)}=0 \tag{3.19}$$

$$M_{y(a,b)}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{(a,b)}=0 \tag{3.20}$$

将等式(1.2)代入等式(1.1)然后代入以上各式并应用到等式(2.1)～(2.8)．首先由等式(3.9)，(3.12)和(3.15)可得

$$a_{00}=0,\quad a_{10}=-a_{20}-a_{30},\quad a_{01}=-a_{02}-a_{03} \tag{3.21}$$

应用上式则由等式(3.5)和(3.10)可得

$$A_m-a_{20}\frac{4(1-\cos m\pi)}{(m\pi)^3}+a_{30}\frac{12\cos m\pi}{(m\pi)^3}=0 \tag{3.22}$$

$$\sum_m A_m m\pi-a_{20}-a_{30}=0 \tag{3.23}$$

将x和x^2展成余弦级数可以求得

$$\sum_m \frac{1}{(m\pi)^2} = \frac{1}{6}, \quad \sum_m \frac{\cos m\pi}{(m\pi)^2} = -\frac{1}{12} \tag{3.24}$$

将等式(3.22)乘以$m\pi$然后进行求和，并应用到以上二式即可得到等式(3.23)。故等式(3.10)并不是独立的角点条件，这是由于沿x轴$w=0$，必然有$\partial w/\partial x=0$，这可用$(\partial^2 w/\partial x^2)_{(0,0)}=0$的条件来代替，由此可得

$$a_{20}=0$$

同样用$(\partial^2 w/\partial y^2)_{(0,0)}=0$来代替等式(3.11)可得

$$a_{02}=0$$

由等式(3.14)，(3.17)，(3.19)和(3.20)可得

$$a_{30}=-a_{12}\frac{\nu}{3}\frac{a^2}{b^2},\quad a_{03}=-a_{21}\frac{\nu}{3}\frac{b^2}{a^2},\quad a_{31}=a_{12}\frac{\nu}{3}\frac{a^2}{b^2}-\frac{a_{21}}{3},\quad a_{13}=a_{21}\frac{\nu}{3}\frac{b^2}{a^2}-\frac{a_{12}}{3}$$

将以上各等式代入等式(3.21)和(3.22)可得

$$a_{10}=a_{12}\frac{\nu}{3}\frac{a^2}{b^2},\quad a_{01}=a_{21}\frac{\nu}{3}\frac{b^2}{a^2}$$

$$A_m=a_{12}\frac{4\nu\cos m\pi}{(m\pi)^3}\frac{a^2}{b^2}$$

同样由等式(3.1)得

$$E_n=a_{21}\frac{4\nu\cos n\pi}{(n\pi)^3}\frac{b^2}{a^2}$$

应用以上各式则由等式(3.3)和(3.7)得

$$F_n=-G_n\frac{\beta a}{\sinh\beta a}-H_n\left(\beta a\coth\beta a+\frac{2}{1-\nu}\right)$$

$$B_m=-C_m\frac{\alpha b}{\sinh\alpha b}-D_m\left(\alpha b\coth\alpha b+\frac{2}{1-\nu}\right)$$

由等式(3.13)和(3.16)得

$$a_{12}=a_{21}+\frac{3}{1-\nu}\sum_n(D_n-H_n)n\pi \tag{3.25}$$

$$a_{11}=\frac{2}{1-\nu}\sum_m D_m m\pi-a_{21}\frac{\nu}{3}\frac{b^2}{a^2}-a_{12}\left(\frac{2}{3}+\frac{\nu}{3}\frac{a^2}{b^2}\right)$$

由等式(3.2)，(3.4)，(3.6)，(3.8)和(3.18)，并应用到以下二式

$$\sum_m\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{a}{2\beta}\left(\coth\beta a-\frac{1}{\beta a}\right)$$

$$\sum_m\frac{\cos m\pi}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}=\frac{a}{2\beta^3}\left(\frac{1}{\beta a}-\frac{1}{\sinh\beta a}-\frac{\beta a}{6}\right)$$

(将$\sinh\beta x$和$\cosh\beta x$展成余弦级数，并应用到等式(3.24)可以求得以上二式)，最后可得

$$\sum_m\left[C_m\beta-D_m\frac{(\alpha^2+\nu\beta^2)\cos n\pi}{(1-\nu)\beta}\right]\frac{4\alpha^3}{b(\alpha^2+\beta^2)^2}$$

$$+\left[G_n\left(\coth\beta a-\frac{\beta a}{\sinh^2\beta a}\right)-\frac{H_n}{\sinh\beta a}\left(\beta a\coth\beta a+\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\right]\beta$$

$$-\left[\frac{a_{12}}{(n\pi)^2}\left(\frac{1-\nu}{\beta a}+\frac{\nu}{\sinh\beta a}\right)+a_{21}\frac{\nu\cos n\pi}{\beta^2 a^2}\left(\coth\beta a-\frac{1}{\beta a}\right)\right]\frac{4}{b}+\sum_m A_{mn}\alpha=0 \tag{3.26}$$

$$\sum_m\{C_m[\alpha^2+(2-\nu)\beta^2]+D_m(1-\nu)\beta^2\cos n\pi\}\frac{4\alpha^3\beta\cos m\pi}{b(\alpha^2+\beta^2)^2}$$
$$-\left\{\frac{G_n}{\sinh\beta a}[(1-\nu)\ \beta a\coth\beta a+1+\nu]+H_n\left[(3+\nu)\coth\beta a\right.\right.$$
$$\left.\left.+(1-\nu)\frac{\beta a}{\sinh^2\beta a}\right]\right\}\beta^3-\left[\frac{a_{12}}{b^2}\left(\nu\coth\beta a+\frac{2-\nu}{\beta a}\right)+a_{21}\frac{\cos n\pi}{a^2}\left(\frac{1-\nu}{\beta a}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\nu}{\sinh\beta a}\right)\right]\frac{4(1-\nu)}{b}+\sum_m A_{mn}\alpha[\alpha^2+(2-\nu)\beta^2]\cos m\pi=0 \tag{3.27}$$

$$\sum_n\left[G_n\alpha-H_n\frac{(\nu\alpha^2+\beta^2)\cos m\pi}{(1-\nu)\alpha}\right]\frac{4\beta^3}{a(\alpha^2+\beta^2)^2}+\left[C_m\left(\coth\alpha b-\frac{\alpha b}{\sinh^2\alpha b}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{D_m}{\sinh\alpha b}\left(\alpha b\coth\alpha b+\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\right]\alpha-\left[\frac{a_{21}}{(m\pi)^2}\left(\frac{1-\nu}{\alpha b}+\frac{\nu}{\sinh\alpha b}\right)\right.$$
$$\left.+a_{12}\frac{\nu\cos m\pi}{\alpha^2 b^2}\left(\coth\alpha b-\frac{1}{\alpha b}\right)\right]\frac{4}{a}+\sum_n A_{mn}\beta=0 \tag{3.28}$$

$$\sum_n\{G_n[\beta^2+(2-\nu)\alpha^2]+H_n(1-\nu)\alpha^2\cos m\pi\}\frac{4\alpha\beta^3\cos n\pi}{a(\alpha^2+\beta^2)^2}$$
$$-\left\{\frac{C_m}{\sinh\alpha b}[(1-\nu)\alpha b\coth\alpha b+1+\nu]+D_n\left[(3+\nu)\coth\alpha b+(1-\nu)\frac{\alpha b}{\sinh^2\alpha b}\right]\right\}\alpha^3$$
$$-\left[\frac{a_{21}}{a^2}\left(\nu\coth\alpha b+\frac{2-\nu}{\alpha b}\right)+a_{12}\frac{\cos m\pi}{b^2}\left(\frac{1-\nu}{\alpha b}+\frac{\nu}{\sinh\alpha b}\right)\right]\frac{4(1-\nu)}{a}$$
$$+\sum_n A_{mn}[(2-\nu)\alpha^2+\beta^2]\beta\cos n\pi=0 \tag{3.29}$$

$$\sum_m C_m(\alpha b\coth\alpha b-1)\frac{\alpha^2\cos m\pi}{\sinh\alpha b}+\sum_m D_m\alpha\left[\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\coth\alpha b+\frac{\alpha b}{\sinh^2\alpha b}\right)\alpha\cos m\pi\right.$$
$$\left.-\frac{1}{b(1-\nu)}\right]+\sum_n G_n(\beta a\coth\beta a-1)\frac{\beta^2\cos n\pi}{\sinh\beta a}+\sum_n H_n\beta\left[\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\coth\beta a+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\beta a}{\sinh^2\beta a}\right)\beta\cos n\pi-\frac{1}{a(1-\nu)}\right]+\frac{a_{12}}{ab}\left[\sum_m\frac{4\nu}{\alpha b\sinh\alpha b}-\frac{2}{3}\left(1+\nu\frac{a^2}{b^2}\right)\right]$$
$$+\frac{a_{21}}{ab}\left[\sum_n\frac{4\nu}{\beta a\sinh\beta a}-\frac{2}{3}\left(1+\nu\frac{b^2}{a^2}\right)\right]-\sum_m\sum_n A_{mn}\alpha\beta\cos m\pi\cos n\pi=0 \tag{3.30}$$

由等式(3.25)～(3.30)可解得C_m，D_m，G_n，H_n，a_{21}和a_{12}。

四、集 中 载 荷

当板上有一集中载荷P作用在$x=\xi$，$y=\eta$，由等式(1.3)得

$$A_{mn}=\frac{4P\sin\alpha\xi\sin\beta\eta}{Dab(\alpha^2+\beta^2)^2}$$

将上式代入等式(3.26)～(3.30)得

$$\sum_m A_{mn}\alpha=\frac{4P\sin\beta\eta}{Dab}\sum_m\frac{\alpha\sin\alpha\xi}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \tag{4.1}$$

$$\sum_n A_{mn}\beta=\frac{4P\sin\alpha\xi}{Dab}\sum_n\frac{\beta\sin\beta\eta}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \tag{4.2}$$

$$\sum_m A_{mn}\alpha[\alpha^2+(2-\nu)\beta^2]\cos m\pi$$

$$=\frac{4P\sin\beta\eta}{Dab}\sum_m\frac{\alpha\sin\alpha\xi}{(\alpha^2+\beta^2)^2}[\alpha^2+(2-\nu)\beta^2]\cos m\pi \tag{4.3}$$

$$\sum_n A_{mn}\beta[(2-\nu)\alpha^2+\beta^2]\cos n\pi$$

$$=\frac{4P\sin\alpha\xi}{Dab}\sum_n\frac{\beta\sin\beta\eta}{(\alpha^2+\beta^2)^2}[(2-\nu)\alpha^2+\beta^2]\cos n\pi \tag{4.4}$$

$$\sum_m\sum_n A_{mn}\alpha\beta\cos m\pi\cos n\pi$$

$$=\sum_n\frac{4P\beta\sin\beta\eta}{Dab}\cos n\pi\sum_m\frac{\alpha\sin\alpha\xi}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\cos m\pi \tag{4.5}$$

由等式(2.5)～(2.8)可得

$$\sum_m\frac{\alpha\sin\alpha x}{(\alpha^2+\beta^2)^2}=\frac{a}{4\beta^2}\left[\beta x\frac{\cosh\beta(a-x)}{\sinh\beta a}-\beta a\frac{\sinh\beta x}{\sinh^2\beta a}\right)$$

$$\sum_m\frac{\alpha\sin\alpha x}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\cos m\pi=\frac{a}{4\beta^2}\left(\beta x\frac{\cosh\beta x}{\sinh\beta a}-\beta a\coth\beta a\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta a}\right)$$

$$\sum_m\frac{\alpha^3\sin\alpha x}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\cos m\pi=\frac{a}{4}\left[(\beta a\coth\beta a-2)\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta a}-\beta x\frac{\cosh\beta x}{\sinh\beta a}\right]$$

令$x=\xi$代入以上各式然后代入等式(4.1)～(4.5)得

$$\sum_m A_{mn}\alpha=\frac{P\sin\beta\eta\sinh\beta\xi}{Dn\pi\sinh\beta a}\left[\xi\frac{\cosh\beta(a-\xi)}{\sinh\beta\xi}-\frac{a}{\sinh\beta a}\right] \tag{4.6}$$

$$\sum_n A_{mn}\beta=\frac{P\sin\alpha\xi\sinh\alpha\eta}{Dm\pi\sinh\alpha b}\left[\eta\frac{\cosh\alpha(b-\eta)}{\sinh\alpha\eta}-\frac{b}{\sinh\alpha b}\right] \tag{4.7}$$

$$\sum_m A_{mn}\alpha[\alpha^2+(2-\nu)\beta^2]\cos m\pi$$

$$=\frac{P\sin\beta\eta\sinh\beta\xi}{Db\sinh\beta a}[(1-\nu)(\beta\xi\coth\beta\xi-\beta a\coth\beta a)-2] \tag{4.8}$$

$$\sum_n A_{mn}\beta[(2-\nu)\alpha^2+\beta^2]\cos n\pi$$

$$=\frac{P\sin\alpha\xi\sinh\alpha\eta}{Da\sinh\alpha b}[(1-\nu)(\alpha\eta\coth\alpha\eta-\alpha b\coth\alpha b)-2] \tag{4.9}$$

$$\sum_m\sum_n A_{mn}\alpha\beta\cos m\pi\cos n\pi$$

$$=\sum_n\frac{P\sin\beta\eta\sinh\beta\xi}{Db\sinh\beta a}(\xi\coth\beta\xi-a\coth\beta a)\cos n\pi \tag{4.10}$$

由等式(1.1)可得自由角点的挠度和固定边的弯矩为

$$w_{(a,b)}=\sum_m D_m \frac{2m\pi}{1-\nu}+a_{21}\frac{2}{3}$$

$$(M_y)_{y=0}=\left(\sum_m C_m\alpha^2\sin\alpha x-a_{21}\frac{1-\nu}{b^2}\frac{x}{a}\right)2D$$

为简单计，取矩形板$a=b$，且集中载荷作用在（0,0）和（a,b）的联线上，将有$\xi=\eta$，$G_n=C_n$，$H_n=D_n$，$a_{12}=a_{21}$。根据等式(3.26)，(3.27)和(3.30)，取$\nu=0.3$，ξ/a分别等于0.25，0.5，0.75，m和n由1取至8和16时$w_{(a,b)}$的结果 见表1。

表1　自由角点的挠度（单位为$10^{-6}Pa^2/D$）

m,n \ ξ/a	0.25		0.5		0.75	
8	608	1828	24854	33147	92441	127300
16	1171	1750	27538	31534	106138	124083

表1中第一个数值是由等式(4.1)，(4.3) 和 (4.5)求得的，第二个数值是由等式(4.6)，(4.8)和(4.10)求得的。可以看出第一个数值由小变大而第二个数值由大变小并逐渐接 近 精确值，但第二个数值收敛性较好。

仅采用等式(4.6)，(4.8)和(4.10)，m和n由1取至16，23，24，25时的结果见表2。

表2　自由角点的挠度

m,n \ ξ/a	0.25	0.5	0.75
16	1750	31574	124083
23	1603	29478	118080
24	1697	30382	120090
25	1611	29639	118553

可以看出，m和 n 取至偶数时是由大变小，取至奇数时是由小变大，并逐 渐 接 近 精 确值。

采用等式(4.6)，(4.8)和(4.10)，m和n由1取至24和 25，取其平均值可得自由角点的挠度和沿固定边的弯矩，见表3。其中$\xi/a=1$为集中力作用在自由角点，如令 $A_{mn}=0$，且在等式(2.18)中令$R_{(a,b)}=P$时的结果。最后一列为文献[2]当m和n由1取至50的结果。

表3　挠度（Pa^2/D)和弯矩(P)

ξ/a	0.25	0.50	0.75	1	1[2]
$w_{(a,b)}$	0.00165	0.03901	0.11932	0.29649	0.29787
$M_{y\max}(x,0)$	−0.1888	−0.2496	−0.7707	−1.3825	−1.3131
$x/a(M_{y\max})$	0.29	0.87	0.96	0.96	0.975
$M_{y(a,0)}$	0.0031	−0.0779	−0.3627	−0.7049	0

本文的一般解法和常用的迭加法原则上是相同的。文献[2]没有引用等式(1.7)中代数多项式的后八项，因而导致角点(a,0)的弯矩$M_y=0$，故未能满足角点条件$(\partial w/\partial y)_{(a,0)}=0$。文献[3] 虽然引用了全部代数多项式，但在满足角点条件 $(\partial w/\partial y)_{(a,0)}=0$的同时，取$M_{x(a,0)}=\nu M_{y(a,0)}$，因而未能满足$M_{x(a,0)}=0$的要求。

本文的计算得到研究生陈广南同志的帮助，深表感谢。

参 考 文 献

[1] Timoshenko, S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill (1959).
[2] 张福范，两相邻边固定两相邻边自由的矩形板，固体力学学报，4 (1981)，491—502.
[3] Калманок А. С., *Строительная Механика Пластинок*, Москва (1950).

A General Solution of Rectangular Thin Plates in Bending

Huang Yan

(*National University of Defense Technology, Changsha*)

Abstract

In this paper a general solution of rectangular plates in bending is given. The integral constants are determined by means of boundary conditions. This method is simpler and easier than the method of superposition.