应用数学和力学，第8卷第8期(1987年8月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

无穷区域上非线性向量方程初值问题的解的渐近性质*

康盛亮　　张安江

(同济大学，1986年6月6日收到)

摘　要

本文研究无穷域上的初值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=f(t,\ x,\ y;\ \varepsilon),\ x(0,\ \varepsilon)=\xi(\varepsilon)\\&\varepsilon\frac{dy}{dt}=g(t,\ x,\ y;\ \varepsilon),\ y(0,\ \varepsilon)=\eta(\varepsilon)\end{aligned}\right\}\qquad(1.1)$$

其中 x，$f\in E^m$，y，$g\in E^n$，实的小参数 $\varepsilon>0$，$0\leqslant t<+\infty$，在 $g_y(t)$ 是非奇异的和其它适当的假设下，证明了存在一系列 $k+m^*$ 维流形 $\{S_R(\varepsilon)\}\in E^{m+n}$，使得如果 $(\xi(\varepsilon),\eta(\varepsilon))\in S_R(\varepsilon)$，方程(1.1)是正则退化的，并作出了解的 R 阶渐近展开式及其余项估计．

一、引　　言

我们研究下面的向量微分方程在无穷域上的初值问题的渐近解的构造：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=f(t,\ x,\ y;\ \varepsilon),\ x(0,\ \varepsilon)=\xi(\varepsilon)\\&\varepsilon\frac{dy}{dt}=g(t,\ x,\ y;\ \varepsilon),\ y(0,\ \varepsilon)=\eta(\varepsilon)\end{aligned}\right\}\qquad(1.1)$$

这里 x，$f\in E^m$，y，$g\in E^n$，ε 是正的、实的小参数，$0\leqslant t<+\infty$．

(1.1)的退化问题为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=f(t,\ x,\ y;\ 0),\ x(0)=\xi(0)\\&0=g(t,\ x,\ y;\ 0)\end{aligned}\right\}\qquad(1.2)$$

假设方程(1.2)有一个解 $x=x_0(t)$，$y=y_0(t)$，在 $0\leqslant t<+\infty$ 上．

定义　若问题(1.1)的解在 $0<t<+\infty$ 内的任意左闭右开的子区间上，当 $\varepsilon\to+0$ 时，一致收敛于 $(x_0(t),\ y_0(t))$，则称问题(1.1)在 $(x_0(t),\ y_0(t))$ 处是正则退化的．当然，不能要求在 $t=0$ 处(1.1)的解收敛于 $(x_0(t),\ y_0(t))$，除非 $\eta(\varepsilon)\to y_0(0)$，当 $\varepsilon\to+0$ 时．

关于有限域上非线性向量微分方程初值问题的研究，早在1952年 Tikhonov[1] 就证明了在一定条件下，当 $\varepsilon\to0$ 时，$x(t)-x_0(t)=O(1)$，$y(t)-y_0(t)=O(1)$，对 $t\in[d,\ T]$ 一致成

* 林宗池推荐．

立，这里 d 是一个任意正数，T 是某正数。1954年，J. Levin 和 N. Levinson[2]在Jocobian 矩阵(1.4)的所有特征值具有非零实部的条件下，研究了(1.1)在$0\leqslant t\leqslant T$ 上的正则退化。1956年 Levin[6]在 Jacobian 矩阵(1.4)的所有特征值具有非零实部和条件稳定性的情况下，在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上，证明了(1.1)的解是正则退化的。1969年，W. A. Coppel 和 K. W. Chang 在更弱的光滑性条件下，把Levin[5]中的结论更精细化了。1966、1967 年，Hoppensteadt 在[3]、[4]中给出了 Tikhonov 定理的一个证明，并且把结论推广到[0，$+\infty$)的任意紧子集上成立。但他们仅讨论了正则退化，而没有构造出解的渐近展开式。1971年，F. Hoppensteadt[7]给出了在一定条件下，在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上方程(1.1)的解的渐近展开式构造。我们这篇文章对Hoppensteadt的工作做了某些改进和拓广，克服了[7]中构造边界层解在 $\varepsilon=0$ 处出现的困难问题，真接在 $0\leqslant t<+\infty$上构造了渐近解，得出了 $\varepsilon\to+0$ 时解的渐近性质。

我们构造问题(1.1)渐近解的方法受 Hoppensteadt 工作的启发，引进两个辅助问题，外部问题和边界层问题。

外部问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=f(t,\ x,\ y;\ \varepsilon),\ x(0,\ \varepsilon)=\xi^*(\varepsilon)\\&\varepsilon\frac{dy}{dt}=g(t,\ x,\ y;\ \varepsilon)\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

我们要求方程(1.3)有解 $x(t,\ \varepsilon)$，$y(t,\ \varepsilon)$，且此解及其对 ε 的任意阶导数在 $\varepsilon=0$ 处连续，满足 $x(t,\ 0)=x_0(t)$，$y(t,\ 0)=y_0(t)$，在 $0\leqslant t<+\infty$上。

显然，方程(1.3)是由方程(1.1)去掉初始条件 $y(0,\ \varepsilon)$而得到的，并引进了辅助的光滑函数$\xi^*(\varepsilon)$。

研究方程(1.3)的解的方法：先求问题(1.3)的解的形式展开式，给出余项的微分方程，把微分方程化成积分方程。最后，通过对积分方程的讨论，证明积分方程存在唯一解，且阶数为$O(\varepsilon^{R+1})$。在讨论过程中要用到 Jacobian 矩阵

$$\frac{\partial g}{\partial y}(t,\ x_0(t),\ y_0(t),\ 0)\tag{1.4}$$

在 $0\leqslant t<+\infty$上是非奇异的假设。

现在假设外部问题(1.3)，由适当选取的初始条件 $x^*(0,\varepsilon)=\xi^*(\varepsilon)$，其中 $\xi^*(0)=x_0(0)$，已求得一个解 $x^*(t,\varepsilon)$，$y^*(t,\varepsilon)$。在方程(1.1)中作变量变换：

$$X=x-x^*,\quad Y=y-y^*,\ \text{和}\ \tau=\frac{t}{\varepsilon}$$

得到如下的边界层问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dX}{d\tau}=\varepsilon f^*(\tau,X,Y;\varepsilon),\ X(0)=\xi(\varepsilon)-\xi^*(\varepsilon)\\&\frac{dY}{d\tau}=g^*(\tau,X,Y;\varepsilon),\ Y(0)=\eta(\varepsilon)-y^*(0,\varepsilon)\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

这里 f^*，g^* 是通过 f，g 变化过来的。问题(1.5)的解($X_R(\tau,\varepsilon)$，$Y_R(\tau,\varepsilon)$)称为(1.1)的边界层解。我们将证明(1.5)存在唯一解，从而问题(1.1)存在唯一解，且可表为：

$$(x(t,\varepsilon),\ y(t,\varepsilon))=(x^*_R(t,\varepsilon),\ y^*_R(t,\varepsilon))+(X_R(\tau,\varepsilon),\ Y_R(\tau,\varepsilon))$$

在 $0\leqslant t<+\infty$上，这里 $R=1,2,\cdots$.

二、预 备 结 果

为了证明我们的主要结果，需要以下四个引理。

引理 1 (Levin[6]) 设积分方程

$$\left.\begin{aligned}U(\tau,\varepsilon)&=J(\tau,\varepsilon)-\int_{\tau}^{+\infty}\exp[\delta(\tau-\sigma)]\mathscr{F}(\varepsilon\sigma,U,V,W,\varepsilon)d\sigma\\V(\tau,\varepsilon)&=K(\tau,\varepsilon)+\int_{0}^{\tau}\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)\mathscr{G}_1(\varepsilon\sigma,U,V,W,\varepsilon)d\sigma\\W(\tau,\varepsilon)&=L(\tau,\varepsilon)-\int_{\tau}^{+\infty}\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)\mathscr{G}_2(\varepsilon\sigma,U,V,W,\varepsilon)d\sigma\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

如果 $|\mathscr{F}|$，$|\mathscr{G}_i|\leqslant L_3(|U|+|V|+|W|)$，$i=1,2$

$\mathscr{F}_U$，$\mathscr{F}_V$，$\mathscr{F}_W$，$|\mathscr{G}_{iU}|$，$|\mathscr{G}_{iV}|$，$|\mathscr{G}_{iW}|\leqslant L_3(\varepsilon+|U|+|V|+|W|)$

$|\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)|\leqslant\kappa_0\exp[-\delta_0(\tau-\sigma)]\qquad(0\leqslant\sigma\leqslant\tau<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0'')$

$|\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)|\leqslant\kappa_0\exp[-\delta_0(\tau-\sigma)]\qquad(0\leqslant\tau\leqslant\sigma<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0'')$

$|J(\tau,\varepsilon)|+|\kappa(\tau,\varepsilon)|+|L(\tau,\varepsilon)|\leqslant\alpha\exp[-\delta'\tau]$

则存在常数 α_1，ε_1，δ''，使得当 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时，上述积分方程(2.1)有唯一解，且满足

$$|U(\tau,\varepsilon)|+|V(\tau,\varepsilon)|+|W(\tau,\varepsilon)|\leqslant O(\alpha)\exp[-\delta''\tau]$$
$$(0\leqslant\tau<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1)$$

这里"O"在 $0\leqslant\tau<+\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 上一致成立。

引理 2 设 $\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)$，$\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)$ 是下列方程组的基本解矩阵：

$$\frac{d\chi}{d\tau}=(D(\varepsilon\tau)+\delta I_k)\chi,\quad\chi(\sigma,\sigma;\varepsilon)=I_k$$

$$\frac{d\psi}{d\tau}=(E(\varepsilon\tau)+\delta I_{n-k})\psi,\quad\psi(\sigma,\sigma;\varepsilon)=I_{n-k}$$

其中，光滑矩阵 $D(\varepsilon\tau)$ 的所有特征值的实部 $\mathrm{Re}\lambda(t)\leqslant-2\delta$，光滑矩阵 $E(\varepsilon\tau)$ 的所有特征值的实部 $\mathrm{Re}\lambda(t)\geqslant2\delta>0$，则成立下列估计式：

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\varepsilon^r}\chi(\tau,\sigma;\varepsilon)\right|\leqslant\kappa_r\exp[-\delta_r(\tau-\sigma)]\qquad(0\leqslant\sigma\leqslant\tau<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0'')$$

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\varepsilon^r}\psi(\tau,\sigma;\varepsilon)\right|\leqslant\kappa_r\exp[-\delta_r(\sigma-\tau)]\qquad(0\leqslant\tau\leqslant\sigma<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0'')$$

$r=0,1,2,\cdots,R$。其中 $\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_R,\kappa_0,\kappa_1,\cdots,\kappa_R$ 是常数，且满足 $\delta_0>\delta_1>\cdots>\delta_R>\delta_0/2,\kappa_0\leqslant\kappa_1\leqslant\cdots\leqslant\kappa_R$，$R$ 是任意取定的自然数。

证明 利用 L. Flatto 和 N. Levinson[6] 的结果和数学归纳法容易证得上述不等式对 $r=0,1,2,\cdots,R$ 都成立。

引理 3 设积分方程

$$\begin{cases} J_1(\tau,\varepsilon)=-\int_\tau^{+\infty}\exp[\delta(\tau-\sigma)][\sigma\mathscr{F}_t(\sigma)+\mathscr{F}_\varepsilon(\sigma)]d\sigma \\ K_1(\tau,\varepsilon)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\chi(\tau,0,\varepsilon)\eta_1^*(\varepsilon))+\int_0^\tau[\chi_\varepsilon(\tau,\sigma,\varepsilon)\mathscr{G}_1(\sigma) \\ \qquad +\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)(\sigma\mathscr{G}_{1t}(\sigma)+\mathscr{G}_{1\varepsilon}(\sigma))]d\sigma \\ L_1(\tau,\varepsilon)=-\int_\tau^{+\infty}[\psi_\varepsilon(\tau,\sigma,\varepsilon)\mathscr{G}_2(\sigma)+\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)(\sigma\mathscr{G}_{2t}(\sigma)+\mathscr{G}_{2\varepsilon}(\sigma))]d\sigma \end{cases}$$

当 $r=1,2,\cdots,R$ 时，

$$J_{r+1}(\tau,\varepsilon)=\frac{d}{d\varepsilon}J_r(\tau,\varepsilon)-\int_\tau^{+\infty}\exp[\delta(\tau-\sigma)]\Big[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{F}_U(\sigma)U^{(r)}+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{F}_V(\sigma)V^{(r)}+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{F}_W(\sigma)W^{(r)}\Big]d\sigma$$

$$K_{r+1}(\tau,\varepsilon)=\frac{d}{d\varepsilon}K_r(\tau,\varepsilon)+\int_0^\tau\Big[\chi_\varepsilon(\tau,\sigma,\varepsilon)(\mathscr{G}_{1U}(\sigma)U^{(r)}+\mathscr{G}_{1V}(\sigma)V^{(r)}+\mathscr{G}_{1W}(\sigma)W^{(r)})+\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)\Big(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{G}_{1U}(\sigma)U^{(r)}+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{G}_{1V}(\sigma)V^{(r)}+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{G}_{1W}(\sigma)W^{(r)}\Big)\Big]d\sigma$$

$$L_{r+1}(\tau,\varepsilon)=\frac{d}{d\varepsilon}L_r(\tau,\varepsilon)-\int_\tau^{+\infty}\Big[\psi_\varepsilon(\tau,\sigma,\varepsilon)(\mathscr{G}_{2U}(\sigma)U^{(r)}+\mathscr{G}_{2V}(\sigma)V^{(r)}+\mathscr{G}_{2W}(\sigma)W^{(r)})+\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)\Big(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{G}_{2U}(\sigma)U^{(r)}+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{G}_{2V}(\sigma)V^{(r)}+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{G}_{2W}(\sigma)W^{(r)}\Big)\Big]d\sigma$$

其中 $\mathscr{F}(\sigma)$，$\mathscr{G}_i(\sigma)$，$\mathscr{F}_t(\sigma)$，$\mathscr{G}_{it}(\sigma)$ 分别为 $\mathscr{F}(t,U,V,W,\varepsilon)$，$\mathscr{G}_i(t,U,V,W,\varepsilon)$，

$$\mathscr{F}_t=\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}(t,U,V,W,\varepsilon),\quad \mathscr{G}_{it}(\sigma)=\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{G}_i(t,U,V,W,\varepsilon)$$

在 $t=\varepsilon\sigma$，$(U,V,W)=(U(\sigma,\varepsilon),V(\sigma,\varepsilon),W(\sigma,\varepsilon))$ 处的值．它们都具有引理 1 中 $\mathscr{F}$，$\mathscr{G}_i$ 的估计式，且 $\mathscr{F}_U$，$\mathscr{F}_V$，$\mathscr{F}_W$，$|\mathscr{G}_{iU}|$，$|\mathscr{G}_{iV}|$，$|\mathscr{G}_{iW}|$ 具有引理 1 中的性质．如果 $\{U^{(i)},V^{(i)},W^{(i)}\}_{i=0}^r$ 满足不等式：

$$|U^{(i)}(\tau,\varepsilon)|+|V^{(i)}(\tau,\varepsilon)|+|W^{(i)}(\tau,\varepsilon)|\leqslant c_r\Big(\sum_{k=0}^{i}\Big|\frac{d^k}{d\varepsilon^k}\hat{\eta}^*(\varepsilon)\Big|\Big)\exp[-\nu_i\tau]$$

$0\leqslant\tau<+\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_i'$，$i=0,1,\cdots,r$，则

$$|J_{r+1}(\tau,\varepsilon)|+|K_{r+1}(\tau,\varepsilon)|+|L_{r+1}(\tau,\varepsilon)|\leqslant a_{r+1}\Big(\sum_{k=0}^{r+1}\Big|\frac{d^k}{d\varepsilon^k}\hat{\eta}^*(\varepsilon)\Big|\Big)\exp[-\mu_{r+1}\tau] \tag{$\bullet$}$$

这里常数 $\nu_0>\nu_1>\cdots>\nu_r>0$，$\mu_1>\mu_2>\cdots>\mu_{r+1}$．

且有

$$\Big|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J_r(\tau,\varepsilon)\Big|+\Big|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}K_r(\tau,\varepsilon)\Big|+\Big|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}L_r(\tau,\varepsilon)\Big|\leqslant a_{r+1}\Big(\sum_{k=0}^{r+1}\Big|\frac{d^k}{d\varepsilon^k}\hat{\eta}^*(\varepsilon)\Big|\Big)\cdot\exp[-\mu_{r+1}\tau]$$

证明 由 $\mathscr{F}(\sigma)$，$\mathscr{F}_t(\sigma)$，$\mathscr{G}_i(\sigma)$，$\mathscr{G}_{it}$，χ，ψ 的性质容易证得

$$|J_1(\tau,\varepsilon)|+|K_1(\tau,\varepsilon)|+|L_1(\tau,\varepsilon)|\leqslant a_1\Big(\Big|\hat{\eta}^*(\varepsilon)\Big|+\Big|\frac{d}{d\varepsilon}\hat{\eta}^*(\varepsilon)\Big|\Big)\exp[-\mu_1\tau]$$

$$(0\leqslant\tau<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1')$$

其中 α_1，μ_1 是正常数，$(1/2)\min(\nu_0,\ \delta_1)<\mu_1<\min(\nu_0,\ \delta_1)$。

由 $\mathscr{F}_U$，$\mathscr{F}_V$，$\mathscr{F}_W$，$\mathscr{G}_{iU}$，$\mathscr{G}_{iV}$，$\mathscr{G}_{iW}$，$\{U^{(i)},\ V^{(i)},\ W^{(i)}\}_{i=0}^{r}$ 假设的估计式及引理2，利用数学归纳法可以证得不等式(•)对 $r=1,2,\cdots$ 都成立。

引理 4 积分方程组

$$\bar{U}(\tau,\varepsilon)=J_r(\tau,\varepsilon)-\int_{\tau}^{+\infty}\exp[\delta(\tau-\sigma)][\mathscr{F}_U(\sigma)\bar{U}+\mathscr{F}_V(\sigma)\bar{V}+\mathscr{F}_W(\sigma)\bar{W}]d\sigma$$

$$\bar{V}(\tau,\varepsilon)=K_r(\tau,\varepsilon)+\int_0^{\tau}\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)[\mathscr{G}_{1U}(\sigma)\bar{U}+\mathscr{G}_{1V}(\sigma)\bar{V}+\mathscr{G}_{1W}(\sigma)\bar{W}]d\sigma$$

$$\bar{W}(\tau,\varepsilon)=L_r(\tau,\ \varepsilon)-\int_{\tau}^{+\infty}\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)[\mathscr{G}_{2U}(\sigma)\bar{U}+\mathscr{G}_{2V}(\sigma)\bar{V}+\mathscr{G}_{2W}(\sigma)\bar{W}]d\sigma$$

其中 $\mathscr{F}$，$\mathscr{G}_1$，$\mathscr{G}_2$，$\mathscr{F}_U$ 等满足的估计式同引理 1. $U(\sigma,\varepsilon)$，$V(\sigma,\varepsilon)$，$W(\sigma,\varepsilon)$ 是方程(2.1)当 $J=0$，$K=\chi(\tau,0,\varepsilon)\hat{\eta}_1^*(\varepsilon)$，$L=0$ 时的解。$\bar{U}$，$\bar{V}$，$\bar{W}$ 是待定的未知函数。如果

$$|J_r(\tau,\varepsilon)|+|K_r(\tau,\varepsilon)|+|L_r(\tau,\varepsilon)|\leqslant M\exp[-\mu_r\tau]$$
$$(0\leqslant\tau<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_r')$$

其中 M，μ_r 是常数，$\mu_r<\delta_0$。则存在正常数 α_r，使当 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_r$ 时，上述积分方程组有唯一解$(\bar{U},\ \bar{V},\ \bar{W})$，且满足

$$|\bar{U}(\tau,\varepsilon)|+|\bar{V}(\tau,\varepsilon)|+|\bar{W}(\tau,\varepsilon)|\leqslant O(M)\exp[-\mu_r\tau]$$
$$(0\leqslant\tau<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_r)$$

证 用逐次迫近法来证解$(\bar{U},\ \bar{V},\ \bar{W})$的存在唯一性。取$\bar{U}_0=\bar{V}_0=\bar{W}_0=0$，在积分方程组的右端用 $\bar{U}_{i-1}$，$\bar{V}_{i-1}$，$\bar{W}_{i-1}$ 代替 $\bar{U}$，$\bar{V}$，$\bar{W}$ 即得到序列 $\{\bar{U}_i,\ \bar{V}_i,\ \bar{W}_i\}$ 的迭代公式。令 $\bar{\Delta}_i(\tau,\varepsilon)=|\bar{U}_i-\bar{U}_{i-1}|+|\bar{V}_i-\bar{V}_{i-1}|+|\bar{W}_i-\bar{W}_{i-1}|$，由 $\mathscr{F}$，$\mathscr{G}_i$，χ，ψ，U,V,W 的性质，容易证得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\bar{\Delta}_i(\tau,\varepsilon)$$

一致收敛，故序列$\{\bar{U}_i,\ \bar{V}_i,\ \bar{W}_i\}$一致收敛，即上述积分方程组存在解。

类似地，可以证明，上述积分方程组解的唯一性及解的估计式成立。

三、主 要 结 果

为了使问题(1.1)是正则退化的，(1.2)必须有解。故先假设：

(H_1) 方程(1.2)在 $0\leqslant t<+\infty$ 上有一个无限次可微函数解，$x=x_0(t)$，$y=y_0(t)$，且 $x_0(t)$，$y_0(t)$关于 t 的任意阶导数在 $0\leqslant t<+\infty$ 上关于 t 一致有界，$x_0(0)$的最后 $m-m^*$ 个分量为零。

(H_2) 函数 f，g 关于 $(t,\ x,\ y,\ \varepsilon)$ 无限次可微，在$|x(t)-x_0(t)|\leqslant\Delta$，$|y(t)-y_0(t)|\leqslant\Delta$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，$0\leqslant t<+\infty$ 上，这里 Δ，ε_0 是正常数。且在所设的$(x_0(t),\ y_0(t),\ 0)$邻域，$0\leqslant t<+\infty$ 上 f，g 的任意阶偏导数关于 t 一致有界。

引进记号 $g_y(t)=g_y(t,x_0(t),y_0(t),0)$，以及 $g_x(t)$，$f_x(t)$，$f_y(t)$ 具有类似的意义。又假定

(H_3) 矩阵 $g_y(t)$ 有 k 个特征值 $(1\leqslant k\leqslant n)$，它们具有负实部，即 $\mathrm{Re}\lambda(t)\leqslant-2\delta<0$，而其余 $(n-k)$ 个特征值具有正实部，即 $\mathrm{Re}\lambda(t)\geqslant 2\delta>0$，（在 $0\leqslant t<+\infty$ 上），其中 δ 是与 t 无关的正常数。

(H_4) 存在一个无穷次可微矩阵 $P(t)$，满足 $P(t)$，$P^{-1}(t)$ 及其各阶导数关于 t 一致有界 $(0\leqslant t<+\infty)$，使得

$$P^{-1}(t)g_y(t)P(t)=A(t)$$

其中

$$A(t)=\begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & \cdots & A_{1n}(t)\\ & A_{22}(t) & \cdots & A_{2n}(t)\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & A_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

$A_{ij}(t)$ 是 $d_i\times d_j$ 矩阵，当 $i\leqslant j$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{N}d_k=n$，且 $A_{ii}(t)$ 是非奇异的。

另外，下列方程

$$\varepsilon\frac{d\phi_i}{dt}=A_{ii}(t)\phi_i,\quad \phi_i(s)=I_{d_i}\qquad (i=1,2,\cdots,M)$$

$$\varepsilon\frac{d\psi_j}{dt}=A_{jj}(t)\psi_j,\quad \psi_j(s)=I_{d_j}\qquad (j=M+1,\cdots,N)$$

的基本解矩阵满足

$$|\phi_i(t,s;\varepsilon)|\leqslant\kappa\exp[-\nu(t-s)/\varepsilon]\qquad (0\leqslant s\leqslant t<+\infty,\ i=1,\cdots,M)$$

$$|\psi_j(t,s;\varepsilon)|\leqslant\kappa\exp[-\nu(s-t)/\varepsilon]\qquad (0\leqslant t\leqslant s<+\infty,\ j=M+1,\cdots,N)$$

这里 κ，ν 是与 ε，t，s 无关的正常数。

注意 由条件 (H_3)，存在无穷次可微矩阵 $P(t)$，使得 $P^{-1}(t)g_y(t)P(t)=A(t)$，其中 $A_{ii}(t)$ 的所有特征值的实部 $\mathrm{Re}\lambda(t)\leqslant-2\delta<0$，$i=1,\cdots,M$；$A_{jj}(t)$ 的所有特征值的实部 $\mathrm{Re}\lambda(t)\geqslant 2\delta>0$，在 $0\leqslant t<+\infty$ 上（见[8]）。又从[6]知，基本解矩阵 $\phi_i(t,s;\varepsilon)$，$i=1,\cdots,M$，$\psi_j(t,s;\varepsilon)$，$j=M+1,\cdots,N$，满足所要求的不等式，那里的 ν 就取为 δ。

(H_5) 假设线性方程

$$\frac{dx}{dt}=[f_x(t)-f_y(t)g_y^{-1}(t)g_x(t)]x$$

有一个指数二分法，即存在一个方程的基本解矩阵 $\Phi(t)$ 和一个秩为 $m^*(1\leqslant m^*\leqslant m)$ 的 $m\times m$ 阶矩阵 Q，使得下列不等式成立：

$$|\Phi(t)Q\Phi^{-1}(s)|\leqslant L\exp[-\mu(t-s)]\qquad (0\leqslant s\leqslant t<+\infty)$$

$$|\Phi(t)(I_m-Q)\Phi^{-1}(s)|\leqslant L\exp[-\mu(s-t)]\qquad (0\leqslant t\leqslant s<+\infty)$$

这里不妨设

$$Q=\begin{pmatrix} I_{m^*} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times m}$$

其中 I_{m^*} 是 $m^*\times m^*$ 的单位矩阵。L，μ 是正常数，为计算方便起见，不妨设 $\Phi(0)=I_m$。

注意 如果 $f_x(t)-f_y(t)g_y^{-1}(t)g_x(t)$ 关于 t 一致有界（由条件 (H_3) 知，这是显然成立

的)，$f_x(t)-f_y(t)g_y^{-1}(t)g_x(t)$ 有 m^* 个特征值的实部 $\mathrm{Re}\lambda(t)\leqslant -2\mu<0$，$(m-m^*)$ 个特征值的实部 $\mathrm{Re}\lambda(t)\geqslant 2\mu>0$，且 $f_x(t)-f_y(t)g_y^{-1}(t)g_x(t)$ 对 t 的一次微分在 $0\leqslant t<+\infty$ 上适当小，则条件 (H_5) 成立(见[8])。

现在，我们对某个自然数 R 来讨论外部问题(1.3)的求解。

外部问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=f(t,x,y;\varepsilon),\quad x(0;\varepsilon)=\xi^*(\varepsilon)\\&\varepsilon\frac{dy}{dt}=g(t,x,y;\varepsilon)\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

这里当然要求 $\xi^*(0)=x_0(0)$。

我们来求下面形式的渐近解

$$(x^*(t,\varepsilon),y^*(t,\varepsilon))=(x_0^*(t),\ y_0^*(t))+\sum_{r=1}^{R}(x_r^*(t),y_r^*(t))\varepsilon^r+(\mathscr{R}_1^*(t,\varepsilon),\mathscr{R}_2^*(t,\varepsilon))$$

把上述展开式代入方程(1.3)，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_0^*}{dt}=f(t,x_0^*,y_0^*,0),\quad x_0^*(0)=\xi_0^*\\&0=g(t,\ x_0^*,\ y_0^*,\ 0)\end{aligned}\right\}\tag{3.1$_0$}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_r^*}{dt}=f_x^*(t)x_r^*+f_y^*(t)y_r^*+p_r(t,\varepsilon),x_r^*(0)=\xi_r^*\\&\frac{dy_{r-1}^*}{dt}=g_x^*(t)x_r^*+g_y^*(t)y_r^*+q_r(t,\varepsilon)\qquad(r=1,2,\cdots,R)\end{aligned}\right\}\tag{3.1$_r$}$$

这里

$$\xi^*(\varepsilon)=\sum_{r=0}^{R}\xi_r^*\varepsilon^r+\Theta_1(\varepsilon),\quad f_x^*(t)=f_x(t,x_0^*(t),y_0^*(t),0)$$

等等。余项 $p_r(t,\varepsilon)$，$q_r(t,\varepsilon)$ 是以 x_1^*，y_1^*，$\cdots$，x_{r-1}^*，y_{r-1}^* 为变元、以依赖于 t，$x_0^*(t)$，$y_0^*(t)$ 的函数为系数的多项式。

由条件 $(H_1)\sim(H_3)$ 保证问题 $(3.1)_r$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上有唯一解。再加上条件 (H_4)，(H_5)，通过讨论余项的积分方程，我们可以得到：

定理1 若条件 $(H_1)\sim(H_5)$ 成立，则对任意给定一个正整数 R，存在正常数 ε_0'，ρ_0，使得对任何一个函数 $\xi^*(\varepsilon)\in E^m$，满足 $\xi^*(\varepsilon)=\mathrm{Col}(\xi_1^*(\varepsilon),0)$，其中 $\xi_1^*(\varepsilon)$ 是任意的 m^* 维向量，$\xi_1^*(0)=\bar{x}_0(0)$，$|\xi_1^*(\varepsilon)-\bar{x}_0(0)|<\rho_0$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0'$，问题(1.3)有唯一解，$x=x_R^*(t,\varepsilon)$，$y=y_R^*(t,\varepsilon)$，在 $0\leqslant t+<\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0'$ 上满足

$$x_R^*(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{R}x_r^*(t)\varepsilon^r+O(\varepsilon^{R+1}),\quad y_R^*(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{R}y_r^*(t)\varepsilon^r+O(\varepsilon^{R+1})$$

这里"O"在 $0\leqslant t<+\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0'$ 上一致成立，而且存在常数 κ_R，使得

$$\left|\frac{\partial x_R^*}{\partial\xi_1^*}(t,\varepsilon)\right|+\left|\frac{\partial y_R^*}{\partial\xi_1^*}(t,\varepsilon)\right|\leqslant\kappa_R\qquad(0\leqslant t<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0')$$

$|\xi_1^*(\varepsilon)-\bar{x}_0(0)|<\rho_0$。其中 $x_0(0)=\mathrm{Col}(\bar{x}_0(0),0)$。

证 首先引进一个变量变换

$$x=u+\sum_{r=0}^{R}x_r^*(t)\varepsilon^r,\ y=P(t)v+\sum_{r=0}^{R}y_r^*(t)\varepsilon^r-(g_y^*(t))^{-1}g_x^*(t)u \tag{3.2}$$

这里 $u\in E^m$，$v\in E^n$，函数 $x_r^*(t)$，$y_r^*(t)$ 由方程(3.1)决定，$P(t)$ 为条件(H_4)所给出。利用这个变换，方程(1.1)变成

$$\frac{du}{dt}=B(t)u+C(t)v+F(t,u,v,\varepsilon),\quad \varepsilon\frac{dv}{dt}=A(t)v+G(t,u,v,\varepsilon) \tag{3.3}$$

其中 $B(t)=f_x^*(t)-f_y^*(t)(g_y^*(t))^{-1}g_x^*(t)$，$C(t)=f_y^*(t)P(t)$

$A(t)$ 是条件(H_4)中所给出的。

$$F(t,u,v,\varepsilon)=f(t,\ u+\sum_{r=0}^{R}x_r^*\varepsilon^r,Pv+\sum_{r=0}^{R}y_r^*\varepsilon^r-(g_y^*(t))^{-1}g_x^*u,\varepsilon)-f^*(t)$$

$$-\sum_{r=0}^{R}[f_x^*(t)x_r^*+f_y^*(t)y_r^*+p_r^*(t)]\varepsilon^r-B(t)u-C(t)v$$

$$G(t,u,v,\ \varepsilon)=P^{-1}(t)g(t,u+\sum_{r=0}^{R}x_r^*\varepsilon^r,Pv+\sum_{r=0}^{R}y_r^*\varepsilon^r-(g_y^*)^{-1}g_x^*u,\varepsilon)$$

$$+\varepsilon P^{-1}(t)\frac{d}{dt}[(g_y^*(t))^{-1}g_x^*(x)]u+\varepsilon P^{-1}(t)(g_y^*(t))^{-1}g_x^*(t)[Bu+Cu$$

$$+F(t,u,v,\varepsilon)]-\varepsilon P^{-1}(t)P'(t)v-P^{-1}(t)A(t)v-P^{-1}(t)\sum_{r=1}^{R}[f_x^*(t)x_r^*$$

$$+f_y^*(t)y_r^*+p_r^*(t)]\varepsilon^r-P^{-1}(t)\frac{d}{dt}y_R^*(t)\varepsilon^{R+1}$$

当 ε，$|u|$，$|v|$ 充分小时，可以证明

$$F(t,0,0,\varepsilon)=O(\varepsilon^{R+1}),\ F_u(t,u,v,\varepsilon),\ F_v(t,u,v,\varepsilon)=O(\varepsilon+|u|+|v|) \tag{3.4}$$

这里"O"表示在 $0\leqslant t<+\infty$ 上一致地成立。对于 G，G_u，G_v 也有类似的估计式。

从而，当 $|u_1|,|u_2|,|v_1|,|v_2|\leqslant\gamma_1$ 时，有

$$\left.\begin{aligned}&|F(\sigma,u_1,v_1,\varepsilon)-F(\sigma,u_2,v_2,\varepsilon)|\leqslant L_1(\varepsilon+2\gamma_1)(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|)\\&|G(\sigma,u_1,v_1,\varepsilon)-G(\sigma,u_2,v_2,\varepsilon)|\leqslant L_1(\varepsilon+2\gamma_1)(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|)\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

在 $0\leqslant t<+\infty$ 上一致成立。其中 γ_1，L_1 为正常数。

考虑到矩阵 $A(t)$ 是分块上三角形阵，其对角元为 $(A_{ii})_{d_i\times d_i}$，$i=1,\cdots,N$，我们令 $v=\mathrm{Col}(v_1,\cdots,v_N)$，其中 $v_i\in E^{d_i}$，$i=1,\cdots,N$。

方程组(3.3)满足初始条件

$$u(0)=\Theta_1(\varepsilon),\ \Theta_1(\varepsilon)=\xi^*(\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}\xi_r^*\varepsilon^r$$

记 $\Theta_1(\varepsilon)=\mathrm{Col}(\Theta_{11}(\varepsilon),\ \Theta_{12}(\varepsilon))$，$\Theta_{11}(\varepsilon)$ 是 m^* 维向量，$\Theta_{12}(\varepsilon)$ 是 $m-m^*$ 维向量。显然，$\Theta_{12}(\varepsilon)\equiv 0$。设 γ 是一个满足 $0<\gamma<1$ 的待定常数，又定义

$$S=\mathrm{diag}(S_i)\qquad(i=1,2,\cdots,N)$$

为 $n\times n$ 阶矩阵，其中 $S_i=\gamma^i I_{d_i}$，I_{d_i} 是 $d_i\times d_i$ 阶单位阵，$i=1,\cdots,N$。

我们对方程组(3.3)作变换：$v=Sw$，就得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du}{dt}=B(t)u+C(t)Sw+F(t,u,Sw,\varepsilon),\quad u(0)=\Theta_1(\varepsilon)\\&\varepsilon\frac{dw}{dt}=S^{-1}A(t)Sw+S^{-1}G(t,u,Sw,\varepsilon)\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

把方程组(3.6)化成下列积分方程组：

$$\left.\begin{aligned}u(t,\varepsilon)=&\Phi(t)\Theta_1(\varepsilon)+\int_0^t\Phi(t)Q\Phi^{-1}(\sigma)[C(\sigma)Sw(\sigma)+F(\sigma,u,w,\varepsilon)]d\sigma\\&-\int_t^{+\infty}\Phi(t)(I_m-Q)\Phi^{-1}(\sigma)[C(\sigma)Sw(\sigma)+F(\sigma,u,w,\varepsilon)]d\sigma\\w_i(t,\varepsilon)=&\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\varphi_i(t,\sigma,\varepsilon)\Big[\sum_{k=i+1}^{N}\gamma^{k-i}A_{ik}(\sigma)w_k(\sigma)+\gamma^{-i}G_i(\sigma,u,w,\varepsilon)\Big]d\sigma\\&\qquad(i=1,\cdots,M)\\w_j(t,\varepsilon)=&-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\infty}\psi_j(t,\sigma,\varepsilon)\Big[\sum_{k=j+1}^{N}\gamma^{k-j}A_{jk}(\sigma)w_k(\sigma)+\gamma^{-j}G_j(\sigma,u,w,\varepsilon)\Big]d\sigma\\&\qquad(j=M+1,\cdots,N)\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

这里$\varphi_i(t,\sigma,\varepsilon)$，$\psi_i(t,\sigma,\varepsilon)$，$A_{ik}$，$A_{jk}$ 由条件(H_4)给出；$\Phi(t)$，Q 由条件(H_5)给出。$F(\sigma,u,w,\varepsilon)$，$G(\sigma,u,w,\varepsilon)$代替了 $F(\sigma,u,Sw,\varepsilon)$，$G(\sigma,u,Sw,\varepsilon)$仍具有性质(3.4)，(3.5)。积分号下的求和号"Σ"当 $i=N$ 或 $j=N$ 时为零。

我们利用逐次迫近法证明积分方程(3.7)存在唯一解。下面用记号$|\cdot|$表示矩阵和向量的满足相容性的范数，可以任取一种范数，这里我们取$|\cdot|$为1范数，即

$$|(a_{ij})_{n\times n}|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\Big),\quad |(x_1,\cdots,x_n)^T|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

首先注意到，由分部积分和条件(H_4)知：

$$\int_0^t|\varphi_i(t,\sigma,\varepsilon)|d\sigma\leqslant L_2\varepsilon,\quad\int_t^{+\infty}|\psi_i(t,\sigma,\varepsilon)|d\sigma\leqslant L_2\varepsilon$$

其中 L_2 为与 ε 无关的常数。

先证存在性。不妨取 $u^{(0)}=w^{(0)}=0$，则由以下迭代公式可得迭代序列 $\{u^{(l)},w^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$：这$(u^{(l)},w^{(l)})$的迭代公式可由(3.7)式的右端积分号内的$(u,w)$用$(u^{(l-1)},w^{(l-1)})$代替而得到。

设 $$\Delta^{l+1}(t,\varepsilon)=\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant t}\{|u^{(l+1)}(\sigma,\varepsilon)-u^{(l)}(\sigma,\varepsilon)|+|w^{(l+1)}(\sigma,\varepsilon)-w^{(l)}(\sigma,\varepsilon)|\}$$

因为
$$|u^{(l+1)}(t,\varepsilon)-u^{(l)}(t,\varepsilon)|\leqslant\frac{2CL}{\mu}(\gamma+\rho)\Delta^l(+\infty)$$
$$|w_i^{(l+1)}(t,\varepsilon)-w_i^{(l)}(t,\varepsilon)|\leqslant L_2[(N-i)\gamma C_1+\gamma^{-i}\rho]\Delta^l(+\infty)\quad(i=1,\cdots,M)$$
$$|w_j^{(l+1)}(t,\varepsilon)-w_j^{(l)}(t,\varepsilon)|\leqslant L_2[(N-j)\gamma C_1+\gamma^{-j}\rho]\Delta^l(+\infty)\quad(j=M+1,\cdots,N)$$

其中 $\Delta^l(+\infty)\equiv\Delta^l(+\infty,\varepsilon)$，$C=\max\{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\infty}C(t),1\}$，$\rho=L_1(\varepsilon+2\gamma_1)$

$$C_1=\max_{2\leqslant i<j\leqslant N}\{\sup_{0\leqslant t<+\infty}|A_{ij}|\}$$

$$\Delta^{l+1}(+\infty)\leqslant\left[\frac{2CL}{\mu}(\gamma+\rho)+L_2\left(\frac{N(N-1)}{2}C_1\gamma+\gamma^{-N}\rho\right)\right]\Delta^l(+\infty)$$

$$=\left[\left(\frac{2CL}{\mu}+\frac{N(N-1)}{2}C_1L_2\right)\gamma+\left(\frac{2CL}{\mu}+L_2\gamma^{-N}\right)\rho\right]\Delta^l(+\infty)$$

我们取 γ 适当小，使得

$$\left(\frac{2CL}{\mu}+\frac{N(N-1)}{2}C_1L_2\right)\gamma\leqslant\frac{1}{4}$$

取定γ后，取ε充分小（以后将说明γ_1也随之很小），使

$$\left(\frac{2CL}{\mu}+L_2\gamma^{-N}\right)\rho\leqslant\frac{1}{4}$$

从而得　　$\Delta^{l+1}(+\infty)\leqslant\dfrac{1}{2}\Delta^l(+\infty)$

如果　　$\Delta^1(+\infty)<+\infty$，　　则 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\Delta^l(+\infty)$

收敛．

而　$u^{(1)}(t,\varepsilon)=\Phi(t)\Theta_1(\varepsilon)+\int_0^t\Phi(t)Q\Phi^{-1}(\sigma)F(\sigma,0,0,\varepsilon)d\sigma$

$$-\int_t^{+\infty}\Phi(t)(I_m-Q)\Phi^{-1}(\sigma)F(\sigma,0,0,\varepsilon)d\sigma$$

$$w_i^{(1)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\varphi_i(t,\sigma,\varepsilon)\gamma^{-i}G_i(\sigma,0,0,\varepsilon)d\sigma\qquad(i=1,2,\cdots,M)$$

$$w_j^{(1)}(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{+\infty}\psi_j(t,\sigma,\varepsilon)\gamma^{-j}G_j(\sigma,0,0,\varepsilon)d\sigma\qquad(j=M+1,\cdots,N)$$

因　　$\Theta_1(\varepsilon)=\mathrm{Col}(\Theta_{11}(\varepsilon),0)$，则$\Theta_1(\varepsilon)=Q\Theta_1(\varepsilon)$

$\Phi(t)\Theta_1(\varepsilon)=\Phi(t)Q\Phi^{-1}(\sigma)\Phi(\sigma)\Theta_1(\varepsilon)$

$|\Phi(t)\Theta_1(\varepsilon)|\leqslant|\Phi(t)Q\Phi^{-1}(\sigma)||\Phi(\sigma)||\Theta_1(\varepsilon)|$

其中σ固定．

所以，$|\Phi(t)\Theta_1(\varepsilon)|=O(\varepsilon^{R+1})$，当 $\varepsilon\to0$ 时，在 $0\leqslant t<+\infty$上一致成立．

从而　　$\Delta^1(+\infty)=O(\varepsilon^{R+1})$

因　$|u^{(l)}(t,\varepsilon)|$，$|w^{(l)}(t,\varepsilon)|\leqslant\sum\limits_{s=1}^{l}\Delta^s(+\infty)\leqslant2\Delta^1(+\infty)$

则　　$\gamma_1\leqslant2\Delta^1(+\infty)=O(\varepsilon^{R+1})$

故当 ε 充分小时，γ_1也随之充分小．

又因　　$\sum\limits_{l=1}^{\infty}\Delta^l(+\infty)$

收敛，

$$\sum_{l=1}^{\infty}\Delta^l(+\infty)\leqslant 2\Delta^1(+\infty)=O(\varepsilon^{R+1})$$

所以，当 ε 充分小，即存在ε'，使 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon'$时，序列$\{u^{(l)}(t,\varepsilon),\ w^{(l)}(t,\varepsilon)\}$在 $0\leqslant t<+\infty$上一致收敛。由迭代公式知，$\{u^{(l)}(t,\varepsilon),w^{(l)}(t,\varepsilon)\}$ 是 ε 的连续函数，且 $\varepsilon\to 0^+$ 时，存在极限。所以，$\{u^{(l)}(t,\varepsilon),\ w^{(l)}(t,\varepsilon)\}$ 的定义域可以扩充到 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon'$，$0\leqslant t<+\infty$上，于是 $\{u^{(l)}(t,\varepsilon),\ w^{(l)}(t,\varepsilon)\}$在$0\leqslant t<+\infty,0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon'$上一致收敛，显然，其极限函数$(u,w)$是方程组(3.7)的解。

从而，对充分小的$\varepsilon,\gamma(0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon')$方程组(3.7)在$0\leqslant t<+\infty$上有解。因而方程组(3.6)在$0\leqslant t<+\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon'$上有解$(u,w)$，且满足$u(t,\varepsilon)$，$w(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{R+1})$。

同理可证(3.6)的解的唯一性。至此，定理 1 的第一部分证毕。

下面我们考虑方程组(3.7)的解对初始值 $\xi_1^*(\varepsilon)$的光滑性。由常微分方程有关知识得知，方程组(3.7)的解对 $\xi_1^*(\varepsilon)$是可微的。因为

$$\xi^*(\varepsilon)=\sum_{r=0}^{R}\xi_r^*\varepsilon^r+\Theta_1(\varepsilon)$$

所以，解(u,w)对 $\xi_1^*(\varepsilon)$的导数等于 (u,w)对 $\Theta_{11}(\varepsilon)$的导数，且把它们记为$(\dot u,\dot w)$。$\dot u,\dot w$ 应满足下列方程组（这可由(3.7)形式求导得到）：

$$\left.\begin{aligned}
\dot u(t,\varepsilon)=&\mathrm{Col}\,(\Phi_1(t),0)+\int_0^t\Phi(t)Q\Phi^{-1}(\sigma)[C(\sigma)S\dot w(\sigma)\\
&+F_u(\sigma,u,w,\varepsilon)\dot u+F_w(\sigma,u,w,\varepsilon)\dot w]d\sigma\\
&-\int_t^{+\infty}\Phi(t)(I_m-Q)\Phi^{-1}(\sigma)[C(\sigma)S\dot w(\sigma)\\
&+F_u(\sigma,u,w,\varepsilon)\dot u+F_w(\sigma,u,w,\varepsilon)\dot w]d\sigma\\
\dot w_i(t,\varepsilon)=&\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\varphi_i(t,\sigma,\varepsilon)\left[\sum_{k=i+1}^{N}A_{ik}(\sigma)\gamma^{k-i}\dot w_k(\sigma)+\gamma^{-i}G_{iu}(\sigma,u,w,\varepsilon)\dot u\right.\\
&\left.+\gamma^{-i}G_{iw}(\sigma,u,w,\varepsilon)\dot w\right]d\sigma\qquad(i=1,2,\cdots,M)\\
\dot w_j(t,\varepsilon)=&-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{\infty}\psi_j(t,\sigma,\varepsilon)\left[\sum_{k=j+1}^{N}\gamma^{k-j}A_{jk}(\sigma)\dot w_k(\sigma)\right.\\
&\left.+\gamma^{-j}G_{ju}(\sigma,u,w,\varepsilon)\dot u+\gamma^{-j}G_{jw}(\sigma,u,w,\varepsilon)\dot w\right]d\sigma\\
&(j=M+1,\cdots,N)
\end{aligned}\right\}\qquad(3.8)$$

其中　$\Phi(t)=\mathrm{Col}(\Phi_1(t),\Phi_2(t))$，$\Phi_1(t)$是 $m^*\times m$矩阵。

我们仍通过逐次迫近法来证明(3.8)存在唯一解。

取$\dot u^{(0)}=\dot w^{(0)}=0$，并在(3.8)的右端分别用$\dot u^{(l-1)}$，$\dot w^{(l-1)}$，$u^{(l-1)}$，$w^{(l-1)}$代替$\dot u,\dot w,u,w$就得到确定$\dot u^{(l)},\dot w^{(l)},l=1,2,\cdots$的迭代公式，而$(u^{(l)},w^{(l)})$由前面第一部分的证明中所确定。

引进记号$\dot\Delta^{l+1}(t,\varepsilon)=\sup\limits_{0\leqslant\sigma\leqslant t}\{|\dot u^{(l+1)}(\sigma,\varepsilon)-\dot u^{(l)}(\sigma,\varepsilon)|+|\dot w^{(l+1)}(\sigma,\varepsilon)-\dot w^{(l)}(\sigma,\varepsilon)|\}$

则当 ε 充分小，取γ适当小时，有

$$\dot\Delta^l(+\infty)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}\dot\Delta^1(+\infty)+(l-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{l-2}\overline{M}\Delta^1(+\infty)$$

其中$\overline{M}$为适当常数。因为$\Delta^1(+\infty)=O(\varepsilon^{R+1})$，$\dot\Delta^1(+\infty)<+\infty$，则

$$\sum_{l=1}^{\infty}\dot{\Delta}^{l}(+\infty)\leqslant 2\dot{\Delta}^{1}(+\infty)+4\bar{M}\Delta^{1}(+\infty)<+\infty$$

所以，$\{\dot{u}^{(l)}(t,\varepsilon),\ \dot{w}^{(l)}(t,\varepsilon)\}$在$0\leqslant t<+\infty$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon''$上一致收敛。

从迭代公式可以看出$\{\dot{u}^{(l)}(t,\varepsilon),\ \dot{w}^{(l)}(t,\varepsilon)\}$在$\varepsilon=0$处连续，所以，可把$\{\dot{u}^{(l)},\dot{w}^{(l)}\}$的定义域扩充到$0\leqslant t<+\infty, 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon''$上。且$\{\dot{u}^{(l)},\dot{w}^{(l)}\}$在$0\leqslant t<+\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon''$上也一致收敛，其极限函数$(\dot{u},\dot{w})$满足方程组(3.8)和估计式

$$|\dot{u}(t,\varepsilon)|+|\dot{w}(t,\varepsilon)|\leqslant K^*$$

常数K^*不依赖于$t\in[0,+\infty)$，$\varepsilon\in[0,\varepsilon'']$。

同理可证(3.8)解的唯一性。

所以，证得方程组(3.7)存在唯一解，且对Θ_{11}可微分，从而方程组(3.6)存在唯一解(x^*,y^*)，且对$\xi_1^*(\varepsilon)$可微，满足

$$\left|\frac{\partial x^*}{\partial\xi_1^*}\right|+\left|\frac{\partial y^*}{\partial\xi_1^*}\right|\leqslant K,\ 0\leqslant t<+\infty,0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0',|\xi_1^*(\varepsilon)-\bar{x}_0(t)|<\rho_0$$

定理1证毕。

现在假设(1.1)的外部解（即方程(1.3)的解）x_R^*,y_R^*存在。在(1.1)中作变量变换：

$$X=x-x_R^*,\quad Y=y-y_R^*,\tau=\frac{t}{\varepsilon}$$

得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dX}{d\tau}=\varepsilon\hat{f}(\varepsilon\tau,X,Y,\varepsilon),X(0)=\hat{\xi}(\varepsilon)\\&\frac{dY}{d\tau}=\hat{g}(\varepsilon\tau,X,Y,\varepsilon),Y(0)=\hat{\eta}(\varepsilon)\end{aligned}\right\}\qquad(3.9)$$

其中　$\hat{f}(\varepsilon\tau,X,Y,\varepsilon)=f(\varepsilon\tau,x_R^*+X,y_R^*+Y,\varepsilon)-f(\varepsilon\tau,x_R^*,y_R^*,\varepsilon)$

$\hat{g}(\varepsilon\tau,X,Y,\varepsilon)=g(\varepsilon\tau,x_R^*+X,y_R^*+Y,\varepsilon)-g(\varepsilon\tau,x_R^*,y_R^*,\varepsilon)$

$\hat{\xi}(\varepsilon)=\xi(\varepsilon)-\xi^*(\varepsilon)$，$\hat{\eta}(\varepsilon)=\eta(\varepsilon)-y_R^*(0,\varepsilon)$

如果方程(3.9)有解，且解关于ε是$R+1$阶连续可微，且在$\varepsilon=0$处连续，则解可表示为

$$(X_R(\tau,\varepsilon),Y_R(\tau,\varepsilon))=\sum_{r=0}^{R}(X_r(\tau),Y_r(\tau))\varepsilon^r+(\mathscr{R}_3(\tau,\varepsilon),\mathscr{R}_4(\tau,\varepsilon))$$

将上式代入(3.9)，得：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dX_0}{d\tau}=0,\qquad X_0(0)=\hat{\xi}_0\\&\frac{dY_0}{d\tau}=\hat{g}(0,X_0,Y_0,0),Y_0(0)=\hat{\eta}_0\end{aligned}\right\}\qquad(3.10)_0$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dX_r}{d\tau}=P_r(\tau),\qquad X_r(0)=\hat{\xi}_r\\&\frac{dY_r}{d\tau}=\hat{g}_X(\tau)X_r+\hat{g}_Y(\tau)Y_r+Q_r(\tau),\ Y_r(0)=\hat{\eta}_r\quad(r=1,2,\cdots,R+1)\end{aligned}\right\}\qquad(3.10)_r$$

这里 $\hat{\xi}(\varepsilon)=\sum_{r=0}^{R}\hat{\xi}_r\varepsilon^r+\Theta_2(\varepsilon)$, $\hat{\eta}(\varepsilon)=\sum_{r=0}^{R}\hat{\eta}_r\varepsilon^r+\Theta_3(\varepsilon)$

$$\hat{g}_X(\tau)=\frac{\partial\hat{g}}{\partial X}(0,X_0,Y_0,0),\ \hat{g}_Y(\tau)=\frac{\partial\hat{g}}{\partial Y}(0,X_0,Y_0,0)$$

$P_r(\tau)$, $Q_r(\tau)$ 是以 $X_1,Y_1,\cdots,X_{r-1},Y_{r-1}$为变元，以依赖于$\tau,X_0(\tau)$，$Y_0(\tau)$的函数为系数的多项式。

定理2 若条件$(H_1)\sim(H_5)$成立，则对充分小的ε，存在一个k维流形$\mathscr{S}_R(\varepsilon)\subset E^{m+n}$，使得当$(\hat{\xi}(\varepsilon),\hat{\eta}(\varepsilon))\in\mathscr{S}_R(\varepsilon)$时，方程(3.9)有唯一解$X=X_R(\tau,\varepsilon)$，$Y=Y_R(\tau,\varepsilon)$，满足

$$X_R(\tau,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}X_r(\tau)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1}),\ Y_R(\tau,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}Y_r(\tau)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1}) \tag{3.11}$$

这里$O(\varepsilon^{R+1})$当$\varepsilon\to+0$时，在$0\leqslant t<+\infty$上一致成立。R是任意固定的自然数。X_r，Y_r可由$(3.10)_r$唯一确定。最后，存在常数M,ν',ε_0''，使得

$$|X_R(\tau,\varepsilon)|+|Y_R(\tau,\varepsilon)|\leqslant M\exp[-\nu'\tau]\qquad(0\leqslant t<+\infty,0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0'')$$

证 因为$\hat{g}_Y(t,0,0,0)=g_y^*(t,x_0^*(t),y_0^*(t),0)$，由条件$(H_2)$和$(H_3)$知存在一个光滑可逆矩阵$R(t)$（见[9]），满足$R(t)$，$R^{-1}(t)$关于$t$一致有界，使得

$$R^{-1}(t)\hat{g}_Y(t,0,0,0)R(t)=\mathrm{diag}(D(t),E(t))$$

这里D是$k\times k$矩阵，它所有特征值的实部$\mathrm{Re}\lambda(t)\leqslant-2\delta<0$，$E$是$(n-k)\times(n-k)$矩阵，它所有特征值的实部$\mathrm{Re}\lambda(t)\geqslant2\delta>0$，在$0\leqslant t<+\infty$上。下面我们仍然是对在定理1中所固定的$R$来讨论。

对方程(3.9)作变换

$$\left.\begin{aligned}&X=U\exp[-\delta\tau]\\&Y=\exp[-\delta\tau]R(\varepsilon\tau)\binom{V}{W}-\hat{g}_Y^{-1}(\varepsilon\tau,0,0,0)\hat{g}_X(\varepsilon\tau,0,0,0)U\exp[-\delta\tau]\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

其中$V\in E^k$，$W\in E^{n-k}$，则方程(3.9)变成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dU}{d\tau}=\delta U+\mathscr{F}(\varepsilon\tau,U,V,W,\varepsilon),U(0)=\hat{\xi}^*(\varepsilon)\\&\frac{dV}{d\tau}=(D(\varepsilon\tau)+\delta I_k)V+\mathscr{G}_1(\varepsilon\tau,U,V,W,\varepsilon),\ V(0)=\hat{\eta}_1^*(\varepsilon)\\&\frac{dW}{d\tau}=(E(\varepsilon\tau)+\delta I_{n-k})W+\mathscr{G}_2(\varepsilon\tau,U,V,W,\varepsilon),\ W(0)=\hat{\eta}_2^*(\varepsilon)\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

其中I_k是$k\times k$单位阵，I_{n-k}是$(n-k)\times(n-k)$单位阵，$\hat{\xi}^*(\varepsilon)=\hat{\xi}(\varepsilon)$，

$$\begin{pmatrix}\hat{\eta}_1^*(\varepsilon)\\\hat{\eta}_2^*(\varepsilon)\end{pmatrix}=R^{-1}(0)\,[\hat{\eta}(\varepsilon)+\hat{g}_Y^{-1}(0,0,0,0)\hat{g}_X(0,0,0,0)\hat{\xi}(\varepsilon)]$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\varepsilon\tau,U,V,W,\varepsilon)=\varepsilon\exp[\delta\tau]\{&f(\varepsilon\tau,x_R^*+U\exp[-\delta\tau],\\&y_R^*+\exp[-\delta\tau]R\binom{V}{W}-\hat{g}_Y^{-1}(\varepsilon\tau,0,0,0)\\&\cdot\hat{g}(\varepsilon\tau,0,0,0)U\exp[-\delta\tau],\varepsilon)-f(\varepsilon\tau,x_R^*,y_R^*,\varepsilon)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{G}=\begin{pmatrix}\mathscr{G}_1\\\mathscr{G}_2\end{pmatrix}=R^{-1}(\varepsilon\tau)\Big\{\Big[&g\Big(\varepsilon\tau,x_R^*+U\exp[-\delta\tau],y_R^*+\exp[-\delta\tau]R\binom{V}{W}\\&-\hat{g}_Y^{-1}(\varepsilon\tau,0,0,0)\hat{g}_X(\varepsilon\tau,0,0,0)U\exp(-\delta\tau),\varepsilon\Big)-g(\varepsilon\tau,x_R^*,y_R^*,\varepsilon)\Big]\\&\cdot\exp[\delta\tau]+\delta R\binom{V}{W}-R'\binom{V}{W}+\frac{d}{d\tau}(\hat{g}_Y^{-1}(\varepsilon\tau,0,0,0)\hat{g}_X(\varepsilon\tau,0,0,0))U\end{aligned}$$

$$+\hat{g}_Y^{-1}(\varepsilon\tau,0,0,0)\hat{g}_X(\varepsilon\tau,0,0,0)\mathscr{F}\Big\}$$
$$-\begin{pmatrix} D(\varepsilon\tau)+\delta I_k & 0 \\ 0 & E(\varepsilon\tau)+\delta I_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ W\end{pmatrix}$$

其中$\hat{\eta}_1^*$，$\mathscr{G}_1\in E^k$，$\hat{\eta}_2^*$，$\mathscr{G}_2\in E^{n-k}$。

容易证明：当$\varepsilon,|U|,|V|,|W|\to 0$时，有估计式

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{F}=O[\varepsilon(|U|+|V|+|W|)]\leqslant L_3(\varepsilon(|U|+|V|+|W|))\\&\mathscr{G}_i=O(|U|+|V|+|W|)\leqslant L_3(|U|+|V|+|W|)\\&\mathscr{F}_\varepsilon,\mathscr{F}_U,\mathscr{F}_V,\mathscr{F}_W,\mathscr{G}_{iU},\mathscr{G}_{iV},\mathscr{G}_{iW}=O(\varepsilon+|U|+|V|+|W|)\\&\qquad\leqslant L_3(\varepsilon+|U|+|V|+|W|)\end{aligned}\right\}\tag{3.14}$$

其中$i=1,2$。L_3是正常数。且对$\mathscr{F}$，$\mathscr{G}$的上述估计适用于$\mathscr{F}_t,\mathscr{G}_t,\mathscr{G}_\varepsilon$。

设$\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)$，$\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)$是下列方程组的基本解矩阵：

$$\frac{d\chi}{d\tau}=(D(\varepsilon\tau)+\delta I_k)\chi,\chi(\sigma)=I_k,\quad \frac{d\psi}{d\tau}=(E(\varepsilon\tau)+\delta I_{n-k})\psi,\ \psi(\sigma)=I_{n-k}$$

则有

$$|\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)|\leqslant k_0\exp[-\delta_0(\tau-\sigma)]\qquad(0\leqslant\sigma\leqslant\tau<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0')$$
$$|\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)|\leqslant k_0\exp[-\delta_0(\sigma-\tau)]\qquad(0\leqslant\tau\leqslant\sigma<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0')$$

其中k_0,δ_0是常数。(见[6])。

我们考虑微分方程组(3.13)的特定初始值问题，其积分方程形式为：

$$\left.\begin{aligned}&U(\tau,\varepsilon)=-\int_\tau^{+\infty}\exp[\delta(\tau-\sigma)]\mathscr{F}(\varepsilon\sigma,U,V,W,\varepsilon)d\sigma\\&V(\tau,\varepsilon)=\chi(\tau,0,\varepsilon)\ \hat{\eta}_1^*(\varepsilon)+\int_0^\tau\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)\mathscr{G}_1(\varepsilon\sigma,U,V,W,\varepsilon)d\sigma\\&W(\tau,\varepsilon)=-\int_\tau^{+\infty}\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)\mathscr{G}_2(\varepsilon\sigma,U,V,W,\varepsilon)d\sigma\end{aligned}\right\}\tag{3.15}$$

由引理1知，存在$\alpha_1>0$，当$k_0|\hat{\eta}_1^*(\varepsilon)|\leqslant\alpha_1$时，方程组(3.15)有唯一解，且满足下列不等式：

$$|U(\tau,\varepsilon)|+|V(\tau,\varepsilon)|+|W(\tau,\varepsilon)|\leqslant s_1|\hat{\eta}_1^*(\varepsilon)|\exp[-\nu_0\tau]$$
$$(0\leqslant\tau<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon^{(0)})\tag{3.16}$$

其中$s_1,\nu_0,\varepsilon^{(0)}$是正常数，$\delta_0/2<\nu_0<\delta_0$。

下面证明方程组(3.15)的解$U(\tau,\varepsilon)$，$V(\tau,\varepsilon)$，$W(\tau,\varepsilon)$是ε的光滑函数。为此，我们先假设U,V,W关于ε（在$0\leqslant t<+\infty$上）有$R+1$阶导数，求出这些导数的估计式。对方程(3.15)形式地求导（关于ε）r次$(r=1,2,\cdots,R+1)$：

$$\left.\begin{aligned}&U^{(r)}(\tau,\varepsilon)=J_r(\tau,\varepsilon)-\int_\tau^{+\infty}\exp[\delta(\tau-\sigma)][\mathscr{F}_UU^{(r)}+\mathscr{F}_VV^{(r)}\\&\qquad+\mathscr{F}_W\cdot W^{(r)}]d\sigma\\&V^{(r)}(\tau,\varepsilon)=K_r(\tau,\varepsilon)+\int_0^\tau\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)[\mathscr{G}_{1U}U^{(r)}+\mathscr{G}_{1V}\cdot V^{(r)}\\&\qquad+\mathscr{G}_{1W}\cdot W^{(r)}]d\sigma\\&W^{(r)}(\tau,\varepsilon)=L_r(\tau,\varepsilon)-\int_\tau^{+\infty}\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)[\mathscr{G}_{2U}U^{(r)}+\mathscr{G}_{2V}\cdot V^{(r)}\\&\qquad+\mathscr{G}_{2W}\cdot W^{(r)}]d\sigma\end{aligned}\right\}\tag{3.17$_r$}$$

由引理 2 知，有估计式：$(r=1,2,\cdots,R+1)$

$$\left|\frac{d^r}{d\varepsilon^r}\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)\right|\leqslant\kappa_r\exp[-\delta_r(\tau-\sigma)]\qquad(0\leqslant\sigma\leqslant\tau<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0'')$$

$$\left|\frac{d^r}{d\varepsilon^r}\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)\right|\leqslant\kappa_r\exp[-\delta_r(\sigma-\tau)]\qquad(0\leqslant\tau\leqslant\sigma<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0'')$$

其中$\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_{R+1}$，$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{R+1},\varepsilon_0''$ 是正常数，且满足

$$\kappa_1\leqslant\kappa_2\leqslant\cdots\leqslant\kappa_{R+1},\quad \delta_0>\delta_1>\cdots>\delta_{R+1}>\frac{1}{2}\delta_0$$

现在来证明(3.17)存在唯一解。当$r=1$时，由引理 3 知：

$$|J_1(\tau,\varepsilon)|+|K_1(\tau,\varepsilon)|+|L_1(\tau,\varepsilon)|\leqslant\alpha_1\left(|\hat{\eta}^*(\varepsilon)|+\left|\frac{d\hat{\eta}^*(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|\right)\exp[-\mu_1\tau]$$

由引理4 知：积分方程$(3.17)_1$存在唯一解，且解满足

$$|U^{(1)}(\tau,\varepsilon)|+|V^{(1)}(\tau,\varepsilon)|+|W^{(1)}(\tau,\varepsilon)|$$

$$\leqslant s_2\left(|\hat{\eta}^*(\varepsilon)|+\left|\frac{d}{d\varepsilon}\hat{\eta}^*(\varepsilon)\right|\right)\exp[-\mu_1\tau]$$

假设积分方程$(3.17)_r$当$r=0,1,\cdots,l$时都有解，且解满足

$$|U^{(r)}(\tau,\varepsilon)|+|V^{(r)}(\tau,\varepsilon)|+|W^{(r)}(\tau,\varepsilon)|\leqslant s_r\left(\sum_{k=0}^{r}\left|\frac{d^k}{d\varepsilon^k}\hat{\eta}^*(\varepsilon)\right|\right)\exp[-\mu_r\tau]$$

由引理 3 知：

$$|J_{l+1}(\tau,\varepsilon)|+|K_{l+1}(\tau,\varepsilon)|+|L_{l+1}(\tau,\varepsilon)|\leqslant\alpha_{l+1}\left(\sum_{k=0}^{l+1}\left|\frac{d^k}{d\varepsilon^k}\hat{\eta}^*(\varepsilon)\right|\right)\exp[-\mu_{l+1}\tau]$$

由引理 4 知：积分方程$(3.17)_{l+1}$有解，且解满足：

$$|U^{(l+1)}(\tau,\varepsilon)|+|V^{(l+1)}(\tau,\varepsilon)|+|W^{(l+1)}(\tau,\varepsilon)|$$

$$\leqslant s_{l+1}\left(\sum_{k=0}^{l+1}\left|\frac{d^k}{d\varepsilon^k}\hat{\eta}^*(\varepsilon)\right|\right)\exp[-\mu_{l+1}\tau]$$

所以，我们得到先验估计：$(r=0,1,2,\cdots,R+1)$

$$|U^{(r)}(\tau,\varepsilon)|+|V^{(r)}(\tau,\varepsilon)|+|W^{(r)}(\tau,\varepsilon)|\leqslant s_r\left(\sum_{k=0}^{r}\left|\frac{d^k}{d\varepsilon^k}\hat{\eta}^*(\varepsilon)\right|\right)\exp[-\mu_r\tau]$$

$$(0\leqslant\tau<+\infty,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_r)$$

这里$s_0,s_1,\cdots,s_{R+1}$，$\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_{R+1},\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{R+1},\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{R+1}$，都是常数。且$s_0\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant s_{R+1},\mu_0>\mu_1>\cdots>\mu_{R+1}$，$\varepsilon_0\geqslant\varepsilon_1\geqslant\cdots\geqslant\varepsilon_{R+1}$，$\alpha_0\leqslant\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_{R+1}$。

现在，我们来证明方程(3.15)的解有关于ε的$R+1$阶导数，且在$\varepsilon=0$处连续。证明方法仍用逐次追近法。对(3.15)式关于ε求导：

$$
\left.\begin{aligned}
U^{(1)}(\tau,\varepsilon) &= -\int_{\tau}^{+\infty}\exp[\delta(\tau-\sigma)](\sigma\mathscr{F}_t(\sigma)+\mathscr{F}_\varepsilon(\sigma))d\sigma \\
&\quad -\int_{\tau}^{+\infty}\exp[\delta(\tau-\sigma)][\mathscr{F}_U(\sigma)U^{(1)}+\mathscr{F}_V(\sigma)V^{(1)} \\
&\quad +\mathscr{F}_W(\sigma)W^{(1)}]d\sigma \\
V^{(1)}(\tau,\varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}[\chi(\tau,0,\varepsilon)\hat{\eta}^*(\varepsilon)]+\int_0^{\tau}[\chi_\varepsilon(\tau,\sigma,\varepsilon)\mathscr{G}_1(\sigma) \\
&\quad +\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)(\sigma\mathscr{G}_{1t}(\sigma)+\mathscr{G}_{1\varepsilon}(\sigma))]d\sigma+\int_0^{\tau}\chi(\tau,\sigma,\varepsilon) \\
&\quad \cdot\Big[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{G}_{1U}(\sigma)U^{(1)}+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{G}_{1V}(\sigma)V^{(1)} \\
&\quad +\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{G}_{1W}(\sigma)W^{(1)}\Big]d\sigma \\
W^{(1)}(\tau,\varepsilon) &= -\int_{\tau}^{+\infty}[\psi_\varepsilon(\tau,\sigma,\varepsilon)\mathscr{G}_2(\sigma)+\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)(\sigma\mathscr{G}_{2t}(\sigma)+\mathscr{G}_{2\varepsilon}(\sigma))]d\sigma \\
&\quad -\int_{\tau}^{\infty}\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)\Big[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{G}_{2U}(\sigma)U^{(1)}+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{G}_{2V}(\sigma)V^{(1)} \\
&\quad +\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathscr{G}_{2W}(\sigma)W^{(1)}\Big]d\sigma
\end{aligned}\right\}\qquad(3.18)
$$

取$U_0=V_0=W_0=0$，$U_0^{(1)}=V_0^{(1)}=W_0^{(1)}=0$，我们通过(3.15)和(3.18)可得到$\{U_i, V_i, W_i\}$，$\{U_i^{(1)}, V_i^{(1)}, W_i^{(1)}\}$的迭代公式，其中$U_i^{(1)}$，$V_i^{(1)}$，$W_i^{(1)}$分别是$U_i, V_i, W_i$对$\varepsilon$的导数($i=1,2,\cdots$)。

由$\{U_i^{(1)}, V_i^{(1)}, W_i^{(1)}\}$的迭代公式，我们有估计式：

$$
\left.\begin{aligned}
|U_{i+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)-U_i^{(1)}(\tau,\varepsilon)| &\leqslant \int_{\tau}^{+\infty}\exp[\delta(\tau-\sigma)](1+\sigma)4L_3\gamma\Delta_i(\sigma,\varepsilon)d\sigma \\
&\quad +\int_{\tau}^{+\infty}\exp[\delta(\tau-\sigma)][C_2\gamma_1\Delta_i(\sigma,\varepsilon)+4L_3\gamma\Delta_i^{(1)}(\sigma,\varepsilon)]d\sigma \\
|V_{i+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)-V_i^{(1)}(\tau,\varepsilon)| &\leqslant \int_0^{\tau}\kappa_1\exp[-\delta_1(\tau-\sigma)](2+\sigma)4L_3\gamma \\
&\quad \cdot\Delta_i(\sigma,\varepsilon)d\sigma+\int_0^{\tau}\kappa_0\exp[-\delta_0(\tau-\sigma)][C_2\gamma_1\Delta_i(\sigma,\varepsilon) \\
&\quad +4L_3\gamma\Delta_i^{(1)}(\sigma,\varepsilon)]d\sigma \\
|W_{i+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)-W_i^{(1)}(\tau,\varepsilon)| &\leqslant \int_{\tau}^{+\infty}\kappa_1\exp[\delta_1(\tau-\sigma)](2+\sigma)4L_3\gamma \\
&\quad \cdot\Delta_i(\sigma,\varepsilon)d\sigma+\int_{\tau}^{+\infty}\kappa_0\exp[\delta_0(\tau-\sigma)][C_2\gamma_1\Delta_i(\sigma,\varepsilon) \\
&\quad +4L_3\gamma\Delta_i^{(1)}(\sigma,\varepsilon)]d\sigma
\end{aligned}\right\}\qquad(3.19)
$$

其中 $\Delta_i(\tau,\varepsilon)=|U_i(\tau,\varepsilon)-U_{i-1}(\tau,\varepsilon)|+|V_i(\tau,\varepsilon)-V_{i-1}(\tau,\varepsilon)|+|W_i(\tau,\varepsilon)-W_{i-1}(\tau,\varepsilon)|$
$|U_i|$，$|V_i|$，$|W_i|\leqslant\gamma$，$i=1,2,\cdots$，γ是固定常数。

$$C_2=\max\{\sup|F_{uu}(t,u,w,\varepsilon)|,\ |\sup|F_{uw}|,\ \sup|F_{ww}|;$$

$$0\leqslant t<+\infty,\ |u|,|w|\leqslant\delta,0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}$$

设 $|U_i^{(1)}|$, $|V_i^{(1)}|$, $|W_i^{(1)}|\leqslant\gamma_1$, $\Delta_i^{(1)}(\tau,\varepsilon)=|U_i^{(1)}(\tau,\varepsilon)-U_{i-1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)|$

$$+|V_i^{(1)}(\tau,\varepsilon)-V_{i-1}^{(1)}(\tau-\varepsilon)|+|W_i^{(1)}(\tau,\varepsilon)-W_{i-1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)|$$

又 $U_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)=0$, $V_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}(\chi(\tau,0,\varepsilon)\cdot\hat{\eta}^*(\varepsilon))$, $W_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)=0$

所以 $$\Delta_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)\leqslant\beta_1\exp[-\delta_1\tau]$$

当 ε 充分小，γ 取得适当小时，利用数学归纳法容易证得：

$$\Delta_i^{(1)}(\tau,\varepsilon)\leqslant\left\{3\alpha\cdot M_1(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\beta_1\right\}\exp[-\nu_1\tau]$$

M_1为常数。

所以，$$\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i^{(1)}(\tau,\varepsilon)$$

一致收敛，取 $\gamma_1=3\beta_1$，显然

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i^{(1)}(\tau,\varepsilon)\leqslant\gamma_1\exp[-\nu_1\tau]$$

于是，$|U_i^{(1)}|,|V_i^{(1)}|,|W_i^{(1)}|\leqslant\gamma_1$ 成立。

$\{U_i,V_i,W_i\}$，$\{U_i^{(1)},V_i^{(1)},W_i^{(1)}\}$在 $0\leqslant\tau<+\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 上一致收敛。从而证得，积分方程的解对ε一次可微，在$0\leqslant\tau<+\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$上连续。

假设方程(3.15)的解在 $0\leqslant t<+\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_r$ 上对 ε 是r次可微，要证(3.15)的解在$0\leqslant t<+\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_{r+1}$上对$\varepsilon$是$r+1$次可微。

由引理 3 和引理 4，类似可证

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i^{(r+1)}(\tau,\varepsilon)$$

一致收敛，即$\{U_i^{(r)},V_i^{(r)},W_i^{(r)}\}$，$\{U_i^{(r+1)},V_i^{(r+1)},W_i^{(r+1)}\}$一致收敛。所以，方程(3.15)对 ε 为$(r+1)$次可微。

为了使微分方程能化成积分方程(3.15)，方程(3.13)的初始条件必须满足

$$\hat{\xi}^*(\varepsilon)=U(0,\varepsilon;\hat{\eta}_1^*),\quad \hat{\eta}^*(\varepsilon)=W(0,\varepsilon;\hat{\eta}_1^*)$$

令 $\mathscr{S}_R(\varepsilon)=\{(\hat{\xi}^*(\varepsilon),\ \hat{\eta}_1^*(\varepsilon),\ \hat{\eta}_2^*(\varepsilon))\,|\,\hat{\xi}^*(\varepsilon)=U(0,\varepsilon;\hat{\eta}_1^*(\varepsilon)),\hat{\eta}_2^*(\varepsilon)=W(0,\varepsilon;\hat{\eta}_1^*(\varepsilon))\}$

定理 2 证毕。

现在，我们综合定理1、2，可得到定理3：

定理3 若条件$(H_1)\sim(H_6)$成立，则存在一列单调下降的函数序列$\{\varepsilon_R\}$，和一列$k+m^*$维流形$\{S_R(\varepsilon)\}\in E^{m+n}$，使得当$(\xi(\varepsilon),\ \eta(\varepsilon))\in S_R(\varepsilon)$时，问题(1.1)有唯一解 $x=x(t,\varepsilon)$，$y=y(t,\varepsilon)$，$0\leqslant t<+\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_R$。并且存在一个外部解 $(x_R^*(t,\varepsilon),y_R^*(t,\varepsilon))$ 和一个边界层解 $(X_R(\tau,\varepsilon),Y_R(\tau,\varepsilon))$使得

$$(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon))=(x_R^*(t,\varepsilon),y_R^*(t,\varepsilon))+\left(X_R\left(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon\right),Y_R\left(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon\right)\right)$$

$$(0\leqslant t<+\infty,0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_R)$$

其次，外部解满足

$$x_R^*(t,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}x_r^*(t)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1}),\ y_R^*(t,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}y_r^*(t)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1})$$

其中$O(\varepsilon^{R+1})$当$\varepsilon\to+0$时，在$0\leqslant t<+\infty$上一致成立。$x_r^*(t)$，$y_r^*(t)$是由问题(3.1)所决定。$\xi^*(\varepsilon)=x^*(0,\varepsilon)$。

边界层解满足

$$X_R(\tau,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}X_r(\tau)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1}),\ Y_R(\tau,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}Y_r(\tau)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1})$$

最后，存在正常数$\{\tilde{\kappa}_R,\tilde{\delta}_R,\tilde{\varepsilon}_R\}$，使得

$$|X_R(\tau,\varepsilon)|+|Y_R(\tau,\varepsilon)|\leqslant\tilde{\kappa}_R|\eta(\varepsilon)-y_R^*(0,\varepsilon)|\exp[-\tilde{\delta}_R\tau]$$

在$0\leqslant\tau<+\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}_R$上成立。

证 现在假设$\xi^*(\varepsilon)$是按定理1要求的ε的光滑函数。令$x_R^*(t,\varepsilon;\xi^*)$，$y_R^*(t,\varepsilon;\xi^*)$是(1.1)的外部问题(1.3)的解。作变换

$$X=x-x_R^*(t,\varepsilon;\xi^*),\ Y=y-y_R^*(t,\varepsilon;\xi^*),\ \tau=\frac{t}{\varepsilon}$$

则$X=X_R(\tau,\varepsilon)$，$Y=Y_R(\tau,\varepsilon)$是方程(3.9)的解，且满足$X_R(0)=\hat{\xi}(\varepsilon)$，$Y_R(0)=\hat{\eta}(\varepsilon)$。

通过变换(3.12)，$U(0)=\hat{\xi}^*(\varepsilon)=\hat{\xi}(\varepsilon)$，$V(0)=\hat{\eta}_1^*(\varepsilon)$，$W(0)=\hat{\eta}_2^*(\varepsilon)$。这里$\hat{\eta}_1^*(\varepsilon)$是通过$\xi^*(\varepsilon)$，$\hat{\eta}_1(\varepsilon)$变换而得到的。记(3.15)的解为$U(\tau,\varepsilon;\xi^*,\hat{\eta}_1^*)$，$V(\tau,\varepsilon;\hat{\eta}^*,\hat{\eta}_1^*)$，$W(\tau,\varepsilon;\hat{\xi}^*,\hat{\eta}_1^*)$，则$X=X_R(\tau,\varepsilon;\xi^*,\hat{\eta}_1^*)$，$Y=Y_R(\tau,\varepsilon;\xi^*,\hat{\eta}_1^*)$。由方程(3.7)知，$x_R^*(t,\varepsilon;\xi^*)$的前面$m^*$个分量等于$\xi^*(\varepsilon)$的前面$m^*$个分量。

令 $\xi(\varepsilon)=\mathrm{Col}(\xi_1(\varepsilon),\xi_2(\varepsilon))$，$U=\mathrm{Col}(U_1,U_2)$，其中，$\xi_1,U_1\in E^{m^*}$，$\xi_2,U_2\in E^{m-m^*}$。

我们将要证明，存在$\xi^*(\varepsilon)=\mathrm{Col}(\xi_1^*(\varepsilon),0)$，使得

$$\xi_1(\varepsilon)-\xi_1^*(\varepsilon)=U_1(0,\varepsilon;\xi^*(\varepsilon),\mathscr{R}(\eta(\varepsilon)-y_R^*(0,\varepsilon;\xi^*)))$$

这里$\mathscr{R}(\eta(\varepsilon)-y_R^*(0,\varepsilon;\xi^*(\varepsilon)))=\hat{\eta}_1^*(\varepsilon)$。

先证U,V,W是ξ_1^*的光滑函数。对方程(3.15)关于ξ_1^*形式求导得：

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}(\tau,\varepsilon)&=-\int_\tau^{+\infty}\exp[\delta(\tau-\sigma)][\mathscr{F}_U(\pi)\dot{U}+\mathscr{F}_V(\pi)\dot{V}\\&\qquad+\mathscr{F}_W(\pi)\dot{W}+\mathscr{F}_{\xi_1^*}(\pi)]d\sigma\\\dot{V}(\tau,\varepsilon)&=-\chi(\tau,0,\varepsilon)\dot{y}_{R_1}^*(0,\varepsilon;\xi_1^*)+\int_0^\tau\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)[\mathscr{G}_{1U}(\pi)\dot{U}\\&\qquad+\mathscr{G}_{1V}(\pi)\dot{V}+\mathscr{G}_{1W}(\pi)\dot{W}+\mathscr{G}_{1\xi_1^*}(\pi)]d\sigma\\\dot{W}(\tau,\varepsilon)&=-\int_\tau^{+\infty}\psi(\tau,\sigma,\varepsilon)[\mathscr{G}_{2U}(\pi)\dot{U}+\mathscr{G}_{2V}(\pi)\dot{V}\\&\qquad+\mathscr{G}_{2W}(\pi)\dot{W}+\mathscr{G}_{2\xi^*}(\pi)]d\sigma\end{aligned}\right\}\tag{3.20}$$

其中$\dot{U},\dot{V},\dot{W}$表示U,V,W对ξ_1的一阶导数，$\dot{y}_{R_1}^*(0,\varepsilon;\xi_1^*)$是$Q^{-1}(0)[\eta(\varepsilon)-y^*(0,\varepsilon;\xi_1^*)+\hat{g}_Y^{-1}(0,0,0,0)\hat{g}_X(0,0,0,0)(\xi(\varepsilon)-\xi^*(\varepsilon))]$的前面$k$行组成的$k\times n$矩阵，$\pi(\sigma,\varepsilon)=(\varepsilon\sigma,U,V,W,\varepsilon;\xi_1^*)$。

由方程(3.1)决定的$x_r^*(t)$，$y_r^*(t)$显然是ξ_1^*的光滑函数，因为$(\partial/\partial\xi_1^*)x_R^*(t,\varepsilon;\xi^*)$，$(\partial/\partial\xi_1^*)y_R^*(t,\varepsilon;\xi^*)$关于$t$是一致有界的，所以$\partial x_r^*/\partial\xi_1^*$，$\partial y_r^*/\partial\xi_1^*$关于$t$也一致有界。显然$\mathscr{F}(\pi)$，

$\mathscr{G}_1(\pi)$，$\mathscr{G}_2(\pi)$是ξ_1^*的光滑函数，仍具有(3.14)的性质。与定理2关于ε可微性的证明方法一样，通过逐次迫近法，可以证明(3.20)有解，且解是(3.15)的解对ξ_1^*的一次微分，满足

$$|\dot{U}(\tau,\varepsilon)|+|\dot{V}(\tau,\varepsilon)|+|\dot{W}(\tau,\varepsilon)|\leqslant M\varepsilon\exp[-\nu\tau]$$

这里M,ν是常数，$\nu<\delta_0$。

所以
$$\left[\frac{\partial U_1}{\partial\xi_1^*}(0,\varepsilon;\xi_1^*(\varepsilon))\right]=O(\varepsilon)$$

在$0\leqslant t<+\infty$上对每个小$\varepsilon>0$成立。

令
$$\Omega(\xi_1^*,\varepsilon)=\xi_1(\varepsilon)-\xi_1^*(\varepsilon)-U_1(0,\varepsilon;\xi_1^*,\ \hat{\eta}_1^*)$$

因$\xi_1^*(0)=\xi_1(0)=x_0(0)$的前$m^*$个分量组成的向量，由$\mathscr{F}$的性质(3.14)知，

$$U|_{\varepsilon=0}=0,\ \text{则有}\quad \Omega(\xi_1^*(0),0)=0$$

又因
$$\frac{\partial\Omega(\xi_1^*,\varepsilon)}{\partial\xi_1^*}=-I-\dot{U}_1(0,\varepsilon;\xi_1^*,\ \hat{\eta}_1^*)$$

则有
$$\frac{\partial}{\partial\xi_1^*}\Omega(\xi_1^*(0),0)=-I$$

由隐函数存在定理知：$\Omega(\xi_1^*,\varepsilon)=0$唯一决定$\xi_1^*=\xi_1^*(\varepsilon)$。

因而每固定$\xi_1(\varepsilon),\eta_1(\varepsilon)$之后，随之确定$\xi_2(\varepsilon),\eta_2(\varepsilon)$，使得问题(1.1)存在正则退化的渐近序列解。即存在一个$k+m^*$维流形$S_R(\varepsilon)$，当$(\xi(\varepsilon),\eta(\varepsilon))\in S_R(\varepsilon)$时，有定理3的结论。

上述讨论是对固定的自然数R进行的。由条件$(H_1)\sim(H_5)$知，R可以是任意取的。故对每个自然数R，存在一个$k+m^*$维流形，即存在一列m^*+k维流形$\{S_R(\varepsilon)\}$：$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_R$，满足定理3的要求。

定理3证毕。

参 考 文 献

[1] Тихонов А. Н., Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных, *Математическии Сборник*, **31** (73), 3 (1952), 575—586.

[2] Levin, J. J. and N. Levinson, Singular perturbations of nonlinear systems of differential equations and associated boundary layer equation, *J. Rational Mech. Anal.*, **3** (1954), 247—270.

[3] Hoppensteadt, F., Singular perturbations on the infinite interval, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **123**, 2 (1966), 521—535.

[4] Hoppensteadt, F., Stability in systems with parameters, *J. Math. Anal. Appls.*, **18**, 1 (1967), 129—134.

[5] Levin, J. J., Singular perturbations of nonlinear systems of differential equations related to conditional stability, *Duke, J. Math.*, **23**, 4 (1956), 609—620.

[6] Flatto, L. and N. Levinson, Periodic solutions of singular perturbed systems, *J. Rational Mech. Anal.*, **4** (1955), 943—950.

[7] Hoppensteadt, F., Properties of solutions of ordinary differential equations with small parameter, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **24** (1971), 807—840.

[8] Coppel, W. A., Dichotomies and reducibility, *J. Diff. Equations*, 3 (1967), 500—521.

[9] Chang, K. W. and W. A. Coppel, Singular perturbations of initial value problems over a finite interval, *Arch. Rational Meth. Anal.*, **32**, 4 (1969), 268—290.

Asymptotic Properties of Solutions of Nonlinear Vector Initial Value Problem on the Infinite Interval

Kang Sheng-liang Zhang An-jiang

(*Tongji University, Shanghai*)

Abstract

In this paper we study initial value problems on the infinite interval:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=f(t,x,y;\varepsilon),\ \ x(0,\varepsilon)=\xi(\varepsilon) \\ &\varepsilon\frac{dy}{dt}=g(t,x,y;\varepsilon),\ \ y(0,\varepsilon)=\eta(\varepsilon) \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

where $x,f\in E^m$, $y,g\in E^n,\varepsilon$ is a real small positive parameter, $0\leqslant t<+\infty$. On condition that $g_y(t)$ is nonsingular and under other assumptions, we have proved that there are serial $(k+m^*)$-dimensional manifolds $\{S_R(\varepsilon)\}\in E^{m+n}$ such that (1.1) degenerates regularly provided $(\xi(\varepsilon),\ \eta(\varepsilon))\in S_R(\varepsilon)$.

Besides, the R-order asymptotic expansions of solutions are constructed, and their errors are estimated.