应用数学和力学，第8卷第9期(1987年9月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 奇次维保测度映象的紊动性态*

程 宝 龙

(中南工业大学，1986年4月5日收到)

**摘 要**

本文考察了一个三次保测度映象$C$，它亦是由Henon映象扩充而成的．我们研讨了它的紊动现象，并提供了由低维映象的紊动性来判定高维映象是否存在紊动性态的可能性．

## 一、前 言

许多物理、力学及天文等问题，均可归结为动力系统的研究．近二十多年来，对偶次维的保测度映象已有了大量的研究，在那里，人们可以运用KAM理论．

典型的二次保测度映象是由Henon[1]研究过的

$$T:\begin{cases}x_{n+1}=f(x_n,\ y_n)\\ y_{n+1}=g(x_n,\ y_n)\end{cases}$$

其中$f$，$g$为$x$，$y$的二次多项式，在保测度条件

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=1$$

的限制下，映象$T$可具有下列形式：

$$\left.\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n\cos\alpha-(y_n-x_n^2)\sin\alpha\\ y_{n+1}&=x_n\sin\alpha+(y_n-x_n^2)\cos\alpha\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中$\alpha$为参数($0<\alpha<\pi$)．

对奇次维的保测度映象而言，由于它的线性化映象的不动点常常是不稳定的，致使它的研究比偶次维的有着明显的困难和差异．在文[2]中，孙义燧在(1.1)式中加上了一个微小的周期扰动，将$T$扩充成某个三维映象$\phi$，然后采用数值分析的方法，发现它有某些与二维情况很相类似的性态，亦找到了这两者间的一些重要差异．

显见，对同一个二维映象，可以按不同的途径去扩充成三维映象，利用这种手段，就能尽量多地去揭示三维映象的各种新的性态．

本文给出一个由$T$扩充而成的三维映象$C$．以之为例，探讨了这个奇次维映象的紊动性态，并给出了由低维映象的紊动性来判定高维紊动存在的准则．

---

* 钱伟长推荐．
中国科学院科学基金资助的课题．

## 二、映象C及它的周期点的性态

我们考察三维映象$C$

$$C:\begin{cases} x_{n+1}=x_n\cos\alpha-(y_n-x_n^2)\sin\alpha+z_n\sin\alpha & (2.1a)\\ y_{n+1}=x_n\sin\alpha+(y_n-x_n^2)\cos\alpha-z_n\cos\alpha & (2.1b)\\ z_{n+1}=Ax_n+x_n^2+z_n+D & (2.1c)\end{cases}$$

显然，有

$$\frac{\partial(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})}{\partial(x_n,y_n,z_n)}=1$$

因而，映象$C$是保测度的。

设$(x_0,y_0,z_0)$是映象$C$的$k$($k=1$, 2, …)周期点，即映象$C$具有周期为$k$的轨道

$$(x_0,y_0,z_0),\ (x_1,y_1,z_1),\ \cdots,\ (x_{k-1},y_{k-1},z_{k-1}) \tag{2.2}$$

我们有

**定理1** 记

$$F(x)=(1-A\sin\alpha+2\cos\alpha)x$$

$$L(p,q,r)=p+(1+2\cos\alpha)q+q^2\sin\alpha-r+D\sin\alpha$$

则点$(x_0,y_0,z_0)$成为映象$C$的周期$k$点的必要条件是轨道(2.2)中每点的$x$坐标值适合方程组

$$\left.\begin{array}{l} F(x_0)=L(x_{k-1},\ x_1,\ x_2)\\ F(x_1)=L(x_0,\ x_2,\ x_3)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F(x_{k-2})=L(x_{k-3},\ x_{k-1},\ x_0)\\ F(x_{k-1})=L(x_{k-2},\ x_0,\ x_1)\end{array}\right\} \tag{2.3}$$

反之，若有一组$x_0$, $x_1$, …, $x_{k-1}$适合(2.3)，则取

$$\left.\begin{array}{l} y_0=(x_{k-1}-x_0\cos\alpha)/\sin\alpha\\ z_0=(x_1-2x_0\cos\alpha-x_0^2\sin\alpha+x_{k-1})/\sin\alpha\end{array}\right\} \tag{2.4}$$

时，$(x_0,\ y_0,\ z_0)$必是$C$的周期$k$点。

**证** 由(2.1a), (2.1b)可得

$$x_{n+1}\cos\alpha+y_{n+1}\sin\alpha=x_n$$

就有

$$y_n=(x_{n-1}-x_n\cos\alpha)/\sin\alpha \tag{2.5a}$$

由(2.1a)又有

$$z_n=(x_{n+1}-2x_n\cos\alpha-x_n^2\sin\alpha+x_{n-1})/\sin\alpha \tag{2.5b}$$

由(2.1c)有

$$z_n=[x_{n-2}+(A\sin\alpha-2\cos\alpha)x_{n-1}+x_n+D\sin\alpha]/\sin\alpha \tag{2.5c}$$

于是，就得

$$(1-A\sin\alpha+2\cos\alpha)x_n=x_{n-1}+(1+2\cos\alpha)x_{n+1}+x_{n+1}^2\sin\alpha-x_{n+1}+D\sin\alpha \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1).$$

故若$(x_0, y_0, z_0)$是映象$C$的周期$k$点，就必会成立(2.3)式。

反之，在有关假设下，经不断迭代就有

$$y_1=(x_0-x_1\cos\alpha)/\sin\alpha$$
$$z_1=(x_2-2x_1\cos\alpha-x_1^2\sin\alpha+x_0)/\sin\alpha$$
$$y_2=(x_1-x_2\cos\alpha)/\sin\alpha$$
$$z_2=(x_3-2x_2\cos\alpha-x_2^2\sin\alpha+x_1)/\sin\alpha$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

设若对$k-2$成立

$$y_{k-2}=(x_{k-3}-x_{k-2}\cos\alpha)/\sin\alpha$$
$$z_{k-2}=(x_{k-1}-2\cos x_{k-2}-x_{k-2}^2\sin\alpha+x_{k-3})/\sin\alpha$$

就有

$$y_{k-2}-z_{k-2}=(-x_{k-1}+x_{k-2}\cos\alpha+x_{k-2}^2\sin\alpha)/\sin\alpha$$

于是可算得

$$y_{k-1}=(x_{k-2}-x_{k-1}\cos\alpha)/\sin\alpha$$
$$z_{k-1}=(x_0-2x_{k-1}\cos\alpha-x_{k-1}^2\sin\alpha+x_{k-2})/\sin\alpha$$

最后，顾及(2.4)式就有

$$\begin{aligned}x_k&=x_{k-1}\cos\alpha+x_{k-1}^2\sin\alpha-(y_{k-1}-z_{k-1})\sin\alpha\\&=x_0\end{aligned}\tag{2.6a}$$

$$\begin{aligned}y_k&=x_{k-1}\sin\alpha-x_{k-1}^2\cos\alpha+(y_{k-1}-z_{k-1})\cos\alpha\\&=y_0\end{aligned}\tag{2.6b}$$

$$\begin{aligned}z_k&=Ax_{k-1}+x_{k-1}^2+z_{k-1}+D\\&=z_0\end{aligned}\tag{2.6c}$$

藉助定理1，我们有下述推论：

**推论1** 设$(x_0, y_0, z_0)$是映象$C$的不动点，则它适合方程

$$x_0^2+Ax_0+D=0\tag{2.7}$$

**证** 这时，由定理1可得

$$X_0^2\sin\alpha+X_0A\sin\alpha+D\sin\alpha=0$$

即

$$X_0^2+AX_0+D=0$$

显见，不动点存在的必要条件是$A^2\geqslant 4D$。

**推论2** 若$(x_0, y_0, z_0)$是$C$的周期2点，则

当$\cot\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{A}{2}$时， $x_{0,1}=-\cot\dfrac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\cot^2\dfrac{\alpha}{2}-D}$

当$\cot\dfrac{\alpha}{2}\neq\dfrac{A}{2}$时， 则$x_0$，$x_1$同于一维映象

$$X=f_1(x)=Px^2+Qx+R\tag{2.8}$$

的周期2解。此中

$$P=(2\cot\frac{\alpha}{2}-A)^{-1}$$

$$Q=2P\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$R=PD$$

**证** 由定理1可得

$$\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-A\sin\frac{\alpha}{2}\right)x_0=2x_1\cos\frac{\alpha}{2}+x_1^2\sin\frac{\alpha}{2}+D\sin\frac{\alpha}{2} \tag{2.9a}$$

及

$$\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-A\sin\frac{\alpha}{2}\right)x_1=2x_0\cos\frac{\alpha}{2}+x_0^2\sin\frac{\alpha}{2}+D\sin\frac{\alpha}{2} \tag{2.9b}$$

由这些就导出本推论的全部内容。

可以断言：

（1） 当$\cot\alpha/2=A/2$时，由(2.7)所确定的映象$C$的两个不动点恰好就构成了$C$的周期2解的轨道。若$D=\cot^2\alpha/2$，则(2.8)的周期2解不存在.

（2） 当$A\in(2\cot\frac{\alpha}{2}-\frac{4}{3}\cot^2\frac{\alpha}{2},\ 2\cot\frac{\alpha}{2}-\left(4\cot^2\frac{\alpha}{2}\right)/(1+\sqrt{6})]$时，(2.8)式总有周期2解。

事实上，对情况(2)，我们作变换

$$X=R-X' \qquad x=-Qx'/P$$

(2.8)式就改写为

$$X'=\lambda'x'(1-x') \tag{2.10}$$

此中

$$\lambda'=Q^2/P$$

显见，若$\lambda'\in(3,\ 1+\sqrt{6}]$时，对任意的初值，总会有周期2解$x_0$，$x_1$。此时就有

$$x_{0,1}=[1+\lambda'\pm\sqrt{(1+\lambda')(\lambda'-3)}]/2\lambda'$$

**推论3** (1)若$S_1=(1+2\cos\alpha-A\sin\alpha)=0$，则映象$C$没有周期3点。

(2)若$S_1\neq0$，记

$$S=\sin\alpha/S_1$$
$$T=(1+2\cos\alpha)/S_1$$
$$U=D\sin\alpha/S_1$$

则映象$C$的周期3解的$x$坐标值相同于一维的二次函数

$$X=f_2(x)=Sx^2+Tx+U \tag{2.11}$$

的周期3解。

（3） 当

$$A=[(1+\sqrt{8})(1+2\cos\alpha)\sin\alpha-(1+2\cos\alpha)^2]/(1+\sqrt{8})\sin^2\alpha \tag{2.12}$$

时，$f_2(x)$必有周期3解。

**证** (1)若$S_1=0$，则由定理1知：$x_0$，$x_1$，$x_2$必须同时适合一维的二次方程

$$Sx^2+Tx+U=0$$

然而它不能具有三个不同的实根。

(2)若$S_1 \neq 0$，就有

$$x_0 = Sx_1^2 + Tx_1 + U$$
$$x_1 = Sx_2^2 + Tx_2 + U$$
$$x_2 = Sx_0^2 + Tx_0 + U$$

这证实了结论。

(3)我们作变换

$$X = U - X''$$
$$x = -Tx''/S$$

(2.7)式就可改写为

$$X'' = \lambda'' x''(1 - x'') \tag{2.13}$$

此处

$$\lambda'' = T^2/S$$

对这著名的虫口方程，已知在 $\lambda'' = 1 + \sqrt{8}$ 时将存在周期3解。

## 三、讨论和进一步的命题

由推论3得知：只要映象$C$中的参数$A$作适当的选取，将此映象限制在$X$轴上时必具有周期3解。基于Li—Yorke[3]的著名论断：周期3意味着紊动！顾及映象$C$中的$y$，$z$轴方向的运动可以由$x$轴方向的运动性态来表现，于是，$y$和$z$轴方向上亦将具有$x$轴方向上的相同性态。从而三维映象$C$将呈现出与$x$轴方向上相类似的性态。

一般说来，我们有

命题$C_0$对映象$C_1$：

$$C_1:\begin{cases} X_{n+1}^1 = f_1(X_n^1, X_n^2, \cdots, X_n^i) \\ X_{n+1}^2 = f_2(X_n^1, X_n^2, \cdots, X_n^i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{n+1}^i = f_i(X_n^1, X_n^2, \cdots, X_n^i) \end{cases} \qquad (1 \leqslant i < \infty) \tag{3.1}$$

它若能经非奇异变换后，改写成$C_2$：

$$C_2:\begin{cases} X_{n+1}^1 = F_1(X_n^{j+1}, \cdots, X_n^i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{n+1}^j = F_j(X_n^{j+1}, \cdots, X_n^i) \\ X_{n+1}^{j+1} = X_n^{j+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{n+1}^i = X_n^i \end{cases} \qquad (1 \leqslant j < i) \tag{3.2}$$

若在$i-j$维空间中映象$C_2$具有紊动性态，则可去推断映象$C_1$亦将具有类似于$i-j$维空间中的那些紊动性态，因为这时的$C_1$只受$i-j$个独立变量的控制。

当$i-j=1$时，我们能籍助 Li-Yorke 的结论简捷地去断言一维映象紊动性的存在。对于一般的$j$值，本命题提供了用低维映象的紊动来判定高维映象是否在紊动现象的可能性（例如：$S_1=0$时，$C$必无紊动现象）。

## 参 考 文 献

[1] Henon, M., Numerical study of quadratic area-preserving mappings, *Quart. Appl. Math.*, 27 (1969), 291.

[2] 孙义燧，三维保测映象中的不变流形，*Sci Sini.*, 27 (1984), 174.

[3] Li, T. Y., and J. A. Yorke, Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, 82 (1975), 985.


# Chaotic Behavior of the Measure-Preserving Mappings with Odd Dimension


Cheng Bao-long

*(Central South University of Technology, Changsha)*



### Abstract

In this paper, we consider the measure-preserving mapping $C$ with dimension 3 which is also the expansion of Henon mapping. Then we study the character of its fixed points and chaotic behavior. Next we offer a possibility that using the chaotic behavior of the lower dimensional mappings brings about the higher.