应用数学和力学，第8卷第10期(1987年10月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

结构的延拓及三斜结构系统的代数弹性运动的数学性质*

谷安海

(郑州铝厂，1986年1月6日收到)

摘　要

本文的目的并非简单地评述弹性静力学。著名的Cauchy六方程，其命题

$$e_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x^i}\text{及}\quad e_{jk}=\frac{\partial u_k}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x^k}\qquad(1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3)$$

是由位移函数$(u_i,\ u_j,\ u_k)=u(x^i,\ x^j,\ x^k)$的九个偏导数线性表达的，但其逆命题是该六个方程不可能表达阵$(\partial(u_i,\ u_j,\ u_k)/\partial(x^i,\ x^j,\ x^k))$的九个元素，这是由于在给定点上的变形的几何表示至今尚不完全[1]。用几何语言来说，其逆命题的含意就是：在空间中任意三角形（正交除外）边的"平方长"运算用Pythogora's定理的结论是不真的[2]。

本文将叙述代数弹性运动的某些数学规律及其与上述问题的关系。

一、引　言

设X为一几何对象：矢量空间V，仿射几何A，投影几何P或基本域F；而Aut$X$为X的一切自同构的集合。单位映射I属于Aut$X$并且a，b，$c\in$Aut$X$，则$a(bc)=(ab)c$及$a^{-1}\in$Aut$X$。因此Aut$X$对乘法运算是一个群。由观察得知Aut$X$中有两个重要子群：子群AfA包括从A到A的一切仿射变换，称为A上的仿射群，而子群TrA则包括A中的一切平移变换。在Aut$P$中存在一个子群PrP，它包括了P上的一切直射变换，并称其为P上的投影群[2]。

众所周知，最简单的一种线性变换群是投影群如：

$$P\tilde{x}_j=\sum_{k=0}^{n}a_{jk}x^k\qquad(j=0,1,\cdots,n)\tag{1.1}$$

其中$P\neq0$；(x^k)是P^n中给定点M的齐次坐标；$(\tilde{x}_j)$是变换后像点$\tilde{M}$的齐次坐标。

若把这些齐次坐标替换为一组新的常数：

$$X^1=\frac{x^1}{x^0},\cdots,X^n=\frac{x^n}{x^0}\tag{1.2}$$

并令$a_{00}=1$，而一切$a_{0k}=0$ $(k=1,\cdots,n)$（因a_{jk}的任意性），则(1,1)变为：

* 钱伟长推荐。

$$\tilde{X}_j=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}X^k+a_{j0} \qquad (j=1,\cdots,n) \tag{1.3}$$

一般，假定一切 $a_{j0}=0$ $(j=1,\cdots,n)$，则像集与变换下的原集重合，并得

$$\tilde{X}_j=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}X^k \qquad (j=1,\cdots,n) \tag{1.4}$$

严格地说，因为给定(1.4)的齐次坐标的一个连比

$$X^1:X^2:\cdots:X^n=p:q:\cdots:r \tag{1.5}$$

就可确定 P^n 中的一个点 M，所以在逻辑上，给定阵(a_{jk})的一切元素的一个连比就可确定一个投影群。

如将线性系统(1.4)写为紧凑的形式

$$AX=B \tag{1.6}$$

其中：A 为 $n\times n$ 的阵，B 为常数列阵，X 为坐标行阵。

当 $B=0$ 时，则(1.6)变为齐次线性系统。再由 Grame's 定律得知，该系统的解有两种情况：

(i) 若

$$\det A\neq 0 \tag{1.7}$$

则该 $AX=0$ 具有唯一的矢量解为 $X=A^{-1}0=0$。

(ii) 相反，如 $AX=0$ 具有任意矢量（$X=0$ 除外）解的一切集合，则必须

$$\det A=0 \text{[3]} \tag{1.8}$$

因此，解答了(1.6)就意味着寻找到(1.1)或(1.4)的一切解。

把以上所述进行扼要小结，可以肯定地说，由于投影群可以退变为仿射子群，所以实仿射几何就包括了投影几何的一切内容[4]。

二、预 备 定 理

定义 1 设 V 为矢量空间，M 为 V 的子空间。若 a 为 V 的固定矢量，$a+M$ 及 $a-M$ 分别表示 $a+m$ 的和集及 $a-m$ 的差集（其中 m 跑遍 M），于是称其为 V 的变换子空间(或称傍系空间)。

定义 2 若 V 为域 F 上的矢量空间，T，S 为 V 的傍系空间，则 S 中一切傍系空间的集合称为 S 上的仿射几何且简记为 $A(S)$。

若 $T\subset S$ 且 $A(T)\subset A(S)$，则 $A(T)$ 为 $A(S)$的子几何。

引理 1 同域、等维的两个仿射几何是同构的。

证 设 $A=A(T)$，$A'=A(T')$且傍系空间 $T=a+M$，$T'=a'+M'$。因为同域、等维的两个子空间M，M'是同构的，且 a，a' 是固定的，所以存在一个同构 $f:M\to M'$。若映射

$$\alpha:T\to(T-a)f+a'$$

其中 $T\in A$，可把 A 变为 A'。而其逆映射

$$\alpha^{-1}:T'\to(T'-a')f^{-1}+a$$

其中 $T'\in A'$，又可把 A' 逆变为 A。因此，α 及 α^{-1} 显然保持包含关系，所以 α 就是 A 到 A' 的同构，证毕。

定义 3 若 V 为实矢量空间，σ 为 V 上的正定（或半正定）双线型，则(V, σ)就是欧氏空间。

定义 4 具有距离 d 的实仿射几何 $A(S)$称为欧氏空间。

若 T 为 S 上的傍系空间，而 d 为 $A(T)$ 上的距离，则 $A(T, d)$ 就是 $A(S, d)$的子几何。

命题 1 设具有基$\{a^1,\cdots,a^n\}$的 E^n 为欧氏空间，具有凸生成基 $\{e^1, \cdots, e^q\}$ $(1\leqslant q\leqslant n)$的 L^q 为 E^n 的子空间。若 a^0 为 E^n 中的固定矢量并由

$$a^0=\sum_{i=1}^{q} e^i \qquad (1\leqslant q\leqslant n) \tag{2.1}$$

给出，且仅当

$$a^i=a^0-e^i \tag{2.2}$$

时，则 E^n 中的 q 维傍系空间具有对称参数方程为：

$$x+\sum_{i=0}^{q}\lambda_i a^i=0, \quad 1+\sum_{i=0}^{q}\lambda_i=0 \tag{2.3}$$

证 若$(e^1,\cdots,e^q)$是L^q 的凸生成基，且 $x\in E^q(a^0, L^q)$，则存在 x 的唯一的线性组合为：

$$x=a^0+\sum_{i=1}^{q}\lambda_i e^i \tag{2.4}$$

因 $e^i=a^0-a^i$，所以知

$$x=a^0\left(1+\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\right)-\sum_{i=1}^{q}\lambda_i a^i$$

如果令 $\qquad 1+\sum_{i=1}^{q}\lambda_i=-\lambda_0$

即知上述线性关系式得证。

另一方面，若 $x, y\in E^q$，则至少存在另一个 y 的线性组合为：

$$y+\sum_{i=0}^{q}\mu_i a^i=0, \quad 1+\sum_{i=0}^{q}\mu_i=0 \tag{2.5}$$

若令$|\lambda|\leqslant 1$，由凸集定义知，

$$\begin{aligned}\lambda x+(1-\lambda)y&=\lambda\left(-\sum\lambda_i a^i\right)+(1-\lambda)\left(-\sum\mu_i a^i\right)\\&=-\sum\lambda\lambda_i a^i-\sum(1-\lambda)\mu_i a^i\\&=\sum\{-\lambda\lambda_i-(1-\lambda)\mu_i\}a^i\end{aligned}$$

而其中

$$\sum\{-\lambda\lambda_i-(1-\lambda)\mu_i\}=-\lambda\sum\lambda_i-(1-\lambda)\sum\mu_i=\lambda+(1-\lambda)=1$$

就知 $\lambda x+(1-\lambda)y\in E^q$。证毕。

定义 5 设 F 为域 F(或 C) 自身上的一维矢量空间。若 V^* 的元素是 V 上的线性型，并记为 $V^*=\mathscr{L}(V, F)$，则称其为 V 的对偶（或共轭）空间。

定义 6 若$(e^1,\cdots,e^n)$是$(a^1,\cdots,a^n)$的对偶基，则采用记号

$$a^i = e_i \tag{2.6}$$

引理 2 给定 V 的一个基$\{a^0;\ a^1,\cdots,a^n\}$，则唯一存在 V^* 的基$\{a^0;\ e^1,\cdots,e^n\}$满足

$$a^i e^j = \delta^j_i = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases} \tag{2.7}$$

证 设亚变量a^0是固定的且V到V^*是满的，则a^0在运算时可略过去。若双矢量$e^i\cdot e^j=g^{ij}$是标量且为半正定型，则$\det|g^{ij}|\geqslant 0$。若 $x=\lambda_i a^i$ 或 $x=\lambda_j e^j$，则知其平方长为 $(x)^2=(\lambda_i a^i)\cdot(\lambda_j e^j)=\lambda_i\lambda_j(a^i e^j)$。由互易矢量变换式

$$e^j = g^{jk}e_k{}^{[6]} \tag{2.8}$$

当且仅当$a^i=e_i$时，有$a^ie^j=g^{jk}a^ie_k=g^{jk}g_{ki}=\delta^j_i$。证毕。

引理3 设X为Banach代数，而x满足$\|x\|<1$，则当$y\in X$时，存在有

$$x+y=xy \tag{2.9}$$

证 因$\|x\|<1$，有$\|x^k\|<\|x\|^k$，则负项级数$-x-x^2\cdots$是绝对收敛的。设y为该级数的和，因Banach代数是完全的，则有$x+y=xy$。证毕。

定理1 设A为$n\times n$的阵，且$\|x\|<1$，$\forall x\in A$，则存在唯一的B满足

$$A+B=AB \tag{2.10}$$

证 不妨取半正定双线型$(g^{ij})=A$，$|g^{ij}|\leqslant 1$及互易双线型$(g_{jk})=B$。若$\forall g_{jk}\in B$，由引理 2 及引理 3 知，$g^{ij}+g_{jk}=g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$。证毕。

本定理的几何解释如图 1 所示。令X，Y及Z为同一域上的矢量空间。若$\mathscr{L}(Y,Z)$是Y到Z的一切映射g的集合，则记号$A(f)=\mathscr{L}(X,Y)$就是对于映射$f:x\to y(\forall x\in X,\forall y\in Y)$的一切映射的集合。如存在$f^{-1}\phi=g\in\mathscr{L}(Y,Z)$，且$\phi$为$X$到$Z$的满射，那么该$\phi=gf$称为变换函数[5]，则显然有$A(f)+B(g)=AB(\phi)$。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\phi"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

图 1

三、主要结果之一

定义7 线性变换$P:W\to W$称为投影，当且仅当

$$P^2=P \tag{3.1}$$

亦即 $$P(P(A))=P(A),\quad \forall A\in W$$

定理2 设$E_3\{a^i,\ a^j,\ a^k|i,\ j,k=1,\ 2,\ 3$循环置换$\}$为群$G$的一切基的集合，而$E^3\{a^0;\ e^i,\ e^j,\ e^k|i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3$循环置换$\}$为子群$G^*\subset G$的一切基的集合。当且仅当

$$e_i=e^j+e^k\qquad(1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3) \tag{3.2}$$

时，称E^3为E_3的对偶。

证 因E^3为G的基，由(2.1)知亚变量为：

$$a^0=e^i+e^j+e^k\qquad(1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3) \tag{3.3}$$

再由(2.2)及(2.6)知

$$a^i=a^0-e^i\quad\text{或}\quad a^i=e^j+e^k\qquad(1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3) \tag{3.4}$$

然而，当且仅当$a^i=e_i$，则$\{e_i,e^j,e^k|\ 1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3\}$是线性相关的[因$e_i=e^j+e^k$]，而$\{e^i,\ e^j,\ e^k|\ 1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3\}$是线性无关的[因$a^0$的任意性，取$a^0=0(e^i+e^j+e^k=0)$]。于是就知$E^3$为$E_3$的对偶基。证毕。

推论1 若E^3及E_3为三维域F上的矢量空间，则E^3及E_3同构的。

证 显然是引理1的推广。

引理4 设W为n维矢量空间，而$S:W\to W$为投影（即使非正投影），那么，存在有W的基$\{A_1, \cdots, A_n\}$满足

$$S(A_i)=\begin{cases}A_i & (1\leqslant i\leqslant r)\\ 0 & (r+1\leqslant i\leqslant n)\end{cases} \tag{3.5}$$

其中$r=\dim(\mathrm{Im}S)$。而阵S对于基$\{A_1, \cdots, A_n\}$为

$$\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

证 设象$\mathrm{Im}S$的基为$\{B_1, \cdots, B_r\}$而核$\mathrm{Ker}\,S$的基为$\{C_1, \cdots, C_s\}$。若$\dim W=\dim(\mathrm{Ker}\,S)+\dim(\mathrm{Im}\,S)$，则有$n=s+r$。因此组合$\{B_1, \cdots, B_r, C_1, \cdots, C_s\}$为$W$的基，严格的说就是下列二式

$$S(C_i)=0 \qquad 对于 i=1, \cdots, s$$

$$S(B_i)=B_i \qquad 对于 i=1, \cdots, r$$

由核的定义知$S(C_i)=0$是显然的，而$S(B_i)=B_i$待证．由于B_i属于$\mathrm{Im}S$，可寻找一个矢量$D_i\in W$满足$S(D_i)=B_i$。因$S(B_i)=S(S(D_i))=S^2(D_i)=B_i$，知$S$为一个投影，所以一般地说$S$为一个斜投影。证毕。

本引理的几何解释如图2所示。假如选择一个平面R^2的基为$\{e^i, e^j\}$，而空间$R^3(R^2\subset R^3)$的基为$\{e^i, e^j, e^k\}$，藉此可引投影线$\mathscr{L}$与投影轴Ox_k平行。该轴包含单位矢量e^k，并通过矢量X的顶点，射线$\mathscr{L}$与平面R^2相交唯一点x^k，而该x^k就确定了包含在R^2中的唯一矢量。

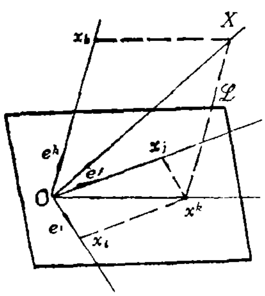

图 2

如将x^k写成为$\{e^j, e^i\}$的线性生成式就是

$$x^k=x_je^j+x_ie^i \tag{3.7}$$

因$\{e^i, e^j, e^k\}$是标准基$\{e_i, e_j, e_k\}=\{1, 1, 1\}$的对偶。

若R^3中的矢量X已经给定，

则其表达式为

$$X=x_ie^i+x_je^j+x_ke^k \tag{3.8}$$

设斜影射线$\mathscr{L}:R^3\to R^3$为线性变换，则知$\mathscr{L}(X)=x_i\mathscr{L}(e^i)+x_j\mathscr{L}(e^j)+x_k\mathscr{L}(e^k)=x_ie^i+x_je^j=x^k$，因为$\{e^i, e^j\}\in R^2$，$e^k\in\mathscr{L}(e^k)$，而$e^k\notin R^2$，见(3.2)，所以$\mathscr{L}^2(X)=\mathscr{L}(\mathscr{L}(X))=x^k$，亦即$\mathscr{L}^2=\mathscr{L}$。

如果考虑循环置换上、下标，则显然$\mathscr{L}$为一个投影群。

四、应　　用

考察在对偶空间$R^{2n}(n=3)$中的某弹性系统，并设矢量X对于基$\{e_i, e_j, e_k\}$的坐标为(x^i, x^j, x^k)，而线性型f对于对偶基$\{e^i, e^j, e^k\}$的坐标为(x_i, x_j, x_k)[6]，则由(3.7)知

$$x_i=x^j+x^k \qquad (1\leqslant i, j, k\leqslant 3) \tag{4.1}$$

因标准基 $\{e_i, e_j, e_k\}=\{1, 1, 1\}$

若在$R^{2n}(n=3)$中选择一个参考坐标架$\widetilde{O}x^1x^2x^3$．藉此确定所考察的两点$O(x^1, x^2, x^3)$及$M(x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^3+dx^3)$的位置，并在其中建立一个三斜的微分平行六面体$OABCD$

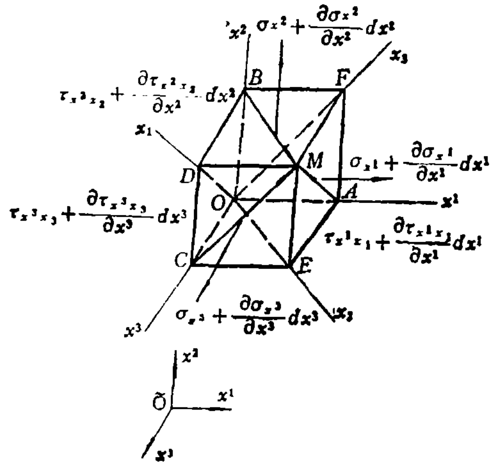

图 3

EFM（见图3）．其棱$OA=dx^1$，$OB=dx^2$，$OC=dx^3$分别平行于Ox^1，Ox^2，Ox^3轴，而线段OD，OE，OF，分别平行其对偶坐标轴Ox_1，Ox_2，Ox_3．其侧面积dA为该面边长的外积，而其体积$d\Delta$为棱长的混合积，那么

$$\left.\begin{array}{l} dA=dx^i\wedge dx^j \\ d\Delta=(dx^i\wedge dx^j)\cdot dx^k \quad (1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3) \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

在弹性系统（或固体）中，外力产生的应力在各点上是不同的，一般地说应力为该点坐标$(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)$的函数，其式为：

$$\left.\begin{array}{l} X^1=F^1(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t) \\ X^2=F^2(\cdot,\ \cdot,\ \cdot,\ \cdot) \\ X^3=F^3(\cdot,\ \cdot,\ \cdot,\ \cdot) \\ X_1=F_1(\cdot,\ \cdot,\ \cdot,\ \cdot)^{*)} \\ X_2=F_2(\cdot,\ \cdot,\ \cdot,\ \cdot)^{*)} \\ X_3=F_3(\cdot,\ \cdot,\ \cdot,\ \cdot)^{*)} \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

既然应力可由在系统中各坐标轴上的投影来确定，因此对一切外力做如下的分析：

（1） 若物体单位质量上的体力可分别分解为平行于Ox^1，Ox^2，Ox^3轴上的三个分量U，V，W，且该体力的因次与加速度相同，则作用在该微分平行六面体上的体力分别为：

$$U\rho d\Delta,\ V\rho d\Delta,\ W\rho d\Delta \tag{4.4}$$

其中ρ为物体在给定点上的密度．

（2） 若给定点$x(t)=(x^1,\ x^2,\ x^3)$的位移速度在Ox^1，Ox^2，Ox^3轴上的投影分别记为

$$\frac{\partial x^1}{\partial t}=\dot{x}^1,\qquad \frac{\partial x^2}{\partial t}=\dot{x}^2,\qquad \frac{\partial x^3}{\partial t}\ \dot{x}^3$$

则惯性力的三个分量分别就是：

$$\rho\ddot{x}^1 d\Delta,\ \rho\ddot{x}^2 d\Delta,\ \rho\ddot{x}^3 d\Delta \qquad \left(\frac{\partial\dot{x}^1}{\partial t}=\ddot{x}^1,\ \frac{\partial\dot{x}^2}{\partial t}=\ddot{x}^2,\ \frac{\partial\dot{x}^3}{\partial t}\ \ddot{x}^3\right) \tag{4.5}$$

（3） 设作用在每一个侧面上（例如第i个侧面上）的总应力为X^i，那么，其三个分量为X^{ii}，X^{ij}，X^{ik}．若记$X^{ii}=\sigma_{x^i}$为张应力，而$X^{ij}=\tau_{x^ix^j}$，$X^{ik}=\tau_{x^ix^k}$为剪应力，就知：

$$X^i=\sigma_{x^i}+\tau_{x^ix_i},\ \ \tau_{x^ix_i}=\tau_{x^ix^j}+\tau_{x^ix^k} \qquad (1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3) \tag{4.6}$$

其中称$\tau_{x^ix_i}$为第i个侧面上的合成剪应力．因此作用在所有表面上的应力分量由$3\times6=18$退变为$2\times6=12$个分量．

若在此微分平行六面体的$OBDC$面上的张应力为$\sigma_{x^1}=F^1(x^1,\ x^2,\ x^3,t)$，而在面$AFEM$上的张应力为$\tilde{\sigma}_{x^1}=F^1(x^1+dx^1,\ x^2,\ x^3,\ t)$，则用 Tayloy's 级数展开，
略去二阶以上导数得

$$\tilde{\sigma}_{x^1}=\sigma_{x^1}+\frac{\partial\sigma_{x^1}}{\partial x^1}dx^1$$

用同样方法可知其它所有各应力．

*) 其中X_1，X_2，X_3有时记为X^4，X^5，X^6（参见文[1]，[7]）．

假如所考察的物体是平衡的，则该微分平行六面体必须满足六个平衡方程如下：

$$\left.\begin{array}{l}\sum X^1=0,\quad \sum X^2=0,\quad \sum X^3=0\\ \sum M_{x^1}=0,\ \sum M_{x^2}=0,\ \sum M_{x^3}=0\end{array}\right\} \tag{4.7}$$

首先考察第一组方程，特别是$\sum X^1=0$。在此必须计及作用在所有边界面上的一切应力在该Ox^1轴上的投影，写为

$$\begin{aligned}&\left[\sigma_{x^1}+\frac{\partial\sigma_{x^1}}{\partial x^1}dx^1-\sigma_{x^1}\right]dx^2dx^3\sin(\widehat{e_2,e_3})\cdot\cos(\widehat{e_1,e_1})+\left[\sigma_{x^2}+\frac{\partial\sigma_{x^2}}{\partial x^2}dx^2-\sigma_{x^2}\right]dx^3dx^1\\&\cdot\sin(\widehat{e_3,e_1})\cdot\cos(\widehat{e_2,e_1})+\left[\sigma_{x^3}+\frac{\partial\sigma_{x^3}}{\partial x^3}dx^3-\sigma_{x^3}\right]dx^1\,dx^2\sin(\widehat{e_1,e_2})\cdot\cos(\widehat{e_3,e_1})\\&+\left[\tau_{x^1x_1}+\frac{\partial\tau_{x^1x_1}}{\partial x^1}\,dx^1-\tau_{x^1x_1}\right]dx^2dx^3\sin(\widehat{e_2,e_3})\cdot\cos(\widehat{e^1,e_1})\\&+\left[\tau_{x^2x_2}+\frac{\partial\tau_{x^2x_2}}{\partial x^2}\,dx^2-\tau_{x^2x_2}\right]dx^3dx^1\sin(\widehat{e_3,e_1})\cdot\cos(\widehat{e^2,e_1})\\&+\left[\tau_{x^3x_3}+\frac{\partial\tau_{x^3x_3}}{\partial x^3}\,dx^3-\tau_{x^3x_3}\right]dx^1dx^2\sin(\widehat{e_1,e_2})\cdot\cos(\widehat{e^3,e_1})\\&+d\Delta[U-\ddot{x}^1]\rho=0\end{aligned} \tag{4.8}$$

整理(4.8)并除以dx^1，dx^2，dx^3可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{x^1}}{\partial x^1}\sin(\widehat{e_2,e_3})\cdot\cos(\widehat{e_1,e_1})+\frac{\partial\sigma_{x^2}}{\partial x^2}\sin(\widehat{e_3,e_1})\cdot\cos(\widehat{e_2,e_1})+\frac{\partial\sigma_{x^3}}{\partial x^3}\sin(\widehat{e_1,e_2})\cos(\widehat{e_3,e_1})\\&+\frac{\partial\tau_{x^1x_1}}{\partial x^1}\sin(\widehat{e_2,e_3})\cdot\cos(\widehat{e^1,e_1})+\frac{\partial\tau_{x^2x_2}}{\partial x^2}\sin(\widehat{e_3,e_1})\cdot\cos(\widehat{e^2,e_1})\\&+\frac{\partial\tau_{x^3x_3}}{\partial x^3}\sin(\widehat{e_1,e_2})\cdot\cos(\widehat{e^3,e_1})=\theta[\ddot{x}^1-U]\rho\end{aligned} \tag{4.9}$$

其中，$\qquad \theta=\dfrac{(dx^i\wedge dx^j)\cdot dx^k}{dx^idx^jdx^k}$

同理，分别写出$\sum X^2=0$ 及$\sum X^3=0$为：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{x^1}}{\partial x^1}\sin(\widehat{e_2,e_3})\cdot\cos(\widehat{e_1,e_2})+\frac{\partial\sigma_{x^2}}{\partial x^2}\sin(\widehat{e_3,e_1})\cdot\cos(\widehat{e_2,e_2})+\frac{\partial\sigma_{x^3}}{\partial x^3}\sin(\widehat{e_1,e_2})\cdot\cos(\widehat{e_3,e_2})\\&+\frac{\partial\tau_{x^1x_1}}{\partial x^1}\sin(\widehat{e_2,e_3})\cdot\cos(\widehat{e^1,e_2})+\frac{\partial\tau_{x^2x_2}}{\partial x^2}\sin(\widehat{e_3,e_1})\cdot\cos(\widehat{e^2,e_2})\\&+\frac{\partial\tau_{x^3x_3}}{\partial x^3}\sin(\widehat{e_1,e_2})\cdot\cos(\widehat{e^3,e_2})=\theta[\ddot{x}^2-V]\rho\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{x_1}}{\partial x^1}\sin(\widehat{e_2,e_3})\cdot\cos(\widehat{e_1,e_3})+\frac{\partial\sigma_{x^2}}{\partial x^2}\sin(\widehat{e_3,e_1})\cdot\cos(\widehat{e_2,e_3})+\frac{\partial\sigma_{x^3}}{\partial x^3}\sin(\widehat{e_1,e_2})\cdot\cos(\widehat{e_3,e_3})\\&+\frac{\partial\tau_{x^1x_1}}{\partial x^1}\sin(\widehat{e_2,e_3})\cdot\cos(\widehat{e^1,e_3})+\frac{\partial\tau_{x^2x_2}}{\partial x^2}\sin(\widehat{e_3,e_1})\cdot\cos(\widehat{e^2,e_3})\\&+\frac{\partial\tau_{x^3x_3}}{\partial x^3}\sin(\widehat{e_1,e_2})\cdot\cos(\widehat{e^3,e_3})=\theta[\ddot{x}^3-W]\rho\end{aligned} \tag{4.11}$$

将(4.9)、(4.10)及(4.11)三式相加，写成紧凑形式为:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\sigma_{x^1}}{\partial x^1}\sin(\widehat{e_2,e_3}) \\ \frac{\partial\sigma_{x^2}}{\partial x^2}\sin(\widehat{e_3,e_1}) \\ \frac{\partial\sigma_{x^3}}{\partial x^3}\sin(\widehat{e_1,e_2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos(\widehat{e_1,e_1}) & \cos(\widehat{e_1,e_2}) & \cos(\widehat{e_1,e_3}) \\ \cos(\widehat{e_2,e_1}) & \cos(\widehat{e_2,e_2}) & \cos(\widehat{e_2,e_3}) \\ \cos(\widehat{e_3,e_1}) & \cos(\widehat{e_3,e_2}) & \cos(\widehat{e_3,e_3}) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \frac{\partial\tau_{x^1x_1}}{\partial x^1}\sin(\widehat{e_2,e_3}) \\ \frac{\partial\tau_{x^2x_2}}{\partial x^2}\sin(\widehat{e_3,e_1}) \\ \frac{\partial\tau_{x^3x_3}}{\partial x^3}\sin(\widehat{e_1,e_2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos(\widehat{e^1,e_1}) & \cos(\widehat{e^1,e_2}) & \cos(\widehat{e^1,e_3}) \\ \cos(\widehat{e^2,e_1}) & \cos(\widehat{e^2,e_2}) & \cos(\widehat{e^2,e_3}) \\ \cos(\widehat{e^3,e_1}) & \cos(\widehat{e^3,e_2}) & \cos(\widehat{e^3,e_3}) \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} \ddot{x}^1-U \\ \ddot{x}^2-V \\ \ddot{x}^3-W \end{bmatrix}\rho \tag{4.12}$$

当 $\ddot{x}^1=\ddot{x}^2=\ddot{x}^3=0$，且忽略在给定点上的体力 U，V，W，则(4.12)变为齐次线性方程组。其结果表示所有张应力及剪应力的线性组合，而该齐次线性系统就是:

$$\left[\frac{\partial_{x^1}}{\partial x^1}\sin(\widehat{e_2,e_3}),\quad \frac{\partial\sigma_{x^2}}{\partial x^2}\sin(\widehat{e_3,e_1}),\quad \frac{\partial\sigma_{x^3}}{\partial x^3}\sin(\widehat{e_1,e_2})\right]A$$

$$+\left[\frac{\partial\tau_{x^1x_1}}{\partial x^1}\sin(\widehat{e_2,e_3}),\quad \frac{\partial\tau_{x^2x_2}}{\partial x^2}\sin(\widehat{e_3,e_1}),\quad \frac{\partial\tau_{x^3x_3}}{\partial x^3}\sin(\widehat{e_1,e_2})\right]B=0 \tag{4.13}$$

其中阵A及B分别为

$$A=\begin{bmatrix} \cos(\widehat{e_1,e_1}) & \cos(\widehat{e_1,e_2}) & \cos(\widehat{e_1,e_3}) \\ \cos(\widehat{e_2,e_1}) & \cos(\widehat{e_2,e_2}) & \cos(\widehat{e_2,e_3}) \\ \cos(\widehat{e_3,e_1}) & \cos(\widehat{e_3,e_2}) & \cos(\widehat{e_3,e_3}) \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} \cos(\widehat{e^1,e_1}) & \cos(\widehat{e^1,e_2}) & \cos(\widehat{e^1,e_3}) \\ \cos(\widehat{e^2,e_1}) & \cos(\widehat{e^2,e_2}) & \cos(\widehat{e^2,e_3}) \\ \cos(\widehat{e^3,e_1}) & \cos(\widehat{e^3,e_2}) & \cos(\widehat{e^3,e_3}) \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

当且仅当

$$\det A=\det B=0 \tag{4.15}$$

该六个应力有非零的解系。

然后考察(4.7)的第二组方程并写出$\sum M_{x^1}=0$为例。现仅描述对Ox^1轴产生转矩的力。为简化运算起见使该轴线通过两侧面$OBDC$及$AFME$的形心和微分平行六面体的体心。对此我们得到对Ox^1轴的转矩一般为:

$$\left(\boldsymbol{\tau}_{x^2x_2}+\frac{\partial\boldsymbol{\tau}_{x^2x_2}}{\partial x^2}d\mathbf{x}^2\right)\cdot(d\mathbf{x}^3\wedge d\mathbf{x}^1)\wedge\frac{d\mathbf{x}^2}{2}+\boldsymbol{\tau}_{x^2x_2}\cdot(d\mathbf{x}^3\wedge d\mathbf{x}^1)\wedge\frac{d\mathbf{x}^2}{2}$$

$$-\left(\boldsymbol{\tau}_{x^3x_3}+\frac{\partial\boldsymbol{\tau}_{x^3x_3}}{\partial x^3}d\mathbf{x}^3\right)\cdot(d\mathbf{x}^1\wedge d\mathbf{x}^2)\wedge\frac{d\mathbf{x}^3}{2}-\boldsymbol{\tau}_{x^3x_3}\cdot(d\mathbf{x}^1\wedge d\mathbf{x}^2)\wedge\frac{d\mathbf{x}^3}{2}=0 \tag{4.16}$$

若注意到标量$\tau_{x^ix_i}$与矢量$\boldsymbol{\tau}_{x^ix_i}(i=1,\ 2,\ 3)$的区别是$\boldsymbol{\tau}_{x^ix_i}=\tau_{x^ix_i}\cdot\mathbf{e}^i$，则混合积$d\mathbf{x}^2\cdot(d\mathbf{x}^3\wedge d\mathbf{x}^1)\wedge d\mathbf{x}^2$将消失。因为$d\mathbf{x}^2\cdot(d\mathbf{x}^3\wedge d\mathbf{x}^1)\wedge d\mathbf{x}^2=(d\mathbf{x}^3\wedge d\mathbf{x}^1)\cdot(d\mathbf{x}^2\wedge d\mathbf{x}^2)=0$，则(4.16)变为:

$$\tau_{x^2x_2}\cdot(d\mathbf{x}^3\wedge d\mathbf{x}^1)\wedge d\mathbf{x}^2=\tau_{x^3x_3}\cdot(d\mathbf{x}^1\wedge d\mathbf{x}^2)\wedge d\mathbf{x}^3 \tag{4.17}$$

假如引进空间曲线坐标(·，·)的法向单位矢量记号为：

$$\mathbf{n}_{jk}=\frac{d\mathbf{x}^j\wedge d\mathbf{x}^k}{|d\mathbf{x}^j\wedge d\mathbf{x}^k|}\text{及}\quad \mathbf{n}_{(jk)i}=\frac{\mathbf{n}_{jk}\wedge d\mathbf{x}^i}{|\mathbf{n}_{jk}\wedge d\mathbf{x}^i|}$$

时，则有

$$\begin{aligned}\tau_{x^ix_i}\cdot(d\mathbf{x}^j\wedge d\mathbf{x}^k)\wedge d\mathbf{x}^i&=dx^jdx^k\cdot\sin(\widehat{e_j,e_k})\cdot\tau_{x^ix_i}\cdot\mathbf{n}_{jk}\wedge d\mathbf{x}^i\\&=dx^idx^jdx^k\cdot\sin(\widehat{e_j,e_k})\cdot\sin(\widehat{n_{jk},e_i})\cdot\tau_{x^ix_i}\cdot\mathbf{n}_{(jk)i}\\&=dx^idx^jdx^k\tau_{x^ix_i}\cdot\sin(\widehat{e_j,e_k})\cdot\sin(\widehat{n_{jk},e_i})\cdot\cos(\widehat{n_{(jk)i},e^i})\end{aligned}$$

就知混合积(4.17)可退变为标量等式：

$$\tau_{x^2x_2}\sin(\widehat{e_3,e_1})\cdot\sin(\widehat{n_{31},e_2})\cdot\cos(\widehat{n_{(31)2},e^2})=\tau_{x^3x_3}\sin(\widehat{e_1,e_2})\cdot\sin(\widehat{n_{12},e_3})\cdot\cos(\widehat{n_{(12)3},e^3}) \tag{4.18}$$

同理，可写出另外两等式：

$$\tau_{x^3x_3}\sin(\widehat{e_1,e_2})\cdot\sin(\widehat{n_{12},e_3})\cdot\cos(\widehat{n_{(12)3},e^3})=\tau_{x^1x_1}\sin(\widehat{e_2,e_3})\cdot\sin(\widehat{n_{23},e_1})\cdot\cos(\widehat{n_{(23)1},e^1}) \tag{4.19}$$

$$\tau_{x^1x_1}\sin(\widehat{e_2,e_3})\cdot\sin(\widehat{n_{23},e_1})\cdot\cos(\widehat{n_{(23)1},e^1})=\tau_{x^2x_2}\sin(\widehat{e_3,e_1})\cdot\sin(\widehat{n_{31},e_2})\cdot\cos(\widehat{n_{(31)2},e^2}) \tag{4.20}$$

由(1.5).考虑到合成剪应力的连比，则可得：

$$\frac{\tau_{x^1x_1}\sin(\widehat{e_2,e_3})}{\dfrac{1}{\sin(\widehat{n_{23},e_1})\cdot\cos(\widehat{n_{(23)1},e^1})}}=\frac{\tau_{x^2x_2}\sin(\widehat{e_3,e_1})}{\dfrac{1}{\sin(\widehat{n_{31},e_2})\cdot\cos(\widehat{n_{(31)2},e^2})}}=\frac{\tau_{x^3x_3}\sin(\widehat{e_1,e_2})}{\dfrac{1}{\sin(\widehat{n_{12},e_3})\cdot\cos(\widehat{n_{(12)3},e^3})}}=K \tag{4.21}$$

或

$$\frac{\tau_{x^1x_1}}{\alpha}=\frac{\tau_{x^2x_2}}{\beta}=\frac{\tau_{x^3x_3}}{\gamma}=K$$

其中：

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{\sin(\widehat{e_2,e_3})\cdot\sin(\widehat{n_{23},e_1})\cdot\cos(\widehat{n_{(23)1},e^1})}\\\beta&=\frac{1}{\sin(\widehat{e_3,e_1})\cdot\sin(\widehat{n_{31},e_2})\cdot\cos(\widehat{n_{(31)2},e^2})}\\\gamma&=\frac{1}{\sin(\widehat{e_1,e_2})\cdot\sin(\widehat{n_{12},e_3})\cdot\cos(\widehat{n_{(12)3},e^3})}\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

此连比就称为上述微分平行六面体的边界条件。

五、主要结果之二

若选择任意三个斜交矢量为三斜坐标轴，而用(3.2)就可确定其对偶坐标轴，再由(4.14)可得两个矩阵A及B。该两阵就是描述对偶空间中三斜结构的代数弹性运动的某些数学性质。

若$A+B=AB$为真实的交换群，则至少存在一个非平凡子群为

$$A+B=AB=0 \tag{5.1}$$

因为任意群G皆可以分解为两个子群 0及I，而该I是以群本身为其平凡子群的，所以矩阵代数等式$A+B=AB$可以写为紧凑的型式就是：

$$\mathfrak{M}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

显然，该$\mathfrak{M}$为6×6的阵。令并矢$e_i\cdot e_j=\cos(\widehat{e_i,e_j})$及$e^j\cdot e_k=\cos(\widehat{e^j,e_k})$是内积，且采用记号$\delta_{ij}=e_i\cdot e_j$及$\delta^j_{\cdot k}=e^j\cdot e_k$[8]。注意到：

（1） $|\delta_{ij}|\begin{cases} =1 & (i=j) \\ >0 & (i\neq j) \end{cases}$

（2） $|\delta^j_{\cdot k}|\leqslant 1$（对于一切$j=k$及$j\neq k$）

阵$\mathfrak{M}$具有十五个待定的元素。其表达式为：

$$\det\begin{bmatrix} 1 & \delta_{21} & \delta_{31} & & & \\ \delta_{12} & 1 & \delta_{32} & & [0] & \\ \delta_{13} & \delta_{23} & 1 & & & \\ & & & \delta^1_{\cdot 1} & \delta^2_{\cdot 1} & \delta^3_{\cdot 1} \\ & [0] & & \delta^1_{\cdot 2} & \delta^2_{\cdot 2} & \delta^3_{\cdot 2} \\ & & & \delta^1_{\cdot 3} & \delta^2_{\cdot 3} & \delta^3_{\cdot 3} \end{bmatrix}=0 \tag{5.3}$$

因此，Cauchy 指出的六个方程，即三个张应变方程及三个剪应变方程[1]，虽然是不充分的，但 Cauchy 在弹性理论中所提出的15个独立的弹性常数的论断是严格正确的。

由此看来，我们最后确信以下两个重要的结果：

定理3 假如三维投影几何的组态满足边界条件(4.21)或(4.22)，则建立Cauchy六方程

$$e_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x^i},\quad e_{jk}=\frac{\partial u_k}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x^k}\qquad (1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3)$$

对于阵$(\partial(u_i,\ u_j,\ u_k)/\partial(x^i,\ x^j,\ x^k))$的九个元素的表达就是完全的。

证 如引进边界条件三个常数，则Cauchy六方程表达阵$(\partial(u_i,\ u_j,\ u_k)/\partial(x^i,x^j,x^k))$的九个未知数显然是充分的。

定理4 设在矢量域中，点x上的三斜结构$A(x)$为仿射几何，而标量域$\{x^i,\ x^j,\ x^k|\ 1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3\}$及$\{x_i,\ x_j,\ x_k|\ 1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3\}$分别为$A$的逆变分量域及协变分量域。

（i） 若$A(x)$的自然基及其互易基分别为$\{e_i,\ e_j,\ e_k|\ 1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3\}$及$\{e^i,\ e^j,\ e^k|\ 1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3\}$，则$A$恒有六个坐标轴，及六个应力函数。

（ii） 若$A(x)$的一切基的双线型是6×6的阵$\mathfrak{M}$，则该$\mathfrak{M}$至少存在十五个待定的元。

（iii） 若给定$A(x)$的边界连比，且$\det\mathfrak{M}=0$（意即$\det A=\det B=0$），则该三斜结构是可求解的。

证明 由(3.2)、(4.3)及(4.14)、(5.3)知(i)及(ii)部分是显然的，而部分(iii)待证。由(4.22)知，假如给定三常数α，β，γ的值，则$A(x)$的边界条件就可确定。再由(1.5)及(5.3)的结果立即可知$\det\mathfrak{M}=0$可解。证毕。

参 考 文 献

[1] Filonenko-Borodich, M., *Theory of Elasticity*, Foreign Languages Publishing House, Moskow, 30—48.

[2] Gruenbery, K. W. and A. J. Weir, *Linear Geometry*, Springer-Verlag、New York-Heidelberg-Berlin (1977), 15—129.

[3] 小西荣一等著, 《线性代数、向量分析》, 辽宁人民出版社 (1981), 119.

[4] 苏步青, 《仿射微分几何学》, 科学出版社 (1982), 19.

[5] 谷安海, 变换函数Φ及KUR空间存在固定点的条件, 应用数学和力学, 7, 3 (1986), 273—277.

[6] 《数学手册》编写组, 《数学手册》, 人民教育出版社 (1980), 449.

[7] 钱伟长、叶开沅, 《弹性力学》, 科学出版社 (1980), 63—64.

[8] Кильчевский И. А., 《张量计算初步及其力学上的应用》, 人民教育出版社 (1959), 27—33.

On the Structure of Continua and the Mathematical Properties of Algebraic Elastodynamic of a Triclinic Structural System

Gu An-hai

(Zhengzhou Aluminum Plant, Zhengzhou)

Abstract

This paper is neither laudatory nor derogatory but it simply contrasts with what might be called elastostatic (or static topology) proposition of the famous six equations. The extension strains and the shearing strains

$$e_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x^i},\qquad e_{jk}=\frac{\partial u_k}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x^k}\qquad (1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3)$$

which were derived by A. L. Cauchy, are linearly expressed in terms of nine partial derivatives of the displacement function $(u_i,\ u_j,\ u_k)=U(x^i,\ x^j,\ x^k)$ and it is impossible for the inverse proposition to set up a system of the above six equations in expressing the nine components of matrix $(\partial(u_i,\ u_j,\ u_k)/\partial(x^i,\ x^j,\ x^k))$. This is due to the fact that our geometrical representations of deformation at a given point are as yet incomplete[1]. On the other hand, in more geometrical language this theorem is not true to any triangle, except orthogonal, for "Squared length" in space[2].

The purpose of this paper is to describe some mathematic laws of algebraic elastodynamics and the relationships between the above-mentioned important questions.