应用数学和力学，第8卷第10期(1987年10月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

奇异摄动的周期边界问题*

林鹏程　　江本铦

(福州大学，1986年10月6日收到)

摘　要

本文讨论高阶导数项含小参数ε的二阶常微分方程的周期边界问题．证明了文[1]差分格式具有$O(h)$一致收敛阶．

一、引　言

近年来，在高阶导数项含小参数ε的二阶常微分方程的第一和第三边值问题的数值解法有了充分的研究．而目前对周期边值问题的研究较少见，这个问题主要困难在于边界层附近边界条件中一阶导数难处理．

A．A．Печенкина在文[1]中构造了一个差分格式，利用古典和非古典的估计方法，证明了格式达$O(h^{\frac{1}{2}})$一致收敛阶．本文利用分离解的奇性项的方法，再结合问题的渐近展开，证明了文[1]格式达$O(h)$一致收敛阶．

二、微分方程的一些性质

讨论如下周期边值问题的奇异摄动：

$$\begin{cases} Lu(x)\equiv\varepsilon u''(x)+a(x)u'(x)-b(x)u(x)=f(x), \quad x\in(0,1) & (2.1)\\ u(0)=u(1) & (2.2)\\ lu\equiv u'(1)-u'(0)=\dfrac{C}{\varepsilon} & (2.3)\end{cases}$$

其中小参数$0<\varepsilon\ll1$，而$a(x)$，$b(x)$，$f(x)$是以1为周期的充分光滑的函数，且满足$A\geqslant a(x)$，$b(x)\geqslant\alpha>2\alpha_0>0$，$x\in[0,1]$，这里$A$，$\alpha$，$\alpha_0$，$C$为给定的常数．

下面讨论方程(2.1)～(2.3)的一些性质．

引理2.1　若条件$Lu\leqslant0$，$u(0)=u(1)$和$lu\geqslant0$成立，则$u(x)\geqslant0$，$x\in[0,1]$．

证　因方程系数在[0,1]上充分光滑，所以解$u(x)\in C^2[0,1]$．

(一) 若$u(0)=u(1)<0$．

由条件$lu=u'(1)-u'(0)\geqslant0$推出：要么$u'(1)\geqslant0$，要么$u'(0)\leqslant0$．

* 林宗池推荐．

1° 如果是$u'(1)\geqslant 0$成立，且$u(x)$在$x=1$小邻域上升，再据$u(0)=u(1)<0$，故$u(x)$必在某点$x_0(x_0\in(0,1))$取到负极小值，这样$Lu(x_0)>0$，与引理条件矛盾。

2° 如果是$u'(0)\leqslant 0$成立，且$u(x)$在$x=0$小邻域下降，再从$u(0)=u(1)<0$知$u(x)$在$(0,1)$中某点$x_1\in(0,1)$取负极小值，这样$Lu(x_1)>0$，与引理条件矛盾。

3° 如果是$u'(0)=0$，$u'(1)=0$，且在$x=0$小邻域内$u(x)$上升，而在$x=1$小邻域内$u(x)$下降。此时由$u(x)\in C^2[0,1]$知$x=0$小邻域内$u''(x)\geqslant 0$，而$u'(x)$充分小，这样在此小邻域内$Lu(x)>0$，与引理条件矛盾。

故在引理条件下，$u(0)=u(1)<0$是不可能的，而只能是：

（二）$u(0)=u(1)\geqslant 0$

此时$u(x)$在$(0,1)$不可能有负值，否则将与$Lu\leqslant 0$矛盾，所以$u(x)\geqslant 0$，$x\in[0,1]$。

引理2.2 如果$|(Ly)^{(i)}|\leqslant B\{1+\varepsilon^{-i-1}\exp[-\alpha x/2\varepsilon]\}$且$y(0)=y(1)$和$|ly|\leqslant|C|/\varepsilon$，则：

$$|y^{(i)}(0)|\leqslant M\varepsilon^{-i}\qquad(i=0,1,2,\cdots)$$

其中B，M是与ε无关的正常数，在不同的不等式中M的值可以不一样，下同。

证 用数学归纳法。

1° 当$i=0$时：

令闸函数 $\Phi(x)=k_0\exp[-\alpha x/2\varepsilon]+k_1x+k_2$

选取：
$$k_0=\max\left\{\frac{2|C|}{\alpha[1-\exp[-\alpha/2\varepsilon]]},\ \frac{4B}{\alpha^2}\right\}$$

$$k_1=\left[1-\exp\left[-\frac{\alpha}{2\varepsilon}\right]\right]k_0,\ k_2=\frac{Ak_1+B}{\alpha}$$

则有：

$$L[\Phi(x)\pm y(x)]\leqslant 0,\ \Phi(0)\pm y(0)=\Phi(1)\pm y(1),\ l(\Phi\pm y)\geqslant 0$$

利用引理2.1推出

$$|y(x)|\leqslant M,\qquad x\in[0,1]\tag{2.4}$$

当$i=1$时，方程(2.1)可整理成：

$$\varepsilon y''(x)+a(x)y'(x)=h(x)\tag{2.5}$$

其中
$$|h(x)|\leqslant M\left\{1+\varepsilon^{-1}\exp\left[-\frac{\alpha x}{2\varepsilon}\right]\right\}$$

求解(2.5)得：

$$y(x)=\int_0^x z_1(t)dt+C_1+C_2\int_0^x\exp[-F(t)]dt,\qquad x\in(0,1)\tag{2.6}$$

这里
$$F(x)=\int_0^x a(t)\varepsilon^{-1}dt$$

$$z_1(x)=\int_0^x h(t)\varepsilon^{-1}\exp[F(t)-F(x)]dt,\qquad x\in(0,1)$$

常数C_1,C_2由边值条件确定。

易见
$$\int_0^x|z_1(t)|dt\leqslant M$$

和
$$\int_0^1\exp[-F(x)]dx\geqslant M\varepsilon$$

由(2.6)，

$$y(1)=\int_0^1 z_1(t)dt+C_1+C_2\int_0^1\exp[-F(t)]dt \tag{2.7}$$

$$y(0)=C_1 \text{ 和 } y'(0)=C_2$$

所以从(2.4)和(2.7)推出：

$$|y'(0)|=|C_2|\leqslant M\varepsilon^{-1}$$

2° 设当$i\leqslant m$时，引理结论成立，即

$$|y^{(j)}(0)|\leqslant M\varepsilon^{-j} \qquad (j=0,1,2,\cdots,m;m\geqslant 2)$$

对方程(2.1)两边求$m-1$次导数：

$$\varepsilon y^{(m+1)}(x)=h_m(x), \qquad x\in(0,1)$$

其中
$$h_m(x)=\sum_{j=0}^{m}C_j(x)y^{(j)}(x)$$

$C_j(x)(j=0,1,2,\cdots,m)$ 为光滑函数。由归纳法假设$|h_m(0)|\leqslant M\varepsilon^{-m}$，再由方程解的可微性：
$$|y^{(m+1)}(0)|=\lim_{x\to 0}|y^{(m+1)}(x)|=\lim_{x\to 0}|\varepsilon^{-1}h_m(x)|\leqslant M\varepsilon^{-m-1}$$

引理2.2得证。

引理2.3 在引理2.2条件下，有：

$$|y^{(i)}(x)|\leqslant M\{1+\varepsilon^{-i}\exp[-\alpha_0\varepsilon^{-1}x]\} \qquad (i=0,1,2,\cdots)$$

证 与引理2.2类似，容易由数学归纳法得到证明。

下面为了误差估计方便，把方程(2.1)～(2.3)的解的奇异项分离出来。

引理2.4 方程(2.1)～(2.3)的解$u(x)$满足：

$$u(x)=rv(x)+z(t) \tag{2.8}$$

其中
$$|r|\leqslant M,\ v(x)=\exp\left[-a(0)\frac{x}{\varepsilon}\right]$$

及
$$|z^{(i+1)}(x)|\leqslant M\left\{1+\varepsilon^{-i}\exp\left[-\frac{\alpha_0 x}{\varepsilon}\right]\right\} \qquad (i=0,1,2,\cdots)$$

证 令 $r=-\varepsilon u'(0)/a(0)$和$z(x)=u(x)-rv(x)$

从引理2.2和引理2.3知：

$$\begin{cases} L(z'(x))=g(x) & (2.9)\\ z'(0)=0,\ |z'(1)|\leqslant M & (2.10)\end{cases}$$

而
$$|g^{(i)}(x)|\leqslant M\left\{1+\varepsilon^{-i-1}\exp\left[-\frac{\alpha_0 x}{\varepsilon}\right]\right\} \qquad (i=0,1,2,\cdots)$$

对(2.9)，(2.10)利用Kellogg[4]结论，推出：

$$|z^{(i+1)}(x)|\leqslant M\left\{1+\varepsilon^{-i}\exp\left[-\frac{\alpha_0 x}{\varepsilon}\right]\right\} \qquad (i=0,1,2,\cdots)$$

三、差分格式及其性质

对(2.1)～(2.3)，为了构造一致收敛的差分格式，必须对边界条件进行特殊处理。构造如下差分格式：

$$\begin{cases} L^h y_j \equiv \varepsilon\sigma_j D_+ D_- y_j + a(x_j) D_0 y_j - b(x_j) y_j = f_j \qquad (j=1,2,\cdots,N-1) & (3.1) \\ y_0 = y_N & (3.2) \\ l^h h_j \equiv \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} - \bar{A} \cdot \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \dfrac{C}{\varepsilon} & (3.3) \end{cases}$$

其中： $x_j = j\cdot h,\ h=1/N,\ j=0,1,2,\cdots,N$

$$D_0 y_j = \frac{1}{2h}(y_{j+1} - y_{j-1}),\ D_+ D_- y_j = \frac{1}{h^2}(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1})$$

$$\rho = \frac{h}{\varepsilon},\ \sigma_j = \frac{a_j \rho}{2}\coth\left(\frac{a_j \rho}{2}\right)$$

以上为方便起见，记$a(x_j)=a_j$，$b(x_j)=b_j$等等。

(3.3)中$\bar{A}$的选择应使边界层函数$(C/a_0)\exp[-a_0 x/\varepsilon]$满足(3.3)的主要项，所以取：

$$\bar{A} = \frac{a_0 \rho}{1 - \exp[-a_0 \rho]} \tag{3.4}$$

引理3.1 若$L^h y_i \leqslant 0$，$y_0 = y_N$，$l^h y_i \geqslant 0$，则：$y_i \geqslant 0$ $(i=0,1,2,\cdots,N)$

证 因为：

$$L^h y_i \equiv \left(\frac{\varepsilon\sigma_i}{h^2} + \frac{a_i}{2h}\right) y_{i+1} - \left(\frac{2\varepsilon\sigma_i}{h^2} + b_i\right) y_i + \left(\frac{\varepsilon\sigma_i}{h^2} - \frac{a_i}{2h}\right) y_{i-1}$$

其系数满足：

$$\frac{\varepsilon\sigma_i}{h^2} + \frac{a_i}{2h} > 0,\quad \frac{\varepsilon\sigma_i}{h^2} - \frac{a_i}{2h} \geqslant 0,\quad \frac{2\varepsilon\sigma_i}{h^2} + b_i > \left(\frac{\varepsilon\sigma_i}{h^2} + \frac{a_i}{2h}\right) + \left(\frac{\varepsilon\sigma_i}{h^2} - \frac{a_i}{2h}\right)$$

再由条件$y_0 = y_N$，$l^h y_i \geqslant 0$易证引理结论。

引理3.2 设 $|L^h y_i| \leqslant B\left\{1 + \dfrac{1}{\max(h,\varepsilon)}\exp\left[-\dfrac{\alpha_0 x_i}{\varepsilon}\right]\right\}$

且 $y_0 = y_N$，$|l^h y_i| \leqslant |C|/\varepsilon$，则当$0 < h \leqslant h_0$时，有：

$$|y_i| \leqslant M\{B + |C|\} \qquad (i=0,1,2,\cdots,N)$$

其中h_0为小正常数。

证 在下面讨论中经常利用以下几个不等式：

$$M_1 t \leqslant \mathrm{sh}(t) \leqslant M_2 t,\qquad t\in[0,M] \tag{3.5}$$

$$M_1 \exp[t] \leqslant \mathrm{sh}(t) \leqslant M_2 \exp[t],\qquad t\in[M,+\infty) \tag{3.6}$$

$$|t\cdot\coth(t) - 1| \leqslant \frac{Mt^2}{1+t},\qquad t\in[0,+\infty) \tag{3.7}$$

而

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{sh}(t) = t + s \\ &|s| \leqslant M|t|^3(1+t^2)^{-1}\exp[|t|] \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

$$1 \leqslant \bar{A} \leqslant 1 + M\rho \tag{3.9}$$

令闸函数 $\Phi_i = k_0 \exp[-\alpha_0 x_i/\varepsilon] + k_1 x_i + k_2$

取 $k_0 = \max\left\{\dfrac{|C|}{M},\ \dfrac{B}{M}\right\}$，$k_1 = [1 - \exp[-\alpha_0/\varepsilon]]k_0$，$k_2 = \dfrac{B + Ak_1}{a}$

当$0 < h \leqslant h_0$时，有：

$L^h(\Phi_i \pm y_i) \leqslant 0$，$\Phi_0 \pm y_0 = \Phi_N \pm y_N$，$l^h(\Phi_i \pm y_i) \geqslant 0$

利用引理3.1推出：

$$|y_i|\leqslant|\Phi_i|\leqslant M\{B+|C|\}\qquad(i=0,1,2,\cdots,N)\tag{3.10}$$

四、误 差 估 计

4.1 在这段假定$h\leqslant\varepsilon$。

设v_i,z_i分别是$v(x_i),z(x_i)$的数值解，其中$v(x)$，$z(x)$由（2.8）确定。因此差分格式（3.1）～（3.3）的解y_i可表示为：$y_i=rv_i+z_i$，$i=0,1,2,\cdots,N$，且

$$\begin{cases}L^h(rv_i+z_i)\equiv L^h[rv(x_i)+z(x_i)]=f_i & (4.1)\\ (rv_N+z_N)-(rv_0+z_0)=[rv(x_N)+z(x_N)]-[rv(x_0)+z(x_0)] & (4.2)\\ l^h(rv_i+z_i)\equiv l\ [rv(x_i)+z(x_i)]=\dfrac{C}{\varepsilon} & (4.3)\end{cases}$$

利用引理3.1估计$|y_i-y(x_i)|$，这里y_i为(4.1)～(4.3)的解，而$y(x)$为（2.1)～(2.3)的解。

从定义：

$$y_0-y(x_0)=y_N-y(x_N)\tag{4.4}$$

$$l^h[y_i-y(x_i)]=l^h[rv_i+z_i-rv(x_i)-z(x_i)]$$

$$=\frac{C}{\varepsilon}-l^h[rv(x_i)+z(x_i)]$$

$v(x)=\exp[-a_0x/\varepsilon]$代入上式、并利用中值定理和Taylor展开：

$$\frac{z(x_1)-z(x_0)}{h}=z'(\theta_1)$$

和

$$\frac{z(x_1)-z(x_0)}{h}=z'(x_0)+hz''(\theta_2),\qquad x_0\leqslant\theta_1,\theta_2\leqslant x_1$$

由引理2.4：

$$|z'(x)|\leqslant M,\ |z''(x)|\leqslant\frac{M}{\varepsilon}$$

故：$l^h[y_i-y(x_i)]=\dfrac{C}{\varepsilon}-\left[rv'(x_N)+r\cdot\dfrac{a_0}{\varepsilon}+z'(x_N)-z'(x_0)+O\left(\dfrac{h}{\varepsilon}\right)\right]$

$$=\frac{C}{\varepsilon}-\left[\frac{C}{\varepsilon}+O\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)\right]=O\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)\tag{4.5}$$

令　$\tau_i=L^h[y_i-y(x_i)]\triangleq r\tau_i^{(1)}+\tau_i^{(2)}$

而　$\tau_i^{(1)}=(L-L^h)v(x_i)$，$\tau_i^{(2)}=(L-L^h)z(x_i)$

（i）$\tau_i^{(1)}$的估计。

因　$v(x)=\exp[-a_0x_i/\varepsilon]$

$$(L-L^h)v(x_i)=\frac{2a_i\mathrm{sh}(a_0\rho/2)\mathrm{sh}[(a_i-a_0)\rho/2]+(a_0-a_i)\rho\,\mathrm{sh}(a_i\rho/2)}{h\,\mathrm{sh}(a_i\rho/2)}v(x_i)\tag{4.6}$$

由(3.8)式：

$$\mathrm{sh}\left(\frac{a_0}{2}\rho\right)=\frac{a_0}{2}\rho+s_1,\ |s_1|\leqslant\frac{Mh^3\exp[a_0\rho/2]}{\varepsilon(h^2+\varepsilon^2)}$$

$$\mathrm{sh}\left(\frac{a_i-a_0}{2}\rho\right)=\frac{a_i-a_0}{2}\rho+s_2,\ |s_2|\leqslant\frac{Mh^3x_i}{\varepsilon(h+\varepsilon)^2}\exp[Mx_i\rho]$$

$$\mathrm{sh}\left(\frac{a_i}{2}\rho\right)=\frac{a_i}{2}\rho+s_3,\ |s_3|\leqslant\frac{Mh^3}{\varepsilon(h^2+\varepsilon^2)}\exp\left[\frac{a_i}{2}\rho\right]$$

代入(4.6),

$$|\tau_i^{(1)}|=|(L-L^h)v(x_i)|\leqslant\frac{Mh^2x_i}{\varepsilon^2(h+\varepsilon)}\exp[Mx_i\rho]\cdot v(x_i)$$

取充分小h_1，当$0<h\leqslant h_1$时，有：

$$-a_0+\alpha_0+Mh\leqslant-\bar{b}_0$$

$\bar{b}_0$为大于零的常数。

$$|\tau_i^{(1)}|\leqslant\frac{Mh^2x_i}{\varepsilon^2(h+\varepsilon)}\exp[-\bar{b}_0x_i/\varepsilon]\exp[-\alpha_0x_i/\varepsilon]$$

$$\leqslant\frac{Mh^2}{\varepsilon(h+\varepsilon)}\exp[-\alpha_0x_i/\varepsilon]\qquad(i=1,2,\cdots,N-1)\tag{4.7}$$

（ii）$\tau_i^{(2)}$的估计。

由Kellogg[4]引理3.3,

$$|\tau_i^{(2)}|=|Lz(x_i)-L^hz(x_i)|\leqslant M\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\{\varepsilon|z^{(3)}(t)|+|z''(t)|\}dt\tag{4.8}$$

把$z^{(i)}(x)$的估计代入(4.8),

$$|\tau_i^{(2)}|\leqslant M\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left\{\varepsilon+\varepsilon^{-1}\exp\left[-\frac{\alpha_0t}{\varepsilon}\right]+1\right\}dt$$

$$\leqslant M\{h+h\varepsilon+\mathrm{sh}(\alpha_0\rho)\exp[-\alpha_0x_i/\varepsilon]\}$$

因假定$\rho=h/\varepsilon\leqslant1$，故由(3.5),

$$|\tau_i^{(2)}|\leqslant Mh\{1+\varepsilon^{-1}\exp[-\alpha_0x_i/\varepsilon]\}$$

这样

$$|\tau_i|\leqslant|r|\cdot|\tau_i^{(1)}|+|\tau_i^{(2)}|\leqslant Mh\{1+\varepsilon^{-1}\exp[-\alpha_0x_i/\varepsilon]\}\tag{4.9}$$

对(4.4)，(4.5)，(4.9)利用引理3.2，得如下定理。

定理4.1　设y_i是(3.1)～(3.3)的解，$y(x)$是(2.1)～(2.3)的解。若$h\leqslant\varepsilon$且$h\leqslant\bar{h}_0=\min(h_0,h_1)$成立，则

$$|y_i-y(x_i)|\leqslant Mh\qquad(i=0,1,2,\cdots,N)\tag{4.10}$$

4.2 这段假设$h\geqslant\varepsilon$。易证如下引理。

引理4.2　$y(x)$为(2.1)～(2.3)的解，则：

$$y(x)=\psi_0(x)+v_0(x)+W(x)$$

其中：

$$W(x)=O(\varepsilon),\ v_0(x)=\frac{C}{a_0}\exp[-a_0x/\varepsilon]$$

而$\psi_0(x)$满足：

$$\begin{cases}a(x)\psi_0'(x)-b(x)\psi_0(x)=f(x) & (4.11)\\ \psi_0(1)-\psi_0(0)=v_0(0)-v_0(1) & (4.12)\end{cases}$$

且当$a(x)$，$b(x)$充分光滑时，函数$\psi_0(x)$亦是充分光滑的。

令 $$W_i=y_i-\psi_0(x_i)-v_0(x_i)$$

y_i为差分格式的解。

引理4.3 若$h\geqslant\varepsilon$且$h\leqslant\bar{h}_1$，则

$$|W_i|\leqslant M(h+\varepsilon)\qquad(i=0,1,2,\cdots,N)\tag{4.13}$$

其中$\bar{h}_1$为给定充分小的正数。

证 $$W_N-W_0=0\tag{4.14}$$

$$|l^hW_i|=|l^hy_i-l^h\psi_0(x_i)-l^hv_0(x_i)|\leqslant M(1+\rho)\tag{4.15}$$

而 $$|L^hW_i|=|L^hy_i-L^h\psi_0(x_i)-L^hv_0(x_i)|$$

$$\leqslant M(h+\varepsilon)+M\frac{\mathrm{sh}(a_0\rho/2)\mathrm{sh}[(a_i-a_0)\rho/2]}{h\mathrm{sh}(a_i\rho/2)}\exp[-a_0x_i/\varepsilon]$$

易见，取充分小$\bar{h}_1$，当$0<h\leqslant\bar{h}_1$时，

$$\left|\mathrm{sh}\left(\frac{a_i-a_0}{2}\rho\right)\exp\left[-\frac{a_0}{4\varepsilon}x_i\right]\right|\leqslant Mh$$

和 $$\left|\frac{\mathrm{sh}(a_0\rho/2)}{\mathrm{sh}(a_i\rho/2)}\exp\left[-\frac{a_0}{2\varepsilon}x_i\right]\right|\leqslant M$$

故 $$|L^hW_i|\leqslant M(h+\varepsilon)\left\{1+\frac{1}{h}\exp\left[-\frac{a_0}{4\varepsilon}x_i\right]\right\}\tag{4.16}$$

最后把引理3.2应用于(4.14)～(4.16)，当$h\leqslant\bar{h}_1$时，有$|W_i|\leqslant M(h+\varepsilon)$ $(i=0,1,2,\cdots,N)$ 由引理4.2和(4.13)，

$$|y_i-y(x_i)|=|W_i-W(x_i)|\leqslant M(h+\varepsilon)\tag{4.17}$$

结合定理4.1和(4.17)，令$\bar{h}\doteq\min(\bar{h}_0,\bar{h}_1)$，得如下关于$\varepsilon$一致收敛的定理。

定理4.4 设y_i是差分格式(3.1)～(3.3)的解，而$y(x)$是(2.1)～(2.3)的解。当$h\leqslant\bar{h}$时，有

$$|y_i-y(x_i)|\leqslant Mh\qquad(i=0,1,2,\cdots,N)\tag{4.18}$$

注 定理4.4中条件$h\leqslant\bar{h}$可去掉。

事实上，对给定的$\bar{h}>0$，当$h\geqslant\bar{h}$时，由引理2.2和引理3.2，有：

$$|y_i|\leqslant M,\ |y(x_i)|\leqslant M$$

故 $$|y_i-y(x_i)|\leqslant M\leqslant M_1\bar{h}\leqslant M_1h\qquad(i=0,1,2,\cdots,N)$$

这里M,M_1是与h，ε无关的常数。

最后数值例子可见文[1]。

参考文献

[1] Печенкина А. А., Решение периодической задачи для обыяновенного дифференциалвного уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной, *Дифференциальные Уравнения с Малый Параметром*, Свердловок (1980), 111—118.

[2] Емельянов К. В., О разностной методе решения третвей краевой задачи для дифференциальная уравнения с малый параметрой при старшей производной, *Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физики*, 15,6 (1975), 1455—1463.

[3] Il'in, A. M., Difference schemes for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative, *Mat. Zametki*, 6 (1969), 237—248.

[4] Kellogg, R. B. and A. Tsan, Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points, *Math. Comp.*, 32 (1978), 1025—1039.

A Singular Perturbation Problem for Periodic Boundary Differential Equation

Lin Peng-cheng Jiang Ben-xian

(*Fuzhou University, Fujian*)

Abstract

In this paper, we consider a second order ordinary differential equation with a small, positive parameter ε in its highest derivative for periodic boundary value problem and prove that the solution of difference scheme in paper [1] uniformly converge to the solution of its original problem with order one.