应用数学和力学，第 8 卷第11期（1987年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

讨 论 栏

关于“用调和函数表示弹性理论方程组的一般解”的讨论*

周　青　王敏中（北京大学）

本文指出文献[1]给出的“线弹性理论方程组的一般解”只有在三向凸的弹性区域内才成立.

如果不考虑体力，按位移表示的线性弹性理论方程组可写成下面的形式：

$$\frac{E}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial e}{\partial x}+E\Delta u=0,\quad \frac{E}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial e}{\partial y}+E\Delta v=0,\quad \frac{E}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial e}{\partial z}+E\Delta w=0 \tag{1}$$

其中E是弹性模量，ν是泊松比，u，v，w 分别是平行于坐标轴x，y，z 的位移分量，体积膨胀

$$e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

调和算子 $$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

对于方程组(1)，文献[1]中给出了(1)的一个一般解如下：

$$\left.\begin{aligned}
u&=\frac{3}{2E}P-\frac{x}{2E}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{1+\nu}{E}\phi\\
v&=\frac{3}{2E}Q-\frac{y}{2E}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{1+\nu}{E}A\\
w&=\frac{1+\nu}{E}(\psi+B)-\frac{1+2\nu}{E}R+\frac{1}{2E}\left(x\frac{\partial R}{\partial x}+y\frac{\partial R}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中P，Q，R，ϕ，ψ，A，B是调和函数，它们满足：

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z},\quad \frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial z},\quad \frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial z} \tag{3}$$

但是，[1]中关于这个“一般解”的完备性证明出现了疏忽.

对于任一满足(1)的解u，v，w，[1]证明e，$\frac{1}{1-2\nu}\left(e-\frac{x}{2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{1}{1-2\nu}\Big(e-$

* 钱伟长推荐.

$\left.\frac{y}{2}\frac{\partial e}{\partial y}\right)-\frac{\partial v}{\partial y}$ 是调和函数，并且令

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{E}{1-2\nu}e\\&\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial z}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(e-\frac{x}{2}\frac{\partial e}{\partial x}\right)-\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial u}{\partial x}\\&\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial z}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(e-\frac{y}{2}\frac{\partial e}{\partial y}\right)-\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

再令P，Q，R，ϕ，ψ，A，B为调和函数，就得出由(4)式确定的 u，v，w 能写成(2)的形式的结论。

但是，由(4)式确定调和函数 P，Q，R，ϕ，ψ，A，B一般说来是不可能的，除非弹性区域是x-向，y-向，z-向凸的区域才可能，这个问题早在1956年已由Eubanks和 Sternberg[2]解决。而且，对于不凸的区域，他们也举出了反例，可使由(4)式定义的P，Q，R，ϕ，ψ，A，B等函数不存在。因此，文献[1]的解只能用于三向凸的区域，例如球体、立方体等，而不能用于象壳体、工字型截面梁等工程中常见的结构。

众所周知，Папкович和 Neuber 在1932年和1934年对方程(1)给出如下形式的通解[3]：

$$\left.\begin{aligned}u&=H_1-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}(H_0+xH_1+yH_2+zH_3)\\v&=H_2-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}(H_0+xH_1+yH_2+zH_3)\\w&=H_3-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}(H_0+xH_1+yH_2+zH_3)\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

其中H_0，H_1，H_2，H_3为调和函数。解(5)的完备性已在1936年为Mindlin 证得[4]。不难看出，如果令：

$$H_1=\frac{2P}{E}+\frac{1}{2E}\frac{\partial}{\partial x}(zR-xP)-\frac{1+\nu}{E}\phi$$

$$H_2=\frac{2Q}{E}+\frac{1}{2E}\frac{\partial}{\partial y}(zR-yQ)-\frac{1+\nu}{E}A$$

$$H_3=-\frac{1+4\nu}{2E}R+\frac{1}{2E}\left(x\frac{\partial R}{\partial x}+y\frac{\partial R}{\partial y}+z\frac{\partial R}{\partial z}\right)+\frac{1+\nu}{E}\psi+\frac{1+\nu}{E}B$$

$$\begin{aligned}H_0=&-\frac{z}{E}\left(x\frac{\partial R}{\partial x}+y\frac{\partial R}{\partial y}+z\frac{\partial R}{\partial z}\right)+\frac{1}{2E}(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial R}{\partial z}\\&-\frac{1}{2E}zR+\frac{3}{E}\left(zR-\frac{1}{2}xP-\frac{1}{2}yQ\right)+\frac{1+\nu}{E}(x\phi-z\psi+yA-zB)\end{aligned}$$

则从(5)式可得到(2)式。可见文献[1]给出的解(2)式只是 Папкович-Neuber 通解的特殊形式，是在三向凸的区域中才能成立的解。

参 考 文 献

[1] 聂义勇，用调函数表示弹性理论方程组的一般解，应用数学和力学，7，2 (1986)，155—160.

[2] Eubanks, R. A. and E. Sternberg, On the completeness of the Boussinesq-Papkovich stress functions, *Rat. Mech. and Analysis*, 5 (1956), 735—746.

[3] Timoshenko, S. and J. N. Coodier, *Theory of Elasticity* (sec. ed.), McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (1951), 235.

[4] Mindlin, R. D., Note on the Galerkin and Papkovich stress functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42 (1946), 373—376.

聂义勇（中国科学院沈阳计算技术研究所）

本答复讨论了文[5]给出的一般解的完备性，并针对文[7]的断言作了答复。

文[5]对不考虑体积力的线性弹性理论方程组获得一般解

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{3}{2E}P-\frac{x}{2E}\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{1+\nu}{E}\phi \\ v&=\frac{3}{2E}Q-\frac{y}{2E}\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{1+\nu}{E}A \\ w&=\frac{1+\nu}{E}(\psi+B)-\frac{1+2\nu}{E}R+\frac{1}{2E}\left(x\frac{\partial R}{\partial x}+y\frac{\partial R}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\tag{1$'$}$$

其中 P，Q，R，ϕ，ψ，A，B是调和函数，它们满足

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{E}{1-2\nu}e=\frac{E}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial z}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(e-\frac{x}{2}\frac{\partial e}{\partial x}\right)-\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial u}{\partial x} \\ &\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial z}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(e-\frac{y}{2}\frac{\partial e}{\partial y}\right)-\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{2$'$}$$

在证明中未对(2)$'$的求解作讨论，确系作者疏忽。文[7]对此提出怀疑是应该的。

文[7]引用文[3]断言：除非三个坐标方向均凸的弹性区域，(2)$'$不可能确定调和函数P，Q，R，ϕ，ψ，A，B。可是，这个断言未经文[7]证实。

首先，如文[2]，[4]所指出，文[3]的主要结果是给出两个充分条件：(a)如果区域是x(或y，z)坐标方向凸的，则Boussinesq-Papkovich一般解

$$\left.\begin{aligned} u&=H_1-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}(H_0+xH_1+yH_2+zH_3) \\ v&=H_2-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}(H_0+xH_1+yH_2+zH_3) \\ w&=H_3-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}(H_0+xH_1+yH_2+zH_3)\end{aligned}\right\}\tag{3$'$}$$

中可令H_1(或H_2，H_3)等于零而不失其完备性(不管ν为何值)；(b)如果区域对原点成星形且4ν不是整数，则(3)$'$中可令$H_0=0$而不失其完备性。

由文[3]关于充分条件(a)的证明容易看出，区域的三个坐标方向均凸是(2)$'$有解的一个

充分条件，因而也是(1)′完备的一个充分条件．文[3]没有涉及到(2)′有解的必要条件．

其次，文[3]用反例证明：当4ν为整数时，缺损H_0的Boussinesq-Papkovich解

$$\left.\begin{aligned} u&=H_1-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}(kH_1+yH_2+zH_3)\\ v&=H_2-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}(xH_1+yH_2+zH_3)\\ w&=H_3-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}(xH_1+yH_2+zH_3)\end{aligned}\right\} \tag{4$'$}$$

是不完备的，但这个事实并不表明线性弹性理论方程组的一般解不能用三个独立的调和函数表示．例如，文[4]和[6]证明，将(4)′加以修改，或在(3)′中添加某个关于H_0，H_1，H_2，H_3的限制，就可以用三个调和函数完备地表示一般解．文[3]提供的反例，没有被证明是(2)′无解的反例，因此文[7]未证实其断言．

文[1]的讨论中曾说过：(2)′一般仅对三坐标方向均凸的区域有解。但文[1]未曾指出“一般情况”的含意并证明其结论．

综合上述，对文[5]给出的一般解(1)′应作如下注解：

注1 解(1)′对三坐标方向均凸的区域是完备的．它对非凸区域的完备性有赖于(2)′的可解性．这是一个值得研究的问题．

注2 从应用观点看，凸域及凸域的组合是求解调和函数边值问题的通常情况．因此，有关解(1)′完备性结论不明确的部分并未构成严重限制．与其它通解比较，人们或许对应用解(1)′的可能性更感兴趣．

参考文献

[1] Benthem, J. P., Note on the Boussinesq-Papkovich stress-functions, *J. Elas.*, 9 (1979), 201—206.

[2] Cong, T. T. and G. P. Steven, On the representation of elastic displacement fields in terms of three harmonic functions, *J. Elas.*, 9 (1979), 325—333.

[3] Eubanks, R. A. and E. Sternberg, On the completeness of the Boussinesq-Papkovich stress functions, *J. Rat. Mech. Anal.*, 5 (1956), 735—746.

[4] Naghdi, P. M. and C. S. Hsu, On a representation of displacements in linear elasticity in terms of three stress functions, *J. Math. Mech.*, 10 (1961), 233—245.

[5] 聂义勇，用调和函数表示弹性理论方程组的一般解，应用数学和力学，7，2 (1986)，155—160.

[6] Stippes, M., Completeness of the Papkovich Potentials, *Quart. App. Math.*, 26 (1969), 477—483.

[7] 周青、王敏中，关于“用调和函数表示弹性理论方程组的一般解”的讨论，应用数学和力学，8，11 (1987)，1035—1037.

A Discussion on “Representing General Solution of Equations in Theory of Elasticity by Harmonic Functions”

Zhou Qing Wang Min-zhong

(*Peking University, Beijing*)

Nie Yi-yong

(*Shenyang Institute of Computing Technology, Academia Sinica, Shenyang*)