应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于平面应变和反平面应变复合型裂纹尖端的理想塑性应力场*

袁镒吾

（中南工业大学，1986年1月9日收到）

摘　要

文献[1]在裂纹尖端的理想塑性应力分量都只是θ的函数的条件下，利用平衡方程、应力应变率关系、相容方程和屈服条件导出了平面应变和反平面应变复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式．但文献[1]对应力应变率关系式中的比例因子$\lambda(r,\ \theta)$作了很多限制，即假定λ与θ无关，并假定$\lambda=c$或cr^{-1}．本文取消了对λ的这些限制．而文献[1]所研究的$\lambda=cr^{n}$($n=0$或-1)的情形，只是本文的一个特殊情况．

一、前　言

文献[1]在裂纹尖端的理想塑性应力分量都只是θ的函数的条件下，利用平衡方程、应力应变率关系、相容方程和屈服条件，导出了平面应变和反平面应变复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式．在此基础上可以得到Ⅰ型、Ⅱ型、Ⅲ型、Ⅰ-Ⅱ、Ⅰ-Ⅲ、Ⅱ-Ⅲ及Ⅰ-Ⅱ-Ⅲ复合型的裂纹的尖端的理想塑性应力场．这种方法十分简便．但是，该文对应力应变率关系中的比例因子$\lambda(r,\theta)$作了很多限制．我们认为没有这种必要．取消这些限制，仍然可以得到平面应变和反平面应变复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式．

二、基本方程

在裂纹尖端的理想塑性应力分量都只是θ的函数的条件下，理想塑性平面应变和反平面应变复合型裂纹问题在极坐标(r,θ)中的基本方程为[1]

1．平衡方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta}+2\sigma_{-}=0,\qquad \frac{d\sigma_{\theta}}{d\theta}+2\tau_{r\theta}=0\\&\frac{d\tau_{\theta z}}{d\theta}+\tau_{rz}=0,\qquad \sigma_{-}=\frac{\sigma_{r}-\sigma_{\theta}}{2}\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

* 钱伟长推荐．

式中 σ_r, σ_θ 为正应力分量；$\tau_{r\theta}$、τ_{rz} 和 $\tau_{\theta z}$ 为剪应力分量。

2. 应变率速度关系

以 u, v 和 w 表示的 r 方向，θ 方向及 z 方向的速度分量都是极坐标 r 和 θ 的函数，于是，应变率速度关系为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varepsilon}_r=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \dot{\varepsilon}_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{r},\quad \dot{\varepsilon}_z=0,\ \dot{\gamma}_{rz}=\frac{\partial w}{\partial r}\\&\dot{\gamma}_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r},\quad \dot{\gamma}_{\theta z}=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

式中 $\dot{\varepsilon}_r$, $\dot{\varepsilon}_\theta$ 和 $\dot{\varepsilon}_z$ 为正应变率分量，$\dot{\gamma}_{r\theta}$, $\dot{\gamma}_{rz}$ 和 $\dot{\gamma}_{\theta z}$ 为剪应变率分量。

3. 应力应变率关系

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varepsilon}_r=-\dot{\varepsilon}_\theta=\lambda\sigma_-,\quad \dot{\gamma}_{r\theta}=2\lambda\tau_{r\theta}\\&\dot{\gamma}_{rz}=2\lambda\tau_{rz},\quad \dot{\gamma}_{\theta z}=2\lambda\tau_{\theta z}\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

式中 $\lambda(r,\theta)$为非负的比例因子。

4. 相容方程

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r)}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\dot{\varepsilon}_r+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial\dot{\gamma}_{r\theta}}{\partial\theta}\right)=0\\&\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\dot{\gamma}_{\theta z})-\frac{\partial}{\partial\theta}(\dot{\gamma}_{rz})=0\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

5. Mises 屈服条件

$$\sigma_-^2+\tau_{r\theta}^2+\tau_{rz}^2+\tau_{\theta z}^2=K^2=(\sigma_s/\sqrt{3})^2\tag{2.5}$$

式中 σ_s 为材料的屈服极限。令

$$\sigma_\theta=\varphi(\theta),\qquad \tau_{\theta z}=\psi(\theta)\tag{2.6}$$

式中 $\varphi(\theta)$及$\psi(\theta)$均为 θ 的任意函数。由式（2.1）得

$$\sigma_-=\frac{1}{4}\frac{d^2\varphi}{d\theta^2},\quad \tau_{r\theta}=-\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\theta},\quad \tau_{rz}=-\frac{d\psi}{d\theta}\tag{2.7}$$

利用式（2.3），（2.6）及（2.7））式（2.4）可变为

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r)}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\lambda\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right)$$

$$-\frac{4}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda\frac{d\varphi}{d\theta}\right)\right)=0\tag{2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\lambda\psi)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda\frac{d\psi}{d\theta}\right)\tag{2.9}$$

屈服条件（2.5）则变为

$$\left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right)^2+\left(2\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2+(4\psi)^2+\left(4\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2=(4K)^2\tag{2.10}$$

于是，问题归结为在给定边界条件下，求出方程组（2.7）～（2.10）的未知函数$\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$及$\lambda(r,\theta)$。

三、满足式(2.8)及(2.9)时函数$\varphi(\theta)$，$\psi(\theta)$及$\lambda(r,(\theta))$的确定

式（2.8）及（2.9）可变为

$$\lambda\frac{d^4\varphi}{d\theta^4}+2\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\frac{d^3\varphi}{d\theta^3}+\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\left(r\frac{\partial\lambda}{\partial r}-r^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial\theta^2}+4\lambda\right)+\frac{d\varphi}{d\theta}\left(4\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}+4r\frac{\partial^2\lambda}{\partial r\partial\theta}\right)=0 \tag{3.1}$$

$$\lambda\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\frac{d\psi}{d\theta}+\left(\lambda+r\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)\psi=0 \tag{3.2}$$

设

$$\lambda=f_1(r)\cdot f_2(\theta) \tag{3.3}$$

式中$f_1(r)$及$f_2(\theta)$分别表示r及θ的任意函数。则式（3.1）及（3.2）分别变为

$$\frac{d^4\varphi}{d\theta^4}\cdot f_1\cdot f_2+\frac{d^3\varphi}{d\theta^3}\cdot 2f_1\cdot f_2'+\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(r\cdot f_1'\cdot f_2-r^2\cdot f_1''\cdot f_2+f_1\cdot f_2''+4f_1\cdot f_2)+\frac{d\varphi}{d\theta}\cdot(4f_1\cdot f_2'+4r\cdot f_1'\cdot f_2')=0 \tag{3.4}$$

$$f_1\cdot f_2\cdot\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+f_1\cdot f_2'\frac{d\psi}{d\theta}+(f_1\cdot f_2+r\cdot f_1'\cdot f_2)\cdot\psi=0 \tag{3.5}$$

为了使得$\varphi(\theta)$及$\psi(\theta)$有解，我们试探令

$$f_2=a_{10}\cdot\exp(m\theta) \tag{3.6}$$

式中a_{10}及m均为任意常数。则式（3.4）及（3.5）分别变为

$$\frac{d^4\varphi}{d\theta^4}+\frac{d^3\varphi}{d\theta^3}\cdot 2m+\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\cdot(r\cdot f_1'-r^2\cdot f_1''+m^2\cdot f_1+4f_1)/f_1+\frac{d\varphi}{d\theta}\cdot(4m\cdot f_1+4m\cdot r\cdot f_1')/f_1=0 \tag{3.7}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+m\cdot\frac{d\psi}{d\theta}+(1+r\cdot f_1'/f_1)\cdot\psi=0 \tag{3.8}$$

要使得$\varphi(\theta)$及$\psi(\theta)$有解，便必须有

$$(r\cdot f_1'-r^2\cdot f_1''+m^2\cdot f_1+4f_1)/f_1=a_{11} \tag{3.9}$$

$$(4m\cdot f_1+4mr\cdot f_1')/f_1=a_{12} \tag{3.10}$$

$$1+r\cdot f_1'/f_1=a_{13} \tag{3.11}$$

式中a_{11}，a_{12}及a_{13}均为任意常数，式（3.9）～（3.11）均是欧拉方程，其解分别为

$$f_1=a_{14}\cdot r^{n_1}+a_{15}\cdot r^{n_2},\quad f_1=a_{16}\cdot r^{n_3},\quad f_1=a_{17}\cdot r^{n_4}$$

式中a_{14}～a_{17}均为任意常数。由于a_{11}，a_{12}及a_{13}均为任意常数，故$f_1=a_{18}\cdot r^n$
式中a_{18}及n均为任意常数，将满足式（3.9）～（3.11）。结合上式及式（3.3）与(3.6)得

$$\lambda=K_1\cdot r^n\cdot\exp(m\theta) \tag{3.12}$$

式中$K_1=a_{10}\cdot a_{18}$为任意常数。

将式（3.12）代入式（3.1）及（3.2）得

$$\frac{d^4\varphi}{d\theta^4}+2m\frac{d^3\varphi}{d\theta^3}+(2n-n^2+m^2+4)\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}+4m(1+n)\frac{d\varphi}{d\theta}=0 \tag{3.13}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+m\frac{d\psi}{d\theta}+(n+1)\cdot\psi=0 \tag{3.14}$$

现求式（3.13）的一般解．令

$$d\varphi/d\theta=Y \tag{3.15}$$

式（3.13）便变为

$$\frac{d^3Y}{d\theta^3}+2m\frac{d^2Y}{d\theta^2}+(2n-n^2+m^2+4)\frac{dY}{d\theta}+4m(n+1)Y=0 \tag{3.16}$$

特征方程为

$$k^3+2mk^2+(2n-n^2+m^2+4)k+4m(n+1)=0 \tag{3.17}$$

令

$$k=y-2m/3 \tag{3.18}$$

代入式（3.17）得

$$y^3+py+q=0$$

式中

$$p=-m^2/3+4+2n-n^2 \tag{3.19}$$

$$q=\frac{2m}{3}\left[-\frac{m^2}{9}+(2+4n+n^2)\right] \tag{3.20}$$

按照卡尔丹公式，得式（3.17）的解为[2]

$$k_1=y_1-2m/3,\quad k_2=y_2-2m/3,\quad k_3=y_3-2m/3,$$

$$\left.\begin{aligned}
&y_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\
&y_2=\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\
&y_3=\omega^3\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\
&\omega=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\quad \omega^2=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})
\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

于是，式（3.13）的解为

$$d\varphi/d\theta=Y=c_1\cdot\exp(k_1\theta)+c_2\exp(k_2\theta)+c_3\cdot\exp(k_3\theta) \tag{3.22}$$

式中 c_1，c_2 及 c_3 均为积分常数，再积分得

$$\sigma_\theta=\varphi=\int[c_1\cdot\exp(k_1\theta)+c_2\cdot\exp(k_2\theta)+c_3\exp(k_3\theta)]d\theta+c_4 \tag{3.23}$$

式中 c_4 为积分常数．由式（2.7）得

$$\sigma_-=\frac{1}{4}\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}=\frac{1}{4}[c_1k_1\cdot\exp(k_1\theta)+c_2k_2\cdot\exp(k_2\theta)+c_3k_3\cdot\exp(k_3\theta)] \tag{3.24}$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\theta}=-\frac{1}{2}[c_1\cdot\exp(k_1\theta)+c_2\cdot\exp(k_2\theta)+c_3\cdot\exp(k_3\theta)] \tag{3.25}$$

再求式（3.14）的解．式（3.14）的特征方程为

$$k^2+mk+(n+1)=0$$

其解为

$$\left.\begin{aligned}k_4&=(-m+\sqrt{m^2-4(n+1)})/2\\k_5&=(-m-\sqrt{m^2-4(n+1)})/2\end{aligned}\right\}\tag{3.26}$$

式（3.14）的解为

$$\tau_{\theta z}=\psi=c_5\cdot\exp(k_4\theta)+c_6\cdot\exp(k_5\theta)\tag{3.27}$$

式中 c_5 及 c_6 为积分常数，由式（2.7）得

$$\tau_{rz}=-\frac{d\psi}{d\theta}=-[c_5k_4\cdot\exp(k_4\theta)+c_6\cdot k_5\cdot\exp(k_5\theta)]\tag{3.28}$$

当 $m=0$ 时，上述求解 φ 的过程可大大简化，事实上，如果 $m=0$，则由式（3.17）得

$$k^3+(2n-n^2+4)k=0$$

故
$$k=0,\ 或\pm\sqrt{n^2-2n-4}$$

于是，

$$d\varphi/d\theta=Y=c_7+c_8\cdot\exp(\theta\sqrt{n^2-2n-4})+c_9\cdot\exp(-\theta\sqrt{n^2-2n-4})\tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta}=-\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\theta}=-\frac{1}{2}[c_7+c_8\cdot\exp(\theta\sqrt{n^2-2n-4})\\+c_9\cdot\exp(-\theta\sqrt{n^2-2n-4})]\end{aligned}\tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\sigma_-=\frac{1}{4}\cdot\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}=\frac{1}{4}[c_8\cdot\sqrt{n^2-2n-4}\times\exp(\theta\sqrt{n^2-2n-4})\\-c_9\sqrt{n^2-2n-4}\times\exp(-\theta\sqrt{n^2-2n-4})]\end{aligned}\tag{3.31}$$

四、裂纹尖端理想塑性应力场的确定方法

1. 普遍方法

上节中求得的应力场式（3.24）～（3.31），还必须满足屈服条件式（2.5），重写于下

$$\sigma_-^2+\tau_{r\theta}^2+\tau_{rz}^2+\tau_{\theta z}^2=K^2\tag{2.5}$$

把式（3.24）～（3.28）代入上式，我们发现，要使得式（2.5）在裂纹尖端的某一应力区内处处成立（即 θ 为任意值）是不可能的。但如果 $k_1\sim k_5$ 中至少有一个 k 值为 0，则式（3.24）～（3.28）有可能满足式（2.5）（不管 θ 为何数值）。

例如，如果令 $k_4=0$，则可得到关于 m 及 n 间关系的方程为

$$-m+\sqrt{m^2-4(n+1)}=0\tag{4.1}$$

即是说，为了使式（3.24）～（3.28）在裂纹尖端的某一应力区内处处满足式（2.5），则 m 及 n 的数值不能任意给定，而必须受到式（4.1）的约束。也就是说，式（3.24）～（3.28）所表示的应力场必须经过“筛选”（满足式（2.5））才是裂纹尖端附近的真实应力场。

如果 $m=0$，则式（3.26）～（3.31）自然满足式（2.5）。这是因为 $\tau_{r\theta}$ 的表式（3.30）中含有常数项 $-C_7/2$ 的原故。所以，当 $m=0$ 时，我们不必经过“筛选”（即 n 可为任意数值），即可得到裂纹尖端理想塑性应力场的一般解析表达式为式（3.26）～（3.31），重写于下（令 $m=0$）

$$k_4=i\sqrt{n+1},\quad k_5=-i\sqrt{n+1}\tag{3.26$'$}$$

$$\tau_{\theta z}=\psi=c_5\cdot\exp(k_4\theta)+c_6\cdot\exp(k_5\theta)\tag{3.27$'$}$$

$$\tau_{rz}=-d\psi/d\theta=-[c_5\cdot k_4\cdot\exp(k_4\theta)+c_6\cdot k_5\cdot\exp(k_5\theta)]\tag{3.28$'$}$$

$$d\varphi/d\theta=c_7+c_8\cdot\exp(\theta\sqrt{n^2-2n-4})+c_9\cdot\exp(-\theta\sqrt{n^2-2n-4}) \tag{3.29'}$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\theta}=-\frac{1}{2}[c_7+c_8\cdot\exp(\theta\sqrt{n^2-2n-4})$$
$$+c_9\cdot\exp(-\theta\sqrt{n^2-2n-4})] \tag{3.30'}$$

$$\sigma_-=\frac{1}{4}\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}=\frac{1}{4}[c_8\cdot\sqrt{n^2-2n-4}\times\exp(\theta\sqrt{n^2-2n-4})$$
$$-c_9\sqrt{n^2-2n-4}\times\exp(-\theta\sqrt{n^2-2n-4})] \tag{3.31'}$$

以上所述，令$k_1\sim k_6$中任何一个或多个k值为零的方法，是“筛选”的普遍方法。

为了和文献[1]相比较，在式(3.26)及(3.27)中令$n=0$得

$$\psi=c_5\cdot\exp(i\theta)+c_6\cdot\exp(-i\theta)$$

即

$$\psi=c_{10}\cos\theta+c_{11}\sin\theta \tag{4.2}$$

式中c_{10}及c_{11}为任意常数。在式(3.29)中，令$n=0$得

$$d\varphi/d\theta=c_7+c_8\cdot\exp(2i\theta)+c_9\cdot\exp(-2i\theta)$$

再积分得

$$\varphi=c_{12}+c_{13}\theta+c_{14}\cos 2\theta+c_{15}\sin 2\theta \tag{4.3}$$

式中$c_{12}\sim c_{15}$为任意常数。式(4.2)和(4.3)分别和文献[1]的式(3.15)和(3.11)完全一致。

2. 简易方法

以下我们常一个特殊而简单的“筛选“方法。

兹研究式(3.16)的左边最后一项的Y前的系数为零的情形。如果式(3.16)的左边的最后一项的Y前的系数为零，则令

$$Y_1=dY/d\theta=d^2\varphi/d\theta^2$$

代入式(3.16)得

$$\frac{d^2Y_1}{d\theta^2}+2m\frac{dY_1}{d\theta}+(2n-n^2+m^2+4)Y_1=0$$

用特征方程的方法，可求得上式的解为

$$d^2\varphi/d\theta^2=Y_1(\theta)$$

再积分一次可得

$$d\varphi/d\theta=\int Y_1(\theta)d\theta+c$$

式中c为积分常数。于是，$\tau_{r\theta}=-2^{-1}d\varphi/d\theta$的表式中出现了常数项$-c/2$，这时，式(3.24)～(3.28)所表示的应力场便可能处处满足式(2.5)了。

要使得式(3.16)左边最后一项的Y前的系数为0，可有以下二种情形：

(a) $m=0$。文献[1]已经研究了$n=0$及-1的情形，本文不必重复。但须指出，n为任何数值均是允许的；

(b) $n=-1$ (m为任意数值)

如果$n=-1$，则式(3.13)变为

$$\frac{d^4\varphi}{d\theta^4}+2m\frac{d^3\psi}{d\theta^3}+(m^2+1)\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}=0$$

其解为

$$\varphi=(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)\cdot\exp(-m\theta)+a_3\theta+a_4 \tag{4.4}$$

式中 a_1～a_4 为积分常数.

当 $n=-1$ 时，式（3.14）则变为

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+m\frac{d\psi}{d\theta}=0 \tag{4.5}$$

积分得

$$\psi=a_5\cdot\exp(-m\theta)+a_6 \tag{4.6}$$

当 $m=0$ 时，则（4.5）式的解为

$$\psi=a_7\theta+a_8 \tag{4.7}$$

式中 a_5～a_8 为积分常数.

当 $m=0$ 时，式（4.4）和（4.7）分别与文献[1]中的式（3.13）及（3.17）完全一致.

将 φ 及 ψ 的表式（4.4）和（4.6）代入式（2.7）得理想塑性应力分量的一般解析表达式为

$$\sigma_\theta=(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)\cdot\exp(-m\theta)+a_3\theta+a_4 \tag{4.8a}$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\theta}=-\frac{1}{2}[(a_2-ma_1)\cos\theta$$

$$-(a_1+ma_2)\sin\theta]\cdot\exp(-m\theta)-a_3/2 \tag{4.8b}$$

$$\tau_{rz}=-d\psi/d\theta=a_5m\cdot\exp(-m\theta) \tag{4.8c}$$

$$\tau_{\theta z}=\psi=a_5\cdot\exp(-m\theta)+a_6 \tag{4.8d}$$

$$\sigma_-=4^{-1}[(m^2a_1-2ma_2-a_1)\cos\theta+(m^2a_2$$

$$+2ma_1-a_2)\cdot\sin\theta]\cdot\exp(-m\theta) \tag{4.8e}$$

$$\sigma_r=2\sigma_-+\sigma_\theta=\left[\left(\frac{1}{2}m^2a_1-ma_2+\frac{1}{2}a_1\right)\cdot\cos\theta\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}m^2a_2+ma_1+\frac{1}{2}a_2\right)\cdot\sin\theta\right]\cdot\exp(-m\theta)+a_3\theta+a_4 \tag{4.8f}$$

将式（4.8）代入式（2.5）得屈服条件为

$$\left\{\left[\frac{1}{16}(m^2a_1-2ma_2-a_1)^2+\frac{1}{4}(a_2-ma_1)^2\right]\cdot\cos^2\theta\right.$$

$$+\left[\frac{1}{16}(m^2a_2+2ma_1-a_2)^2+\frac{1}{4}(a_1+ma_2)^2\right]\cdot\sin^2\theta$$

$$+2\left[\frac{1}{4}(m^2a_1-2ma_2-a_1)\cdot(m^2a_2+2ma_1-a_2)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}(a_1+ma_2)(a_2-ma_1)\right]\cdot\sin\theta\cos\theta+a_5^2(1+m^2)\right\}$$

$$\times\exp(-2m\theta)+\left\{2a_5a_6+\frac{1}{2}a_3[(a_2-ma_1)\cdot\cos\theta\right.$$

$$\left.-(a_1+ma_2)\sin\theta]\right\}\cdot\exp(-m\theta)+a_3^2/4+a_6^2=K^2$$

为了保证上式在裂纹尖端的某一应力区内处处成立，我们必须取

$$a_1=a_2=a_5=0 \tag{4.9}$$

及

$$a_3^2/4+a_6^2=K^2 \tag{4.10}$$

将式（4.9）代入式（4.8）得到 $n=-1$（m 为任意值）时，平面应变和反平面应变复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析式为

$$\begin{aligned}&\sigma_r=a_3\theta+a_4,\quad \sigma_\theta=a_3\theta+a_4\\&\tau_{r\theta}=-a_3/2,\quad \tau_{rz}=0,\quad \tau_{\theta z}=a_6\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中常数 a_3 及 a_6 满足式（4.10）．

式（4.11）与文献[1]中的式（3.28）及（3.29）完全一致．但是本文的 Levy-Mises 比例因子 $\lambda(r,\theta)$和文献[1]的不同，前者是

$$\lambda=K_1r^{-1}\cdot\exp(-m\theta) \tag{4.12}$$

后者是[1]

$$\lambda=c\cdot r^{-1} \tag{4.13}$$

显然，式（4.14）只是式（4.12）的一个特殊情况．

参 考 文 献

[1] 林拜松，应用数学和力学，6，9（1985），845—852.

[2] 《数学手册》编写组编，《数学手册》，人民教育出版社（1977），87—89.

On Perfectly Stress Field at a Mixed-Mode Crack Tip under Plane and Anti-Plane Strain

Yuan Yi-wu

(Central-South University of Technology, Changsha)

Abstract

In[1], under the condition that all the perfectly plastic stress components at a crack tip are functions of θ only, making use of equilibrium equations, stress-strain rate relations, compatibility equations and yield condition, Lin derived the general analytical expressions of the perfectly plastic stress field at a mixed-mode crack tip under plane and anti-plane strain. But in [1] there were several restrictions on the proportionality factor λ in the stress-strain rate relations, such as supposing that λ is independent of θ and supposing that $\lambda=c$ or cr^{-1}. In this paper, we abolish these restrictions. The cases in [1], $\lambda=cr^n$ (n=0 or -1)are the special cases of this paper.