应用数学和力学，第8卷第11期（1987年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

轴对称模型的Hagen-Poiseuille流的运动不稳定性

王　发　民

（中国科学院应用数学所）

简·篠斯·斯图亚特（F.R.S）

（英国，帝国理工学院）

（秦元勋推荐，1986年4月10日收到）

摘　　要

本文讨论流体通过圆管的运动不稳定性问题．作为流体运动所受的干扰波，我们考虑了一个非线性轴对称模型．它对应的相关振幅函数满足扩散方程，且由于复杂的分子运动和流体粘性的相互作用，当流体的雷诺数增大时其扩散系数会出现负值．如负扩散现象出现，在流体运动中出现的湍流段内会引起流体的能量集中，并扮演减少阻尼的角色．

一、引　　言

Hagen-Poiseuille 流的稳定性问题无论在理论方面，还是在实验方面都已经有许多流体力学工作者做了大量的研究工作，然而对这一问题至今还存在着许多烦恼和许多有待解决的谜．在理论方面，尽管还没有严格证明，一般都认为该流体对线性干扰波模型是稳定的．由实验知，如果能很小心地保证流体运动不受任何干扰，层流可以保持到雷诺数5000(Ekman, Taylor)；另一方面，如果流体运动允许受到很小干扰的话，则在雷诺数2000就出现湍流现象．

上面的研究给我们这样一个启示，即只有当依靠流体能量的非线性振幅明显地影响小扰动的特性时，该流体的不稳定性才能发生．因而非线性理论的研究就必然地出现了．这里列举几个试图找出该流体运动的不稳性的工作．

（1） Tatsum (1952) 曾提出在管子入口处基本流对小扰动线性模型的不稳定性，在雷诺数大于 10^4 时就会出现．这可能与某些实验相符．但要讨论整个管子的稳定性，非线性扰动及其它的因素当然是必须考虑的．

（2） Stuevrt(1958、1960、1978)和Watson(1960) 建立了弱非线性理论，尽管该理论说明了不少在临界状态下的物理现象，但对于Hagen-Poiseuille 流是不适用的，因为该流体运动不象平面Poiseuille流那样存在一条中性曲线．Davey (1971)，Itoh (1978) 等都做过这方面的尝试，但都没有找出振幅方程的分枝点．

（3） Coles(1962)Wygnanski和Champagne(1971)发表了他们在实验中发现的在开头和尾部存在明显分界面的湍流段的实验现象，在湍流段内部流体具有湍流速度，而在湍流段以外流体呈现层流，这一实验至今还没有满意的理论说明。

参考Stuart(1981)讨论转动的管子中流体运动的稳定性时，所采用的长波理论，本文讨论了轴对称模型的Hagen-Poiseuille流稳定性问题，导出了该流体运动对于弱非线性模型的振幅方程。由于复杂的分子运动和流体粘性的相互作用，在流体运动中会出现负扩散现象。当它在流体的雷诺数较大的情况下出现时，会在缓慢变化的湍流段中引起流体能量的集中，并起到减少阻尼的作用。

二、运动方程

作为力学模型，让我们考虑不可压缩流体通过一个圆截面的长管，设管长为L，半径为a。在运动未被干扰的情况下，流体由压力梯度产生运动速度，它在管子中心达到极大值u_0，取r表示径向坐标，z表示轴向坐标，u，w分别表示对应的速度分量，p表示压力，T表示时间。我们选择u_0，a，a^2/ν，u_0^2分别为速度、长度、时间和压力的无量纲化参照系。设流体的流函数为ϕ，则轴对称模型的Navier-Stokes方程在极坐标系下的无量纲形式为：

$$\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial T}\psi+\frac{1}{r}\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(r,z)}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial z}\psi=\frac{1}{\mathrm{R}}\nabla^2\psi \tag{2.1}$$

其中
$$\psi=\nabla^2\phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi \tag{2.2}$$

$$\mathrm{R}=\frac{u_0 a}{\nu},\ u=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r},\ w=-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{2.3}$$

这里R是流体的雷诺数，ν是流体的动量粘度。流体运动满足边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}=0 && \text{当}r=1\\ &\phi:\ \text{非奇} && \text{当}r=0\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

在没有干扰的情况下，Hagen-Poiseuille模型的基本流函数是：

$$\phi_B=\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4} \tag{2.5}$$

设$\hat{\phi}$为流体运动所受的干扰，则流函数ϕ可以表示为：

$$\phi=\phi_B+\hat{\phi} \tag{2.6}$$

式中$\hat{\phi}$表示流函数所受干扰的波动值。

将表示式(2.5)和(2.6)代入方程(2.1)，且忽略流函数的扰动项$\hat{\phi}$的高次幂以及$\hat{\phi}$与它的导数的乘积项，得下面线性化方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial T}+\mathrm{R}(1-r^2)\frac{\partial}{\partial z}\right]\hat{\psi}=\nabla^2\hat{\psi} \tag{2.7}$$

式中 $\hat{\psi}=\nabla^2\hat{\phi}$。

假定干扰波的变化是缓慢的，我们引入长时间变量和流动坐标

$$\tau=\delta^2 T,\ \zeta=\delta(z-cT\mathrm{R}) \tag{2.8}$$

其中c是波的传播速度，$\delta=a/L$，由于管长L与半径a相比足够大，它是一个小参数。

如果我们将变量τ和ζ代入稳定性方程，则(2.7)可以化简为：

$$\left[\frac{\partial}{\partial T}+\delta^2\frac{\partial}{\partial\tau}+\delta\mathrm{R}(1-r^2-c)\frac{\partial}{\partial\zeta}-\nabla_1^2\right]\nabla_1^2\hat{\phi}=0 \tag{2.9}$$

其中
$$\nabla_1^2=\frac{\partial}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\delta^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} \tag{2.10}$$

$\hat{\phi}$满足边界条件：

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial r}=\hat{\phi}=0,\quad 当r=1\\ \hat{\phi}：非奇，\quad 当r=0\end{array}\right\} \tag{2.11}$$

由方程(2.9)，我们可以看出$\hat{\phi}$不仅是T，τ，r，ζ的函数，而且包含小参数δ，这就导致我们寻找如下形式的级数解：

$$\hat{\phi}(T,\tau,r,\zeta)=\phi_0'(T,\tau,r,\zeta)+\delta\phi_1'(T,\tau,r,\zeta)+\delta^2\phi_2'(T,\tau,r,\zeta)+\cdots \tag{2.12}$$

将上式代入方程(2.9)并比较δ的幂次，我们得到下面的系列方程：

$O(1)$：
$$\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]\phi_0'=0 \tag{2.13}$$

$O(\delta)$：
$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]\phi_1'\\&=-\mathrm{R}(1-r^2-c)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\phi_0'\end{aligned} \tag{2.14}$$

$O(\delta^2)$：
$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]\phi_2'\\&=\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial^2\phi_0'}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\phi_0'\\&\quad-\mathrm{R}(1-r^2-c)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\phi_1'\\&\quad+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\phi_0'\end{aligned} \tag{2.15}$$

下面我们将逐步讨论上述系列方程的可解性，并求出它们的解。

三、运动方程解的讨论

在量级$O(1)$中，(2.13)是ϕ_0'的齐次方程，我们可以求出它的特征根，它表示该流体运动所受干扰波的特征结构。方程(2.14)的右端项的系数包函波速c，只有当c取某一定值时，它才能有解存在。而方程(2.15)可解的充分必要条件将要求出现在该方程右端的非线性干扰

波的相关振幅函数满足一定的函数关系式.

1. 方程的特征根

对于方程(1.13)，我们求如下形式的特征根：

$$\phi_0'=S(\tau,\zeta)\phi_0(r)\exp(-\sigma T) \tag{3.1}$$

其中$S(\tau,\zeta)$是相关振幅函数，$\phi_0(r)$是振幅函数，σ是大于零的实数.

将(3.1)代入(2.14)，我们得下面的常微分方程

$$\left[-\sigma\left(D^2-\frac{D}{r}\right)-D^2\left(D^2-\frac{D}{r}\right)+\frac{D}{r}\left(D^2-\frac{D}{r}\right)\right]\phi_0=0 \tag{3.2}$$

式中 $D=d/dr$表示对r的导数.

如果我们引入函数

$$F_0=\left(D^2-\frac{D}{r}\right)\phi_0 \tag{3.3}$$

则(3.2)可以化为相似Bessel方程

$$\left(\sigma+D^2-\frac{D}{r}\right)F_0=0$$

它的一般解为

$$F_0=ArJ_1(\sqrt{\sigma}\,r)+BY(\sqrt{\sigma}\,r) \tag{3.4}$$

式中A,B是两个任意常数，而且J_1和Y_1分别表示第一类及第二类Bessel函数．但由于当$r\to0$时Y_1无界，B必须取零值，则我们有：

$$F_0=rJ_1(\sqrt{\sigma}\,r)$$

即

$$\left(D^2-\frac{D}{r}\right)\phi_0=rJ_1(\sqrt{\sigma}\,r) \tag{3.5}$$

该方程满足边界条件的解为

$$\phi_0=rJ_1(\lambda_j r)-\frac{\lambda_j}{2}r^2J_0(\lambda_j) \tag{3.6}$$

式中 $\lambda_j=\sqrt{\sigma}$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$表示二阶第一类Bessel函数的根，即 $J_2(\lambda_j)=0$.

现在我们求得该流体运动稳定性方程的特征根，它可以表示为：

$$\phi_0'=S(\tau,\zeta)\left[rJ_1(\lambda_j r)-\frac{\lambda_j}{r}r^2J_0(\lambda_j)\right]\exp(-\lambda_j^2T) \tag{3.7}$$

对于式中因子$S(\tau,\zeta)$我们将在下一小节中讨论.

2. 波的传播速度

在$O(\delta)$量级的方程中，它的右端项包含乘积因子$\partial S/\partial\zeta$，为了简便，我们设

$$\phi_1'=\frac{\partial S}{\partial\zeta}\phi_1(r)\exp(-\lambda_j^2T) \tag{3.8a}$$

$$F_1=\left(D^2-\frac{D}{r}\right)\phi_1(r) \tag{3.8b}$$

则方程(2.14)可以简化为

$$\left(\lambda_j^2+D^2-\frac{D}{r}\right)F_1=\mathrm{R}(1-r^2-c)rJ_1(\lambda_j r) \tag{3.9}$$

根据微分方程伴随理论，方程(3.9)和它的边界条件有解的充分必要条件是该方程的右端项与它的伴随系统的解函数正交。即要求积分

$$\int_0^1 F_1^*(1-r^2-c)rJ_1(\lambda_j r)dr=0 \tag{3.10}$$

成立。式中F_1^*满足

$$\int_0^1 F_1^*\{L_1(F_1)+[-F_1+\left(D^2-\frac{D}{r}\right)\phi_1]\}dr=0 \tag{3.11}$$

即

$$\left(D^2+\frac{D}{r}-\frac{1}{r^2}+\lambda_j^2\right)F_1^*=0 \tag{3.12a}$$

$$\left(D^2+\frac{D}{r}-\frac{1}{r^2}\right)F_1^*=0 \tag{3.12b}$$

$$F_1^*(0)=F_1^*(1)=0 \tag{3.12c}$$

式中 $L_1=D^2+\lambda_j^2-\frac{D}{r}$是一个微分算子。求解上述方程得

$$F_1^*=\frac{1}{\lambda_j^2}\left(r-\frac{J_1(\lambda_j r)}{J_1(\lambda_j)}\right) \tag{3.13}$$

将(3.13)代入积分关系式(3.9)并求解，我们得到的传播速度

$$c=\frac{2}{3}-\frac{4}{\lambda_j^2} \tag{3.14}$$

3. 振幅方程

同样的过程，在方程(2.15)中，令

$$\phi_2'=\phi_2(r)S(\tau,\zeta)\exp(-\lambda_j^2T) \tag{3.15}$$

$$F_2=\left(D^2-\frac{D}{r}\right)\phi_2 \tag{3.16}$$

得线性常微分方程

$$S(\tau,\zeta)\left(D^2-\frac{D}{r}+\lambda_j^2\right)F_2=\frac{\partial^2 S}{\partial\zeta^2}[-\lambda_j^2\phi_0+F_0-\left(\frac{1}{3}-r^2-\frac{4}{\lambda_j^2}\right)\mathrm{R}F_1]+\frac{\partial S}{\partial\tau}F_0 \tag{3.17}$$

它有解的充分必要条件是积分

$$\int_0^1 F_2^*\left\{\frac{\partial^2 S}{\partial\zeta^2}\left[-\lambda_j^2\phi_0+F_0-\left(\frac{1}{3}-r^2-\frac{4}{\lambda_j^2}\right)\mathrm{R}F_1\right]+\frac{\partial S}{\partial\tau}F_0\right\}dr=0 \tag{3.18}$$

而只有当函数$S(\tau,\zeta)$满足下列扩散方程

$$\frac{\partial S}{\partial\tau}-K\frac{\partial^2 S}{\partial\zeta^2}=0 \tag{3.19}$$

时，积分(3.19)的值等于零才能成立。式中

$$K=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{R}^2}{9\lambda_j^2}\left(\frac{1}{5}-\frac{36}{\lambda_j^2}+\frac{792}{\lambda_j^4}\right) \tag{3.20}$$

是方程的扩散系数，它的值不仅仅依靠Bessel函数的根$\lambda_j(J_2(\lambda_j)=0)$；而且依靠雷诺数R。对于取定的值$\lambda_j$，当流体的雷诺数增大时，$K$的值减少。这里，存在一个临界值$R_c$，使得$K$的值为零，且当雷诺数R跨越$R_c$时，$K$的值改变符号。该临界值称为临界雷诺数，用$R_c$表示。这样我们有如下关系式

$$K>0 \qquad 当R<R_c(j)时 \tag{3.21}$$

$$K<0 \qquad 当R>R_c(j)时 \tag{3.22}$$

表1中给出了$j=1,2,\cdots,10$的临界雷诺数R_c的值。当$j=1,2,3$时，不论R取什么值，K的值大于零。

表 1　　临界雷诺数数值表

J	λ_j	$R_c(j)$	J	λ_j	$R_c(j)$
1	5.13562	—	6	21.11670	127.596
2	8.41724	—	7	24.27011	137.029
3	11.61984	—	8	27.42057	148.456
4	14.79595	43.492	9	30.56920	160.924
5	17.95982	122.960	10	33.71652	174.011

对于正的扩散系数的现象（$K>0$），方程(3.19)的解以及解的性质，是数学物理上的一般问题。当$\tau=0$时，S是ζ的函数，且当τ的值增大时，S将扩散并接受阻尼。以下我们将着重讨论当扩散系数为负值时的问题。

四、负扩散现象

负扩散现象正好是正扩散问题的一个逆过程，让我们考虑如下问题：

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}+(-K)\frac{\partial^2 S}{\partial \zeta^2}=0 \qquad (-K>0) \tag{4.1a}$$

$$S=A\exp\{-\sigma^2\zeta^2\} \qquad (当\zeta=0) \tag{4.1b}$$

$$S\to 0 \qquad (当|\zeta|\to\infty) \tag{4.1c}$$

它的解函数是

$$S=A(1+4K\tau\sigma^2)\cdot\exp[-\sigma^2\zeta^2(1+4K\tau\sigma^2)^{-1}] \tag{4.2}$$

$S(\tau,\zeta)$具有下列性质：

i）当$\tau\to(-4K\sigma^2)^{-1}$时，如$\zeta$取异于零的一个定值，我们有

$$\lim_{\tau\to(-4K\sigma^2)^{-1}} S(\tau,\zeta)=0 \tag{4.3}$$

ii）当$\tau\to(-4K\sigma^2)^{-1}$时，如果$\zeta^2(1+4K\tau\sigma^2)^{-1}$取某一不为零的值，我们又可得到

$$\lim_{\tau\to(-4K\sigma^2)^{-1}} S(\tau,\zeta)=\infty \tag{4.4}$$

则解函数$S(\tau,\zeta)$在$\tau\to(-4K\sigma^2)^{-1}$时既聚集又扩散。

现在让我们讨论当扩散系数K为负值时，Hagen-Poiseuille流的稳定性问题。为此我们考虑如下一般的干扰波模型，

$$\exp\{PT+i\alpha z\} \tag{4.5}$$

式中P是复数，α是波长（$\alpha\ll 1$），根据Taylor长波理论，我们将P展开为小参数α的级数，即：

$$P=P_0+\alpha P_1+\alpha^2 P_2+\cdots \tag{4.6}$$

比较前面的特征根表示式(3.1)和(4.6)，我们可以求得

$$P_0=-\lambda_i^2 \quad P_1=i\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{\lambda_i^2}\right)\mathrm{R},\ P_2=-K \tag{4.7}$$

作为一个对于小参数α的逼近式，干扰波可以表示为:

$$\exp[-(\lambda_i^2+K\alpha^2)T+i\alpha(z-(\mathrm{R}T)] \tag{4.8}$$

由上式知，如果K是负数，则该干扰波比在K等于零和大于零时更缺少阻尼，因而负扩散系数($K<0$)在这儿就扮演了减少阻尼的角色.

参考特征解表示式(3.1)，现在我们可以看到：由于取负值的指数因子$-(\lambda_i^2+K\alpha^2)$的作用，该流体运动对小扰动干扰波是阻尼的. 然而负扩散现象，当它发生的时候，会引起流体运动在阻尼的缓慢变化的湍流段内部集中能量，和减少阻尼. 也就是说，负扩散现象在流体运动中起一个抵消自然阻尼的作用.

我们应该指出，在这篇文章里方程的非线性项在计算中被忽略了，而且，所考虑的湍流段是缓慢变化的塞子，而不是实验中指出的那样有明显交界面的湍流段. 尽管如此，我们相信这个结果对于流体运动中出现湍流段的现象是很有用的，且文中所用的数学分析的处理方法也是很有意思的.

作者衷心感谢中国科学院应用数所秦元勋教授，作者之一在京学习和工作期间，秦教授的认真指导和不断的鼓励，无疑对这一工作的完成是十分重要的.

参 考 文 献

[1] Coles, D., in *Mecanique ala Turbulence*, ed. A. Favre, C. N. R. S., Paris (1962), 229—250.

[2] Davey, A. and H. P. F. Nguyen, Finite-amplitude stability of pipe flow, *J. Fluid Mech.*, **45** (1971), 701—720.

[3] Davey, A.,On Iton's finite amplitude stability theory for pipe flow, *J.Fluid Mech.*, **86** (1978), 695—703.

[4] Iton, N., Nonlinear stability of parallel flows with subcritical Reynolds number, Part 1, An asymptotic theory valid for small amplitude disturbances, Part 2, Stability of pipe Poiseuille flow to finite axisymmetric disturbances, *J. Fluid Mech.*, **82** (1977), 455—479.

[5] Stuart, J. T.,On the non-linear mechanics of wave disturbance in stable and unstable parallel flow, Part 1: The basic behaviour in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, **9** (1960), 353—370.

[6] Stuart, J. T., *Laminar Turbulent Transition*, ed. R. Eppler And H. Fasel, Springer-Verlag-Berlin-Heidelberg Press (1980).

[7] Stuart, J. T., Laminar and turbulence transition in channel and pipe, *Transition and Turbulence*, Academic Press Inc. (1981), 77—94.

[8] Smith, F. T. and R. J. Bodonyi, Amplitude-dependent neutral modes in the Hagen-Poiseuille flow through a circular pipe, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. A **384** (1982), 463—489.

[9] Watson, J., On the non-linear mechanics of wave disturbance in stable and unstable

parallel flow, Part 2: The development of a solution for plane Poiseuille flow and Couette flow, *J. Fluid Mech.*, **9** (1960), 371—389.

Instability of Hagen-Poiseuille Flow for Axisymmetric Mode

Wang F. M.
(*Institute of Applied Math. Sinica, Beijing*)

J. T. Stuart (F. R. S.)
(*Imperial College, U. K.*)

Abstract

An investigation is described for instability problem of flow through a pipe of circular cross section. As a disturbance motion, we consider an axisymmetric nonlinear mode. An associated amplitude or modulation equation has been derived for this perturbation. This equation belongs to the diffusion type. The coefficient of it can be negative with Reynolds number increasing, because of the complex interaction between molecular diffusion and convection. The negative diffusion, when it occurs, causes a concentration and focusing of energy within the decaying slug, acting as a role of reversing natural decays.