应用数学和力学，第 8 卷第11期（1987年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

关于奇摄动拟线性系统*

刘 光 旭

（南开大学，1986年10月6日收到）

摘　要

本文目的在于对非线性两点边值问题(1.1)证明其解存在的充分条件．并利用这一结果研究拟线性弱耦合奇摄动系统$(DP)_q$的边界层现象．

一、微 分 不 等 式

本文研究如下非线性边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{y}''=\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')\quad (a<t<b)\\&\mathbf{y}(a)=\mathbf{A},\ \mathbf{y}(b)=\mathbf{B}\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中$\mathbf{y},\mathbf{h},\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$是$n$维向量，并且函数$\mathbf{h}$在$[a,b]\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$上是连续的．

我们将采用[1]中的符号．例如：

1．所有向量都是$\mathbf{R}^n$中的，并且用黑体字表示．如

$$\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n),\ \mathbf{h}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')=(h_1(t,\mathbf{y},\mathbf{y}'),\cdots,h_n(t,\mathbf{y},\mathbf{y}'));$$

2．向量不等式$\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\mathbf{y}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$表示其分量间有相同的不等式关系，即$\alpha_i(t)\leqslant y_i(t)\leqslant\beta_i(t)(i=1,\cdots,n)$．类似用符号$|\mathbf{y}(t)|\leqslant\mathbf{c}$表示其分量间有关系$|y_i(t)|\leqslant c_i\ (i=1,\cdots,n)$，其中$c_i$是向量$\mathbf{c}$的第$i$个分量；

3．符号$\mathbf{y}_{\alpha i}$表示向量$(y_1,\cdots,y_{i-1},\alpha_i,y_{i+1},\cdots,y_n)$；$\mathbf{y}'_{\alpha i}$表示向量$(y'_1,\cdots,y'_{i-1},\alpha'_i,y'_{i+1},\cdots,y'_n)$，而符号$h_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i},\mathbf{y}'_{\alpha i})$则表示函数$h_i(t,y_1,\cdots,y_{i-1},\alpha_i,y_{i+1},\cdots,y_n,y'_1,\cdots,y'_{i-1},\alpha'_i,y'_{i+1},\cdots,y'_n)$．

定义1 设$\boldsymbol{\alpha}(t),\boldsymbol{\beta}(t)\in C^2[a,b]$，且$\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$．若存在一个正的、不减的函数$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(t)\in C[0,\infty)$，它满足

$$\int_{\lambda_i}^{\infty}\frac{sds}{\varphi_i(s)}>\max_{[a,b]}\beta_i(t)-\min_{[a,b]}\alpha_i(t)\tag{1.2}$$

其中$\lambda_i=\dfrac{1}{b-a}\max\{|\alpha_i(a)-\beta_i(b)|,\ |\alpha_i(b)-\beta_i(a)|\}$．并且对$a\leqslant t\leqslant b$，$\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\mathbf{y}\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$，$\mathbf{y}'\in\mathbf{R}^n$有如下关系成立

$$|h_i(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')|\leqslant\varphi_i(|y'_i|)\tag{1.3}$$

* 林宗池推荐．

则称函数$\mathbf{h}$在$[a,b]$上关于$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varphi})$按分量满足Nagumo条件。

显然，如果每一个h_i只依赖于y_i'，并且$h_i(t,\mathbf{y},z_i)=O(|z_i|^2)$，当$|z_i|\to\infty$，则$\mathbf{h}$按分量满足Nagumo条件。例如拟线性弱耦合函数h[1]就满足此条件。

定义2 给定$[a,b]$上两个函数$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(t)$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}(t)$，如果

(i) 函数偶$(\alpha_i(t),\ \beta_i(t))$ $(i=,\cdots,n)$在$[a,b]$上是逐段$C^{(2)}$类的，即$[a,b]$有n个划分$\{t_i^j\}_{j=0}^{l_i}$，$a=t_i^0<t_i^1<\cdots<t_i^{l_i}=b$，使得在每个子区间$[t_i^{j-1},t_i^j]$ $(i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,l_i)$，上$\alpha_i$与$\beta_i$都是二次连续可微的（在分点$t_i^{j-1}$与$t_i^j$处，导数分别是右导数和左导数）；

(ii) 对每个$t\in(a,b)$，有$\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$，而在端点则有

$$\boldsymbol{\alpha}(a)\leqslant\mathbf{A}\leqslant\boldsymbol{\beta}(a),\quad \boldsymbol{\alpha}(b)\leqslant\mathbf{B}\leqslant\boldsymbol{\beta}(b);$$

(iii) 对$t\in(a,b)$，有

$$D_L\alpha_i\leqslant D_R\alpha_i(t),\quad D_L\beta_i(t)\geqslant D_R\beta_i(t)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

其中D_L和D_R分别表示左导数和右导数；

(iv) 在每个子区间$(t_i^{j-1},\ t_i^j)(j=1,\cdots,l_i)$上，对一切$\alpha_k(t)\leqslant y_k\leqslant\beta_k(t)$，$-\infty<y_k'<\infty$ $(k\neq i)$，都有下式成立

$$\alpha_i''\geqslant h_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i},\mathbf{y}_{\alpha i}')\tag{1.4}$$

$$\beta_i''\leqslant h_i(t,\mathbf{y}_{\beta i},\mathbf{y}_{\beta i}')\tag{1.5}$$

则称$(\boldsymbol{\alpha}(t),\boldsymbol{\beta}(t))$为BVP（边值问题的简写）(1.1)的界定函数耦。

定义3 设$\boldsymbol{\alpha}(t)$，$\boldsymbol{\beta}(t)$是$[a,b]$上逐段$C^{(2)}$类函数，且$\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)(t\in[a,b])$。取常向量$\mathbf{c}=(c_1,\cdots,c_n)>0$使之$c_i>\max\limits_{[a,b]}\{|\alpha_i'(t)|,\ |\beta_i'(t)|\}$，其中$|\alpha_i'(t)|$，$|\beta_i'(t)|$在分点$\{t_i^j\}$ $(j=0,\cdots,l_i)$，处应分别理解为$\max\{|D_L\alpha_i(t)|,\ |D_R\alpha_i(t)|\}$，$\max\{|D_L\beta_i(t)|,|D_R\beta_i(t)|\}$。我们定义

$$\mathbf{H}^*(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')=\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\overset{*}{\mathbf{y}}{}')$$

其中

$$\overset{*}{\mathbf{y}}{}_j'=\begin{cases}c_j, & \text{当}y_j'>c_j\\ y_j', & \text{当}|y_j'|\leqslant c_j\qquad(j=1,\cdots,n)\\ -c_j, & \text{当}y_j'<-c_j\end{cases}$$

而定义

$$H_i(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')=\begin{cases}H_i^*(t,\hat{\mathbf{y}},\mathbf{y}')+\dfrac{y_i-\beta_i(t)}{1+y_i^2}, & \text{当}y_i>\beta_i(t)\\ H_i^*(t,\hat{\mathbf{y}},\mathbf{y}'), & \text{当}\alpha_i(t)\leqslant y_i\leqslant\beta_i(t)\\ H_i^*(t,\hat{\mathbf{y}},\mathbf{y}')-\dfrac{\alpha_i(t)-y_i}{1+y_i^2}, & \text{当}y_i<\alpha_i(t)\end{cases}$$

其中$i=1,\cdots,n$，而

$$\hat{y}_j=\begin{cases}\beta_j(t), & \text{当}y_j>\beta_j(t)\\ y_j, & \text{当}\alpha_j(t)\leqslant y_j\leqslant\beta_j(t)\qquad(j=1,\cdots,n)\\ \alpha_j(t), & \text{当}y_j<\alpha_j(t)\end{cases}$$

则称函数$\mathbf{H}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')=(H_1(t,\mathbf{y},\mathbf{y}'),\cdots,H_n(t,\mathbf{y},\mathbf{y}'))$是函数$\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$关于$(\boldsymbol{\alpha}(t),\ \boldsymbol{\beta}(t),\ \mathbf{c})$的变形函数。

变形函数$\mathbf{H}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$显然具有如下性质：

(i)　对所有$j=1,\cdots,n$，有$|\overset{*}{y}'_j|\leqslant c_j$；

(ii)　$\mathbf{H}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$在$[a,b]\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$上连续且有界；

(iii)　如果已知$\alpha_j(t)\leqslant y_j\leqslant\beta_j(t)$，$|y'_j|\leqslant c_j$ $(j=1,\cdots,n)$，则有

$$\mathbf{H}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')=\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$$

定义4　若函数偶$(\boldsymbol{\alpha}(t),\ \boldsymbol{\beta}(t))$满足定义2中的条件(i)—(iii)，而条件(iv)改为如下条件

(iv)′　对满足条件$\mathbf{x}(a)=\mathbf{A}$，$\mathbf{x}(b)=\mathbf{B}$的可微函数$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$，有如下关系成立

$$\alpha''_i\geqslant h_i(t,\hat{\mathbf{x}}_{\alpha i},\ \overset{*}{\mathbf{x}}'_{\alpha i}) \tag{1.4$'$}$$

$$\beta''_i\leqslant h_i(t,\hat{\mathbf{x}}_{\beta i},\ \overset{*}{\mathbf{x}}'_{\beta i}) \tag{1.5$'$}$$

其中

$$\hat{x}_j=\begin{cases}\beta_j(t), & 当x_j(t)>\beta_j(t)\\ x_j(t), & 当\alpha_j(t)\leqslant x_j(t)\leqslant\beta_j(t) \quad (j\neq i)\\ \alpha_j(t), & 当x_j(t)<\alpha_j(t)\end{cases}$$

而

$$\overset{*}{x}'_j=\begin{cases}c_j, & 当x'_j(t)>c_j\\ x'_j(t), & 当|x'_j(t)|\leqslant c_j \quad (j\neq i)\\ -c_j, & 当x'_j(t)<-c_j\end{cases}$$

其中c_j是大于$\max\limits_{[a,b]}\{|\alpha'_j(t)|,|\beta'_j(t)|\}$的某一选定的常数。则称$(\boldsymbol{\alpha}(t),\ \boldsymbol{\beta}(t))$为BVP(1.1)的变形界定函数偶。

定理1　假定

(i)　BVP(1.1)有变形界定函数偶$(\boldsymbol{\alpha}(t),\ \boldsymbol{\beta}(t))$；

(ii)　$\mathbf{H}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$是$\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$关于$(\boldsymbol{\alpha}(t),\boldsymbol{\beta}(t),\mathbf{c})$的变形函数，其中$\mathbf{c}=(c_1,\cdots,c_n)>\max\limits_{[a,b]}\{|\boldsymbol{\alpha}'(t)|,\ |\boldsymbol{\beta}'(t)|\}$，

则变形BVP

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{y}''=\mathbf{H}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')\\&\mathbf{y}(a)=\mathbf{A},\ \ \mathbf{y}(b)=\mathbf{B}\end{aligned}\right\} \tag{1.1$_\mathrm{H}$}$$

有解$\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$，并且满足$\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\mathbf{y}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$，$t\in[a,b]$。

证明　首先，由于$\alpha_i(t)$是$[a,b]$上逐段$C^{(2)}$类函数，因此在分点$\{t^i_j\}$ $(j=1,\cdots,l_i)$处，$|\alpha'_i(t^i_j)|$应理解为$|\alpha'_i(t^i_j)|=\max\{|D_L\alpha_i(t^i_j)|,\ |D_R\alpha_i(t^i_j)|\}$。

因为函数$H=H(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$在$[a,b]\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$上是连续且有界的，根据Scorza-Dragoni存在定理[2]，可知变形BVP$(1.1)_\mathrm{H}$必有解$\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)\in C^2[a,b]$。

下面，我们证明此解满足$\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\mathbf{y}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$ $(t\in[a,b])$。只证明$\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\mathbf{y}(t)$，因为关于$\mathbf{y}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$的证明类同。反证法，设存在一个足码$k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，和一点$t^*\in[a,b]$，使得$\alpha_k(t^*)>y_k(t^*)$。由定义2中的条件(ii)可知$t^*\in(a,b)$。所以函数$\alpha_k(t)-y_k(t)$在某一点$t_0\in(a,b)$处将取正的最大值。若$t_0$不是分点$t^k_j$ $(j=0,\cdots,l_k)$，则有$\alpha'_k(t_0)=y'_k(t_0)$，即$|y'_k(t_0)|<c_k$，于是

$$\begin{aligned}\alpha''_k(t_0)-y''_k(t_0)&\geqslant h_k(t_0,\hat{\mathbf{y}}_{\alpha k}(t_0),\ \overset{*}{\mathbf{y}}'_{\alpha k}(t_0))-H_k(t_0,\mathbf{y}(t_0),\ \mathbf{y}'(t_0))\\&=h_k(t_0,\hat{\mathbf{y}}_{\alpha k}(t_0),\overset{*}{\mathbf{y}}'_{\alpha k}(t_0))-\left[H^*_k(t_0,\hat{\mathbf{y}}(t_0),\ \mathbf{y}'(t_0))-\frac{\alpha_k(t_0)-y_k(t_0)}{1+y_k^2(t_0)}\right]\end{aligned}$$

$$=h_k(t_0,\hat{\mathbf{y}}_{\alpha k}(t_0),\overset{*}{\mathbf{y}}'_{\alpha k}(t_0))-h_k(t_0,\hat{\mathbf{y}}(t_0),\overset{*}{\mathbf{y}}'(t_0))+\frac{\alpha_k(t_0)-y_k(t_0)}{1+y_k^2(t_0)}$$

$$=h_k(t_0,\hat{\mathbf{y}}_{\alpha k}(t_0),\overset{*}{\mathbf{y}}'_{\alpha k}(t_0))-h_k(t_0,\hat{\mathbf{y}}_{\alpha k}(t_0),\mathbf{y}'_{\alpha k}(t_0))+\frac{\alpha_k(t_0)-y_k(t_0)}{1+y_k^2(t_0)}$$

$$=\frac{\alpha_k(t_0)-y_k(t_0)}{1+y_k^2(t_0)}>0$$

所以我们有$\alpha''_k(t_0)-y''_k(t_0)>0$。这就与$\alpha_k(t)-y_k(t)$在$t=t_0$处为最大相矛盾。

再假定$t_0=t_k^i$是分点。此时，则因为$\alpha_k(t)-y_k(t)$在$t_0=t_k^i$处为正的最大值，故有

$$D_L(\alpha_k(t_0)-y_k(t_0))\geqslant 0,\ D_R(\alpha_k(t_0)-y_k(t_0))\leqslant 0$$

即$D_L\alpha(t_0)\geqslant D_Ly_k(t_0)=y'_k(t_0)$，$D_R\alpha_k(t_0)\leqslant D_Ry_k(t_0)=y'_k(t_0)$。

但由定理 1 中的条件(i)有

$$D_L\alpha_k(t_0)\leqslant D_R\alpha_k(t_0)$$

于是可推得$D_L\alpha_k(t_0)=D_R\alpha_k(t_0)=\alpha'_k(t_0)$，从而$\alpha'_k(t_0)=y'_k(t_0)$。

再利用条件(1.4)′（考察左导数）可有

$$D_L\alpha'_k(t_0)-D_Ly'_k(t_0)\geqslant h(t_0,\hat{\mathbf{y}}_{\alpha k}(t_0),\overset{*}{\mathbf{y}}'_{\alpha k}(t_0))-H_k(t_0,\mathbf{y}(t_0),\mathbf{y}'(t_0))$$

$$=h_k(t_0,\hat{\mathbf{y}}_{\alpha k}(t_0),\overset{*}{\mathbf{y}}'_{\alpha k}(t_0))-\left[H_k^*(t_0,\hat{\mathbf{y}}(t_0),\mathbf{y}'(t_0))-\frac{\alpha_k(t_0)-y_k(t_0)}{1+y_k^2(t_0)}\right]$$

$$=h_k(t_0,\hat{\mathbf{y}}_{\alpha k}(t_0),\overset{*}{\mathbf{y}}'_{\alpha k}(t_0))-h_k(t_0),\hat{\mathbf{y}}_{\alpha k}(t_0),\overset{*}{\mathbf{y}}'_{\alpha k}(t_0))+\frac{\alpha_k(t_0)-y_k(T)}{1+y_k^2(t_0)}$$

$$=\frac{\alpha_k(t_0)-y_k(t_0)}{1+y_k^2(t_0)}>0$$

所以我们有$D_L\alpha'_k(t_0)-D_Ly'_k(t_0)>0$，但$\alpha_k(t_0)-y_k(t_0)$为最大的必要条件是 $D_L\alpha'_k(t_0)-D_Ly'_k(t_0)\leqslant 0$，故推出矛盾。

于是，我们就证明了$(1.1)_H$ 的解 $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$满足不等式 $\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\mathbf{y}(t)$。用同样方法可以证明此解亦满足不等式$\mathbf{y}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$，$t\in[a,b]$。定理1 得证。

定理 1 的条件保证了变形BVP$(1.1)_H$有解 $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$，并且此解满足性质

$$\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\mathbf{y}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)\qquad(t\in[a,b])$$

因此，$(1.1)_H$的解$\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$亦是边值问题

$$\mathbf{y}''=\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\overset{*}{\mathbf{y}}')$$
$$\mathbf{y}(a)=\mathbf{A},\mathbf{y}(b)=\mathbf{B}$$

的解。为要进一步证明解$\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$亦是原 BVP(1.1)的解，就需要再证明$\overset{*}{\mathbf{y}}'(t)=\mathbf{y}'(t)$。换句话说，就必须证明 $|\mathbf{y}'(t)|\leqslant\mathbf{c}$ $t\in[a,b]$。我们将看到，按分量满足 Nagumo 条件正是保证$|y'(t)|\leqslant\mathbf{c}$的。

定理2 若函数$\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$在 $[a,b]$上关于$(\boldsymbol{\alpha}(t),\boldsymbol{\beta}(t),\boldsymbol{\varphi}(t))$按分量满足 Nagumo 条件，则存在常向量 $\mathbf{c}=(c_1,\cdots,c_n)>0$，使得 BVP(1.1)的任意满足$\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\mathbf{y}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$ 的 $C^{(2)}$类解$\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$ $t\in[a,b]$，都满足$|\mathbf{y}'(t)|\leqslant\mathbf{c}$，$t\in[a,b]$。

证 证明方法类似于[3]中的方法。因 $\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$ 关于 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varphi})$按分量满足 Nagumo 条件，故有

$$\int_{\lambda_i}^{\infty}\frac{sds}{\varphi_i(s)}>\max_{[a,b]}\beta_i(t)-\min_{[a,b]}\alpha_i(t)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

其中 $\lambda_i=\frac{1}{b-a}\max\{|\alpha_i(a)-\beta_i(b)|,\ |\alpha_i(b)-\beta_i(a)|\}$。因此必存在常向量 $\mathbf{c}=(c_1,\cdots,c_n)>\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)>0$，使得

$$\int_{\lambda_i}^{c_i}\frac{sds}{\varphi_i(s)}>\max_{[a,b]}\beta_i(t)-\min_{[a,b]}\alpha_i(t), \tag{1.6}$$

如果定理 2 不成立，即 $|y'(t)|\nleq\mathbf{c}$。于是存在一个足码 k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 和一点 $t^*\in(a,b)$，使得 $|y_k'(t^*)|>c_k$。对此足码 k，我们考察BVP(1.1)的满足 $\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\mathbf{y}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$ 的解 $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$，取其第 k 个分量 $y_k(t)$，并利用中值定理便有 $(b-a)y_k'(\xi)=y_k(b)-y_k(a)$，其中 $\xi\in(a,b)$。再由(1.6)可得 $y_k'(\xi)\leqslant\lambda_k<c_k$。于是存在一个子区间 $[a,d]\subset[a,b]$，使得在此区间上有下列四种情况之一成立：

情况1 $y_k'(c)=\lambda_k$，$y_k'(d)=c_k$，$\lambda_k<y_k'(t)<c_k$，$t\in(c,d)$

情况2 $y_k'(c)=c_k$，$y_k'(d)=\lambda_k$，$\lambda_k<y_k'(t)<c_k$，$t\in(c,d)$

情况3 $y_k'(c)=-\lambda_k$，$y_k'(d)=-c_k$，$-c_k<y_k'(t)<-\lambda_k$，$t\in(c,d)$

情况4 $y_k'(c)=-c_k$，$y_k'(d)=-\lambda_k$，$-c_k<y_k'(t)<-\lambda_k$，$t\in(c,d)$

先就情况1进行分析，在 $[c,d]$ 上应有

$$|y_k''(t)|y_k'(t)=|h_k(t,\mathbf{y}(t),\mathbf{y}'(t))|y_k'(t)\leqslant\varphi_k(|y_k'(t)|)y_k'(t)$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\int_c^d\frac{y_k''(t)y_k'(t)dt}{\varphi_k(|y_k'(t)|)}\right|&\leqslant\int_c^d\frac{|y_k''(t)|y_k'(t)}{\varphi_k(|y_k'(t)|)}dt\leqslant\int_c^d y_k'(t)dt\\&=y_k(d)-y_k(c)\leqslant\beta_k(d)-\alpha_k(c)\\&\leqslant\max_{[a,b]}\beta_k(t)-\min_{[a,b]}\alpha_k(t).\end{aligned}\tag{1.7}$$

但另一方面，若令 $s=y_k'(t)$，并利用关系(1.6)，便有

$$\begin{aligned}\left|\int_c^d\frac{y_k''(t)y_k'(t)dt}{\varphi_k(|y_k'(t)|)}\right|&=\left|\int_{y_k'(c)}^{y_k'(d)}\frac{sds}{\varphi_k(s)}\right|=\int_{\lambda_k}^{c_k}\frac{sds}{\varphi_k(s)}\\&>\max_{[a,b]}\beta_k(t)-\min_{[a,b]}\alpha_k(t)\end{aligned}\tag{1.8}$$

显然(1.7)与(1.8)是矛盾的，故知对情况1，定理2成立。同理，对情况2～4亦可证明 $|y'(t)|\leqslant c$，$t\in[a,b]$。

定理3 如果

(i) BVP(1.1)存在逐段 $C^{(2)}$ 类界定函数偶 $(\boldsymbol{\alpha}(t),\ \boldsymbol{\beta}(t))$，$t\in[a,b]$；

(ii) 函数 $\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$ 在 $[a,b]$ 上关于 $(\boldsymbol{\alpha}(t),\boldsymbol{\beta}(t),\boldsymbol{\varphi}(t))$ 按分量满足 Nagumo 条件，则BVP(1.1)有满足性质 $\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\mathbf{y}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$ 的解 $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$，$t\in[a,b]$。

证 因 $\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$ 按分量满足Nagumo条件，则由定理2可确定出一个常向量 $\mathbf{c}=(c_1,\cdots,c_n)>\mathbf{0}$。选取常向量 $\mathbf{N}=(N_1,\cdots,N_n)$，使之

$$N_i\geqslant\max\{c_i,\max_{[a,b]}|\alpha_i'(t)|,\ \max_{[a,b]}|\beta_i'(t)|\}$$

在分点 $\{t_i^j\}$ $(j=0,\cdots,l_j)$ 处，$|\alpha_i'(t_i^j)|=\max\{|D_L\alpha_i(t_i^j)|,\ |D_R\alpha_i(t_i^j)|\}$（对 $|\beta_i'(t_i^j)|$ 类同）。

现利用 $\boldsymbol{\alpha}(t)$，$\boldsymbol{\beta}(t)$，$\mathbf{N}$ 构造 $\mathbf{H}=\mathbf{H}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$ 为 $\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$ 关于 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{N})$ 的变形函数。则由定理1可知变形BVP

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{y}''=\mathbf{H}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')\\ \mathbf{y}(a)=\mathbf{A},\mathbf{y}(b)=\mathbf{B}\end{array}\right\} \qquad (1.1)_{\mathrm{H}}$$

存在满足条件$\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\mathbf{y}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$的解$\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$，$t\in[a,b]$。再根据变形函数$\mathbf{H}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$的构造，易知$(1.1)_{\mathrm{H}}$的解也是BVP

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{y}''=\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\overset{*}{\mathbf{y}}{}')\\ \mathbf{y}(a)=\mathbf{A},\mathbf{y}(b)=\mathbf{B}\end{array}\right\} \qquad (1.1)_{*}$$

的解。

下面我们来证明BVP$(1.1)_*$中的$\overset{*}{\mathbf{y}}{}'$可以用$\mathbf{y}'$来代替。这样也就证明了变形BVP$(1.1)_{\mathrm{H}}$的解$\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$即是原BVP(1.1)的解。首先，因$\mathbf{H}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$是$\mathbf{h}(t,\mathbf{y},\mathbf{y}')$关于$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{N})$的变形，故由$\overset{*}{y}{}_i'$及$N_i$的定义，可知$|\overset{*}{\mathbf{y}}{}'(t)|\leqslant\mathbf{N}$。余下来须证明$|\mathbf{y}'(t)|\leqslant\mathbf{N}$。若不然，即假定$|\mathbf{y}'(t)|\not\leqslant\mathbf{N}$，那末，必有一个足码$k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$与一点$t^*\in(a,b)$，使得$|y_k'(t^*)|>N_k$。对此足码$k$，类似定理2的证明方法，可分别就四种情况加以证明，从而有$|\mathbf{y}'(t)|\leqslant\mathbf{N}$，$t\in[a,b]$。并且

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(t,\mathbf{y}(t),\mathbf{y}'(t))&=\mathbf{H}^*(t,\mathbf{y}(t),\mathbf{y}'(t))=\mathbf{h}(t,\mathbf{y}(t),\overset{*}{\mathbf{y}}{}'(t))\\&=\mathbf{h}(t,\mathbf{y}(t),\mathbf{y}'(t)) \qquad (t\in[a,b])\end{aligned}$$

即变形BVP$(1.1)_{\mathrm{H}}$的满足条件 $\boldsymbol{\alpha}(t)\leqslant\mathbf{y}(t)\leqslant\boldsymbol{\beta}(t)$的解 $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$实际上也是原BVP(1.1)的解。定理 3 得证。

容易看出，如果界定函数偶$(\boldsymbol{\alpha}(t),\boldsymbol{\beta}(t))$在$[a,b]$上是$C^{(2)}$类的，那末定义2中的条件(iii)就自动满足。还应当指出，在上述定理的证明中，所采用的变形函数以及变形BVP的思想和方法已出现在[3]，[4]，[5]，[6]和[7]中。

二、边界层现象

现在我们利用上述微分不等式理论，研究拟线性奇摄动系统

$$\left.\begin{array}{ll}\varepsilon\mathbf{y}''=F(t,\mathbf{y})\mathbf{y}'+\mathbf{g}(t,\mathbf{y}) & (a\leqslant t\leqslant b)\\ \mathbf{y}(a,\varepsilon)=\mathbf{A},\ \mathbf{y}(b,\varepsilon)=\mathbf{B} & \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{DP})_{\mathrm{q}}$$

解的存在条件以及当$\varepsilon\to0^+$时，该解的渐近性质。我们假定$(\mathrm{DP})_{\mathrm{q}}$是弱耦合系统，即假定矩阵$F(t,\mathbf{y})=\mathrm{Diag}\{f_1(t,\mathbf{y}),\cdots,f_n(t,\mathbf{y})\}$是对角矩阵。于是$(\mathrm{DP})_{\mathrm{q}}$可写为如下分量形式

$$\left.\begin{array}{ll}\varepsilon y_i''=f_i(t,\mathbf{y})y_i'+g_i(t,\mathbf{y}) & (t\in[a,b])\\ y_i(a,\varepsilon)=A_i,y_i(b,\varepsilon)=B_i & (i=1,\cdots,n)\end{array}\right\} \qquad (\mathrm{DP})_{\mathrm{q}}$$

根据转向点理论，经典的边值问题理论引导们研究下列“Hybeid”退化问题

$$\left.\begin{array}{ll}0=f_i(t,\mathbf{y})y_i'+g_i(t,\mathbf{y}) & (a<t<b)\\ y_i(a)=A_i & (i=1,\cdots,k)\\ y_i(b)=B_i & (i=k+1,\cdots,n)\end{array}\right\} \qquad (\mathrm{R})$$

我们的基本假定是(R)有$C^{(2)}$类解$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$，并且此解是强退化解，即$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$对一切$(t,\mathbf{y}_{ui})$满足

$$0=f_i(t,\mathbf{y}_{ui})u_i'+g_i(t,\mathbf{y}_{ui})$$

其中$y_j\in D_j$ $(j\neq i)$，而$D_j=\{y_j:|y_j(t)-u_j(t)|\leqslant d_j\}$，这里$d_j$是一光滑正函数：

$$d_j(t)=\begin{cases}\begin{Bmatrix}\delta & \text{当}a\leqslant t\leqslant b-\delta\\ |B_i-u_j(b)|+\delta, & \text{当}b-\dfrac{\delta}{2}\leqslant t\leqslant b\end{Bmatrix}, & \text{当}j=1,\cdots,k\\ \begin{Bmatrix}|A_j-u_j(a)|+\delta, & \text{当}a\leqslant t\leqslant a+\dfrac{\delta}{2}\\ \delta & \text{当}a+\delta\leqslant t\leqslant b\end{Bmatrix}, & \text{当}j=k+1,\cdots,n\end{cases}$$

式中$\delta>0$是小常数。

在如下关于解$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$的稳定性定义中，我们假定函数$f_i(t,\mathbf{y})$和$g_i(t,\mathbf{y})$具有关于$y_i\in D_i$所提到阶数的连续偏导数，而$q\geqslant 0$，$n\geqslant 2$均为整数。

定义5 退化问题(R)的强退化解$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$称为在$[a,b]$内是按分量I_q-稳定的，如果存在n个正常数$m_1,\cdots,m_n$，使得

$$\text{(i)}\quad \frac{\partial^j f_i(t,\mathbf{y}_{ui})}{\partial y_i^j}u_i'(t)+\frac{\partial^j g_i(t,\mathbf{y}_{ui})}{\partial y_i^j}=0\qquad\begin{pmatrix}0\leqslant j\leqslant 2q,\ i=1,\cdots,n\\ (t,y_j)\in[a,b]\times D_j,\ j\neq i\end{pmatrix}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{\partial^{2q+1} f_i(t,\mathbf{y})}{\partial y_i^{2q+1}}u_i'(t)+\frac{\partial^{2q+1} g_i(t,\mathbf{y})}{\partial y_i^{2q+1}}\geqslant m_i>0\qquad\begin{pmatrix}i=1,\cdots,n\\ (t,\mathbf{y})\in[a,b]\times\prod_{i=1}^n D_i\end{pmatrix}$$

定义6 退化解$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$称为按分量弱稳定的，如果对所有$(t,\mathbf{y})\in[a,b]\times\prod_{j=1}^n D_i$有

$$f_i(t,\mathbf{y})\geqslant 0,\ (i=1,\cdots,k)$$

而

$$f_i(t,\mathbf{y})\leqslant 0,\ (i=k+1,\cdots,n)$$

定理4 如果退化问题(R)有一个$C^{(2)}$类的按分量I_q-稳定解$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$，并且是按分量弱稳定的，则存在一个$\epsilon_0>0$，使得对于$0<\epsilon\leqslant\epsilon_0$，边值问题$(\mathrm{DP})_q$有一个解$\mathbf{y}=\mathbf{y}(t,\varepsilon)=(y_1(t,\epsilon),\cdots,y_n(t,\epsilon))$，满足

$$|y_i(t,\epsilon)-u_i(t)|\leqslant W_R^i(t,\epsilon)+\Gamma_i(\epsilon)\qquad(i=1,\cdots,k)$$

$$|y_i(t,\epsilon)-u_i(t)|\leqslant W_L^i(t,\epsilon)+\Gamma_i(\epsilon)\qquad(i=k+1,\cdots,n)$$

其中

$$W_R^i(t,\epsilon)=\begin{cases}|B_i-u_i(b)|\exp[-(m_i\epsilon^{-1})^{\frac{1}{2}}(b-t)] & (\text{当}\ q=0)\\ |B_i-u_i(b)|\ [1+\sigma_i|B_i-u_i(b)|^q\epsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)]^{-\frac{1}{q}} & (\text{当}q\geqslant 1)\end{cases}$$

$$W_L^i(t,\epsilon)=\begin{cases}|A_i-u_i(a)|\exp[-(m_i\epsilon^{-1})^{\frac{1}{2}}(t-a)] & \text{当}\ (q=0)\\ |A_i-u_i(a)|[1+\sigma_i|A_i-u_i(a)|^q\epsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)]^{-\frac{1}{q}} & (\text{当}q\geqslant 1)\end{cases}$$

$$\Gamma_i(\varepsilon)=\left(\frac{\epsilon\gamma_i}{m_i}\right)^{1/(2q+1)},\quad \sigma_i=m_i^{\frac{1}{2}}q\,[(q+1)(2q+1)!]^{-\frac{1}{2}}\qquad(i=1,\cdots,n)$$

其中$\gamma_i>M_i(2q+1)!$是选定的常数，而$M_i=\max|u_i''(t)|$。显然$\Gamma_i(\epsilon)>0$。

证 由按分量I_q-稳定的假定，可知$f_i(t,\mathbf{y})u_i'(t)+g_i(t,\mathbf{y})\sim\dfrac{m_i}{(2q+1)!}y_i^{2q+1}$，从而自然引导我们研究微分方程

$$\epsilon W_i''=\frac{m_i}{(2q+1)!}W_i^{2q+1}\tag{2.1}$$

事实上，易知函数$W_L^i(t,\epsilon)$是非负的，而且就是方程(2.1)的满足始值条件

$$W_L^i(a,\epsilon)=|A_i-u_i(a)|,\ W_L^{i\prime}(a,\epsilon)=-\left(\frac{m_i}{\epsilon(q+1)(2q+1)!}\right)^{\frac{1}{2}}|A_i-u_i(a)|^{q+1}$$

的解．它向右递减．类似地，函数$W_R^i(t,\epsilon)\geqslant 0$是方程(2.1)的满足始值条件

$$W_R^i(b,\epsilon)=|B_i-u_i(b)|,\ W_R^{i\prime}(b,\epsilon)=\left(\frac{m_i}{\epsilon(q+1)(2q+1)!}\right)^{\frac{1}{2}}|B_i-u_i(b)|^{q+1}$$

的解，它向左递减．

我们对$t\in[a,b]$和$\epsilon>0$，定义界定函数

$$\alpha_i(t,\epsilon)=\begin{cases}u_i(t)-W_R^i(t,\epsilon)-\Gamma_i(\epsilon) & (i=1,\cdots,k)\\ u_i(t)-W_L^i(t,\epsilon)-\Gamma_i(\epsilon) & (i=k+1,\cdots,n)\end{cases}$$

$$\beta_i(t,\epsilon)=\begin{cases}u_i(t)+W_R^i(t,\epsilon)+\Gamma_i(\epsilon) & (i=1,\cdots,k)\\ u_i(t)+W_L^i(t,\epsilon)+\Gamma_i(\epsilon) & (i=k+1,\cdots,n)\end{cases}$$

容易看出$\alpha_i,\beta_i\in C^{(2)}[a,b]$．通过直接验算容易证明$\alpha_i(t,\epsilon)\leqslant\beta_i(t,\epsilon)$，$\alpha_i(a,\epsilon)\leqslant A_i\leqslant\beta_i(a,\epsilon)$，$\alpha_i(b,\epsilon)\leqslant B_i\leqslant\beta_i(b,\epsilon)$．下面我们验证$\alpha_i''\geqslant\frac{1}{\epsilon}[f_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})\alpha_i'+g_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})]$和$\beta_i''\leqslant\frac{1}{\epsilon}[f_i(t,\mathbf{y}_{\beta i})\beta_i'+g_i(t,\mathbf{y}_{\beta i})]$ $(t\in(a,b),\ i=1,\cdots,n)$ 我们仅对$i=1,\cdots,k$验证，对$i=k+1,\cdots,n$的验证完全类同．对α_i $(i=1,\cdots,k)$我们有

$$\begin{aligned}
&\epsilon\alpha_i''-f_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})\alpha_i'-g_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})\\
&\quad=\epsilon[u_i''-W_R^{i\prime\prime}]-f_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})[u_i'-W_R^{i\prime}]-g_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})\\
&\quad=\epsilon u_i''-\epsilon W_R^{i\prime\prime}-[f_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})-f_i(t,\mathbf{y}_{ui})]u_i'\\
&\qquad-[g_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})-g_i(t,\mathbf{y}_{ui})]+f_i(t,y_{\alpha i})W_R^{i\prime}\\
&\quad=\epsilon u_i''-\epsilon W_R^{i\prime\prime}-\sum_{j=0}^{2q}\frac{1}{j!}\left[\frac{\partial^j f_i(t,\mathbf{y}_{ui})}{\partial y_i^j}u_i'+\frac{\partial^j g_i(t,\mathbf{y}_{ui})}{\partial y_i^j}\right](\alpha_i-u_i)^j\\
&\qquad-\frac{1}{(2q+1)!}\left[\frac{\partial^{2q+1}f_i(t,\mathbf{y}^*)}{2y_i^{2q+1}}u_i'+\frac{\partial^{2q+1}g_i(t,\mathbf{y}^*)}{\partial y_i^{2q+1}}\right](\alpha_i-u_i)^{2q+1}+f_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})W_R^{i\prime}\\
&\quad=\epsilon u_i''-\epsilon W_R^{i\prime\prime}+\frac{1}{(2q+1)!}\left[\frac{\partial^{2q+1}f_i(t,\mathbf{y}^*)}{\partial y_i^{2q+1}}u_i'\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial^{2q+1}g_i(t,\mathbf{y}^*)}{\partial y_i^{2q+1}}\right](u_i-\alpha_i)^{2q+1}+f_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})W_R^{i\prime}
\end{aligned}$$

式中$(t,\mathbf{y}^*)$是$(t,\mathbf{y}_{\alpha i})$和$(t,\mathbf{y}_{ui})$之间的某一点．对于充分小的$\epsilon$（譬如$0<\epsilon\leqslant\epsilon_0$），这类点位于$[a,b]\times\prod_{i=1}^n D_i$内．因为$W_R^i$，$W_R^{i\prime}$，$\Gamma_i$均为正，故有

$$(W_R^i+\Gamma_i)^{2q+1}\geqslant(W_R^i)^{2q+1}+\Gamma_i^{2q+1},\quad f_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})W_R^{i\prime}\geqslant 0$$

从而

$$\begin{aligned}
\epsilon\alpha_i''-f_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})\alpha_i'-g_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})&\geqslant-\epsilon|u_i''|+\frac{m_i}{(2q+1)!}\Gamma_i^{2q+1}\\
&\geqslant\frac{m_i}{(2q+1)!}\left(\frac{\epsilon\gamma_i}{m_i}\right)-\epsilon M_i
\end{aligned}$$

根据$\gamma_i>M_i(2q+1)!$，所以$\epsilon\alpha_i''\geqslant f_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})\alpha_i'+g_i(t,\mathbf{y}_{\alpha i})$．

类似地，分别对$i=1,\cdots,k$，$i=k+1,\cdots,n$，可以对β_i加以验证。

于是α和β满足定理 3 的条件，故定理 4 得证。

定义7 (R)的退化解$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$称为在$[a,b]$上是按分量II_n-稳定的，如果$\mathbf{u}(a)\leqslant\mathbf{A}$，$\mathbf{u}(b)\leqslant\mathbf{B}$，且存在$n$个正常数$m_1,\cdots,m_n$，使得

$$\text{(i)}\quad \frac{\partial^j f_i(t,\mathbf{y}_{ui})}{\partial y_i^j}u_i'(t)+\frac{\partial^j g_i(t,\mathbf{y}_{ui})}{\partial y_i^j}\geqslant 0,\quad \begin{pmatrix}1\leqslant j\leqslant n-1,\ i=1,\cdots,n\\ (t,y_i)\in[a,b]\times\tilde{D}_i,\ j\neq i\end{pmatrix}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{\partial^n(f_i(t,\mathbf{y})}{\partial y_i^n}u_i'(t)+\frac{\partial^n g_i(t,\mathbf{y})}{\partial y_i^n}\geqslant m_i>0,\quad \begin{pmatrix}i=1,\cdots,n\\ (t,\mathbf{y})\in[a,b]\times\prod_{i=1}^{n}\tilde{D}_i\end{pmatrix}$$

其中 $\tilde{D}_i=\{y_i:0\leqslant y_i-u_i(t)\leqslant d_i(t)\}$，$t\in[a,b]$。

定理5 假设退化问题(R)有一个按分量弱稳定解$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$，$t\in[a,b]$，它是$C^{(2)}$类按分量II_n-稳定的，且$u''(t)\geqslant 0$，$t\in(a,b)$，则存在$\epsilon_0>0$，使得对于$0<\epsilon\leqslant\epsilon_0$，边值问题$(\mathrm{DP})_q$有一个解$\mathbf{y}=\mathbf{y}(t,\epsilon)=(y_1(t,\epsilon),\cdots,y_n(t,\epsilon))$满足

$$0\leqslant y_i(t,\epsilon)-u_i(t)\leqslant W_R^i(t,\epsilon)+\Gamma_i(\epsilon)\qquad(i=1,\cdots,k)$$

$$0\leqslant y_i(t,\epsilon)-u_i(t)\leqslant W_L^i(t,\epsilon)+\Gamma_i(\epsilon)\qquad(i=k+1,\cdots,n)$$

这里

$$W_R^i(t,\epsilon)=[B_i-u_i(b)]\{1+\sigma_i[B_i-u_i(b)]^{(n-1)/2}\epsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)\}^{-2/(n-1)}$$

$$W_L^i(t,\epsilon)=[A_i-u_i(a)]\ \{1+\sigma_i[A_i-u_i(a)]^{(n-1)/2}\epsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)\}^{-2/(n-1)}$$

$$\Gamma_i(\epsilon)=\left(\frac{\epsilon\gamma_i}{m_i}\right)^{\frac{1}{n}},\quad \sigma_i=(n-1)\left(\frac{m_i}{2(n+1)!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中$\gamma_i>M_i n!$是取定的常数。而$M_i=\max\limits_{[a,b]}|u_i''(t)|$。

证 我们仅对$i=1,\cdots,k$证明本定理。对$i=k+1,\cdots,n$类同。首先我们定义

$$\alpha_i(t,\epsilon)=u_i(t)\qquad(i=1,\cdots,k)$$

$$\beta_i(t,\epsilon)=u_i+W_R^i(t,\epsilon)+\Gamma_i(\epsilon)\qquad(i=1,\cdots,k)$$

然后，按定理 4 的证明方法即可证得本定理。

参 考 文 献

[1] Lin Zong-chi, Boundary and angular layer behavior in singular perturbed quasi-linear systems, *Applied Mathematics and Mechanics*, 7, 5 (1986), 401—409.

[2] Scorza-Dragoni, Sur problema dei valori ai limiti per i systemi di equazioni differenziali del second ordine, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 14 (1935), 224—230.

[3] Jackson, L. K., Subfunctions and second-order ordinary differential inequalities, *Adv. in Math.*, 2 (1968), 308—363.

[4] Schrader, K. W., Existence theorems for second order boundary value problems, *J. Differential Eqs.*, 5 (1969), 572—584.

[5] Schmitt, Klaus, A nonlinear boundary value problem, *J. Differential Eqs.*, 7 (1970), 527—537.

[6] Heidel, J. W., A second-order nonlinear boundary value problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 48 (1974), 493—503.

[7] O'Donnell, M. A., Boundary and interior layer behavior in singularly perturbed system of boundary value problems, Doctoral Diss., U.C. Davis (1983).

On Singularly Perturbed Quasilinear Systems

Liu Guang-xu

(*Nankai University, Tianjin*)

Abstract

In this paper, the objective is to give sufficient conditions for the existence of solution of the nonlinear two-point boundary value problem (1.1). And we employ these results to consider the boundary layer phenomena of the quasilinear weakly coupled singularly perturbed system(DP)$_q$.