应用数学和力学，第8卷第11期（1987年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

微极弹性动力学中非保守力场问题的变分方法*

戴天民　扶名福　林钟祥　杨德品
（辽宁大学）（浙江大学）（浙江大学）（江西工业大学）

摘　要

本文利用卷和卷的交换性质给出并证明了微极弹性动力学中非保守力场问题的几种拟变分原理。本文结果还可以推广到非局部弹性介质和非局部微极弹性介质力学中去。

一、前　言

变分方法在许多数学物理问题中发挥了极其重要的作用，它在理论上和实用上的重要价值是众所周知的。在连续介质力学中，变分法的研究及其应用都得到了比较完善的发展[1][2][3][4][5]。

自胡海昌教授[6]等建立广义变分原理以来，不管在古典弹性介质力学中还是在现代连续统力学中，各种变分原理相继出现。由于篇幅所限，不能一一列举。这方面的资料可参考[7]所列。

对弹性力学中非保守力场问题的变分原理 Leipholz[8] 和刘殿魁[9] 等进行了不少研究工作。然而，对于微极弹性介质力学中非保守力场问题的变分原理尚未见报。由此，本文利用卷及卷的交换特性给出和证明了微极弹性动力学中非保守力场问题的一般的拟变分原理。而且本文结果可以推广到非局部弹性介质和非局部微极弹性介质力学中去。

二、基本方程、初始条件和边界条件

根据[10]，我们首先列出微极弹性动力学的基本方程、初始条件和边界条件。

应变位移关系

$$\left.\begin{aligned} e_{ij}&=u_{j,i}-\epsilon_{ijk}\phi_k \\ r_{ij}&=\phi_{j,i} \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

将式(2.1)简写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla\cdot\mathbf{d}-\boldsymbol{\varepsilon}^{*}:\mathbf{Rd} \tag{2.2}$$

其中

* 1986年9月29日收到.

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix} e_{ij} \\ r_{ij} \end{Bmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{Bmatrix} u_j \\ \phi_j \end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}^*=\begin{bmatrix} \epsilon_{ijk} & 0 \\ 0 & \epsilon_{ijk} \end{bmatrix},\quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

本构关系

$$\left.\begin{aligned} t_{ij}&=A_{ijmn}e_{mn}+B_{ijmn}\phi_{m,n} \\ m_{ij}&=C_{mnji}e_{mn}+B_{jimn}\phi_{m,n} \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

式(2.3)可以简写为

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.4}$$

对于微极线性各向同性固体

$$\begin{aligned} A_{ijmn}&=\lambda g_{ij}g_{mn}+(\mu+\kappa)g_{im}g_{in}+\mu g_{in}g_{im} \\ C_{ijmn}&=0 \\ B_{ijmn}&=\alpha g_{ij}g_{mn}+\beta g_{in}g_{im}+\gamma g_{im}g_{jn} \end{aligned}$$

式(2.4)的逆形式可以写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{H}:\boldsymbol{\sigma} \tag{2.5}$$

运动方程组

$$\left.\begin{aligned} &t_{ij,j}+\rho f_i=\rho\ddot{u}_i \\ &m_{ij,j}+\epsilon_{ijk}t_{jk}+\rho l_i=J_{ij}\ddot{\phi}_j \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

式(2.6)可以简写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\varepsilon}:{}^*\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{F}=\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} \tag{2.7}$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix} t_{ij} \\ m_{ij} \end{Bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{Bmatrix} \rho f_i \\ \rho l_i \end{Bmatrix},\quad \mathbf{M}=\begin{bmatrix} \rho\delta_{ij} & 0 \\ 0 & J_{ij} \end{bmatrix}$$

在以上各式中各符号的意义分别为：

u_i：位移向量分量；

ϕ_i：微转动向量分量；

e_{ij}：应变张量分量；

r_{ij}：微应变张量分量；

t_{ij}：应力张量分量；

m_{ij}：力偶应力张量分量；

f_i：物体体力密度；

l_i：物体力偶密度；

ρ：质量密度；

A_{ijmn}，J_{ij}等：物质特征常数；

ϵ_{ijk}：转换张量．

在本文中，

F为伴生体力力场，即非保守力力场．

初始条件

$$\left.\begin{aligned} u_i(x,0)&=u_i^0 \\ \phi_i(x,0)&=\phi_i^0 \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

或

$$\mathbf{d}(\mathbf{x},0)=\mathbf{d}^0 \qquad (\mathbf{x}\in V,\ t=0) \tag{2.9}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}_i(x,0)=v_i^0\\ \dot{\phi}_i(x,0)=\nu_i^0\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

或

$$\dot{\mathbf{d}}(\mathbf{x},0)=\mathbf{d}^0 \qquad (\mathbf{x}\in V,\ t=0) \tag{2.11}$$

边界条件

在$S_1\times T(0,\infty)$上

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) \tag{2.12}$$

在$S_2\times T(0,\infty)$上

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},t)=\bar{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{x},t) \tag{2.13}$$

在$S_3\times T(0,\infty)$上

$$\mathbf{T}_{(n)}(\mathbf{x},t)=\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x},t) \tag{2.14}$$

或

$$t_{ij}n_i=\bar{T}_j \tag{2.14$'$}$$

在$S_4\times T(0,\infty)$上

$$\mathbf{m}_{(n)}(\mathbf{x},t)=\bar{\mathbf{m}}(\mathbf{x},t) \tag{2.15}$$

或

$$m_{ij}n_i=\bar{m}_j \tag{2.15$'$}$$

其中　$S_1+S_3=S_2+S_4=S$

为方便起见，我们将边界条件写为如下形式：

在$S_1\times T(0,\infty)$和$S_2\times T(0,\infty)$上

$$\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}=\bar{\mathbf{d}}_1+\bar{\mathbf{d}}_2=\begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{u}}\\ \bar{\boldsymbol{\phi}}\end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

在$S_3\times T(0,\infty)$和$S_4\times T(0,\infty)$上

$$\mathbf{t}=\bar{\mathbf{t}}=\bar{\mathbf{t}}_1+\bar{\mathbf{t}}_2=\begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{T}}\\ \bar{\mathbf{m}}\end{Bmatrix} \tag{2.17}$$

其中　$\bar{\mathbf{t}}_1$，$\bar{\mathbf{t}}_2$为伴生表面力场．

$$\bar{\mathbf{d}}_1=\begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{u}}\\ 0\end{Bmatrix},\quad d_2=\begin{Bmatrix}0\\ \bar{\boldsymbol{\phi}}\end{Bmatrix},\quad \bar{\mathbf{t}}_1=\begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{T}}\\ 0\end{Bmatrix},\quad \bar{\mathbf{t}}_2=\begin{Bmatrix}0\\ \bar{\mathbf{m}}\end{Bmatrix}$$

三、卷的某些性质及结果

为了方便问题的研究，我们在这里不加证明地列出卷的某些性质及其有用的结果．

交换性质：$\mathbf{u}*\mathbf{v}=\mathbf{v}*\mathbf{u}$

结合性质：$\mathbf{u}*(\mathbf{v}*\mathbf{w})=(\mathbf{u}*\mathbf{v})*\mathbf{w}$

分配性质：$\mathbf{u}*(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}*\mathbf{v}+\mathbf{u}*\mathbf{w}$

标量函数与矢量函数的卷

$$\mathbf{v}=g*\mathbf{u},\ \text{或}\quad v_i=g*u_i$$

标量函数与张量函数的卷

$$\mathbf{G}=g*\boldsymbol{\Psi},\ \text{或}\quad G_{ij}=g*\Psi_{ij}$$

矢量函数与矢量函数和张量函数与张量函数的卷分别为

$$\mathbf{u}*\mathbf{v}=u_i*v_i,\ \ \mathbf{G}*\boldsymbol{\Psi}=G_{ij}*\Psi_{ij}$$

现在，我们给出卷关于时间和空间导数的有用结果。我们定义

在$V\times T(0,\infty)$上，　　$\boldsymbol{\theta}=\mathbf{G}*\boldsymbol{\Psi}$

那么我们有

在$V\times T(0,\infty)$上，　　$\dot{\boldsymbol{\theta}}=\dot{\mathbf{G}}*\boldsymbol{\Psi}+\mathbf{G}(\mathbf{x},0)\boldsymbol{\Psi}$　　(3.1)

在$V\times T(0,\infty)$上，　　$\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}=\nabla\cdot\mathbf{G}*\boldsymbol{\Psi}+\mathbf{G}*\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}$　　(3.2)

现在我们使用关于时间变量的卷给出偏微分方程组(2.16)的卷的形式。

定理 1　设$\mathbf{d}\in C^{0,2}$，$\boldsymbol{\sigma}\in C^{1,0}$，那么$\mathbf{d}$和$\boldsymbol{\sigma}$满足运动方程组(2.16)和初始条件(2.9)，(2.11)。当且仅当

在$V\times T(0,\infty)$上

$$\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})+\mathring{\mathbf{F}}=\mathbf{M}\mathbf{d}\tag{3.3}$$

其中

$$\mathring{\mathbf{F}}=\tau*\mathbf{F}+\mathbf{M}(\mathbf{d}^0+\tau\dot{\mathbf{d}}^0)\tag{3.4}$$

并称之为虚拟广义伴生体力场。$\mathbf{d}^0$和$\dot{\mathbf{d}}^0$分别表示V上的初始位移和速度场。

证明　用τ对方程组(2.16)左右两边进行卷积，则可以得到

$$\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})+\tau*\mathbf{F}=\tau*\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}\tag{3.5}$$

根据卷对时间导数的结果(3.1)，我们有

$$\ddot{\overline{\tau*\mathbf{M}\mathbf{d}}}=\dot{\overline{1*\mathbf{M}\mathbf{d}}}=\mathbf{M}\mathbf{d}$$

由卷的交换性质

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\mathbf{d}=\ddot{\overline{\mathbf{M}\mathbf{d}*\tau}}&=\dot{\overline{\mathbf{M}\dot{\mathbf{d}}*\tau+\mathbf{M}\mathbf{d}^0\tau}}\\&=\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}*\tau+\mathbf{M}\dot{\mathbf{d}}^0\tau+\mathbf{M}\mathbf{d}^0\end{aligned}\tag{3.6}$$

由式(3.5)和式(3.6)就可以得到式(3.3)。

四、拟 变 分 原 理

定理 2　令Γ是所有允许状态的集合。设$\Phi\in\Gamma$，且也是运动学允许状态，对于$t\in T(0,\infty)$，我们在Γ上定义泛函

$$\begin{aligned}\Pi_1(\Phi)=&\int_V\Big[\frac{1}{2}\tau*\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon}*\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{d}*\mathbf{d}-\tau*\boldsymbol{\sigma}*\boldsymbol{\varepsilon}\\&-(\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})+\mathring{\mathbf{F}})*\mathbf{d}\Big]dx\\&+\int_{S_{1,2}}\tau*\mathbf{t}*\bar{\mathbf{d}}dS+\int_{S_{1,4}}\tau*(\mathbf{t}-\bar{\mathbf{t}})*\mathbf{d}dS\end{aligned}\tag{4.1}$$

那么在Γ上对于$t\in T(0,\infty)$我们有

$$\delta\Pi_1+\delta R+\delta P=0 \tag{4.2}$$

当且仅当Φ是混合问题的解．其中，$\mathbf{t}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$，$\bar{\mathbf{t}}$为伴生面力场，$\mathring{\mathbf{F}}$为虚拟广义伴生体力场．并且

$$\delta R=\int_V \mathbf{d}*\delta\mathring{\mathbf{F}}dx,\quad \delta P=\int_{S_{3,4}}\tau*\mathbf{d}*\delta\bar{\mathbf{t}}dS \tag{4.3}$$

证明 令$\delta\Phi=\{\delta\mathbf{d},\ \delta\boldsymbol{\varepsilon},\ \delta\boldsymbol{\sigma}\}\in\Gamma$是状态$\Phi$中的任意变分，$\delta\mathring{\mathbf{F}}$，$\delta\bar{\mathbf{t}}$为独立的拟变分因子．那么我们可以得到

$$\begin{aligned}\delta\Pi_1+\delta R+\delta P=&\int_V\tau*\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon}*\delta\boldsymbol{\varepsilon}dx+\int_V\mathbf{Md}*\delta\mathbf{d}dx\\&-\int_V\tau*\boldsymbol{\sigma}*\delta\boldsymbol{\varepsilon}dx-\int_V\tau*\boldsymbol{\varepsilon}*\delta\boldsymbol{\sigma}dx\\&-\int_V(\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})+\mathring{\mathbf{F}})*\delta\mathbf{d}\,dx\\&-\int_V\tau*\mathbf{d}*\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{\sigma})dx-\int_V\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{Rd})*\delta\boldsymbol{\sigma}dx\\&+\int_{S_{1,2}}\tau*\bar{\mathbf{d}}*\delta\mathbf{t}\,dS+\int_{S_{3,4}}\tau*(\mathbf{t}-\bar{\mathbf{t}})*\delta\mathbf{d}\,dS+\int_{S_{3,4}}\tau*\mathbf{d}*\delta\mathbf{t}\,dS\end{aligned} \tag{4.4}$$

在上式中我们应用了卷的交换性．如果我们应用梯度理论，我们得到

$$\int_V\tau*\mathbf{d}*\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{\sigma})dx=\int_S\tau*\mathbf{d}*\delta\mathbf{t}dS-\int_V\tau*\nabla\cdot\mathbf{d}*\delta\boldsymbol{\sigma}\,dx \tag{4.5}$$

将式(4.5)代入式(4.4)我们有

$$\begin{aligned}\delta\Pi_1+\delta R+\delta P=&\int_V\tau*(\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma})*\delta\boldsymbol{\varepsilon}dx\\&+\int_V[\mathbf{Md}-(\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})+\mathring{\mathbf{F}})]*\delta\mathbf{d}\,dx\\&+\int_V\tau*(\nabla\cdot\mathbf{d}-\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{Rd})*\delta\boldsymbol{\sigma}\,dx\\&+\int_{S_{1,2}}\tau*(\bar{\mathbf{d}}-\mathbf{d})*\delta\mathbf{t}dS+\int_{S_{3,4}}\tau*(\mathbf{t}-\bar{\mathbf{t}})*\delta\mathbf{d}\,dS\end{aligned} \tag{4.6}$$

显然，式(4.2)是Φ为混合问题的解的一个充分条件．如果状态Φ满足式(2.2)，(2.4)，(2.16)，(2.17)和(3.3)，那么由式(4.6)立即可以得到式(4.2)．由于必要性的证明比较复杂，在此不予证明．但是，根据$\delta\mathbf{d}$，$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$和$\delta\boldsymbol{\sigma}$的任意性及Titchmarsh定理*我们可以得到：在$V\times T(0,\infty)$上

$$\begin{aligned}&\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})+\mathring{\mathbf{F}}=\mathbf{Md}\\&\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\sigma}\\&\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla\cdot\mathbf{d}-\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{Rd}\end{aligned}$$

在$S_{1,4}\times T(0,\infty)$上 $\quad\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}$

在$S_{3,4}\times T(0,\infty)$上 $\quad\mathbf{t}=\bar{\mathbf{t}}$

如果所论问题是位移边值问题，那么$S_{1,2}=S$并且在$S_{3,4}$上的积分等于零．此时驻值条

* Titchmarsh定理：在$V\times T(0,\infty)$上$\mathbf{G}*\boldsymbol{\Psi}=0$表示在$V\times T(0,\infty)$上不是$\mathbf{G}=0$就是$\boldsymbol{\Psi}=0$.

件为

$$\delta\Pi_1+\delta R=0$$

如果所论问题是应力边值问题，那么$S_{3,4}=S$，并且在$S_{1,2}$上的积分为零。

定理 3 设D是所有允许的位移场的集合。令$\mathbf{d}\in D$。对于$t\in T(0,\infty)$，在D上定义泛函

$$\Pi_2(\mathbf{d})=\int_V \frac{1}{2}\tau*\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon}*\boldsymbol{\varepsilon}dx+\frac{1}{2}\int_V \mathbf{M}\mathbf{d}*\mathbf{d}\,dx$$

$$-\int_V \mathring{\mathbf{F}}*\mathbf{d}\,dx-\int_{S_{3,4}}\tau*\bar{\mathbf{t}}*\mathbf{d}\,dS \tag{4.7}$$

那么在D上对于$t\in T(0,\infty)$我们有

$$\delta\Pi_2+\delta R+\delta P=0 \tag{4.8}$$

当且仅当$\mathbf{d}$是混合问题的解。

其中

$$\delta R=\int_V \mathbf{d}*\delta\mathring{\mathbf{F}}dx,\quad \delta P=\int_{S_{3,4}}\tau*\mathbf{d}*\delta\bar{\mathbf{t}}dS$$

现在$\mathbf{d}$和$\boldsymbol{\varepsilon}$的变分并非独立的，它们满足关系式

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla\cdot(\delta\mathbf{d})-\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}\delta\mathbf{d} \tag{4.9}$$

考虑到

$$\int_V \tau*\boldsymbol{\sigma}*\nabla\cdot(\delta\mathbf{d})\,dx=\int_V \tau*\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}*\delta\mathbf{d})\,dx-\int_V\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}*\delta\mathbf{d}\,dx$$

$$=\int_S \tau*\mathbf{t}*\delta\,d\,dS-\int_V\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}*\delta\mathbf{d}\,dx$$

式(4.8)给出

在$V\times T(0,\infty)$上

$$\mathbf{M}\mathbf{d}-\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}-\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})-\mathring{\mathbf{F}}=0$$

在$S_{3,4}\times T(0,\infty)$上

$$\mathbf{t}=\bar{\mathbf{t}}$$

定理 4 令$\Gamma_1\in\Gamma$是满足应变位移关系的所有允许状态的集合。设$\Phi\in\Gamma_1$，对于$t\in T(0,\infty)$我们可以定义泛函

$$\Pi_3(\Phi)=\int_V \tau*\boldsymbol{\sigma}*\boldsymbol{\varepsilon}\,dx-\int_V \frac{1}{2}\tau*\mathbf{H}:\boldsymbol{\sigma}*\boldsymbol{\sigma}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_V \mathbf{M}\mathbf{d}*\mathbf{d}\,dx-\int_V \mathring{\mathbf{F}}*\mathbf{d}\,dx$$

$$-\int_{S_{1,2}}\tau*\mathbf{t}*(\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}})dS-\int_{S_{3,4}}\tau*\bar{\mathbf{t}}*\mathbf{d}\,dS \tag{4.10}$$

则对于$t\in T(0,\infty)$在Γ_1上有

$$\delta\Pi_3+\delta R+\delta P=0 \tag{4.11}$$

当且仅当Φ是混合问题的解。

它的证明类似于前述方法。对式(4.10)取变分后我们得到

$$\delta\Pi_3+\delta R+\delta P=\int_V\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{H}:\boldsymbol{\sigma})*\delta\boldsymbol{\sigma}\,dx$$

$$+\int_V(\mathbf{Md}-\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}-\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})-\mathring{\mathbf{F}})*\delta\mathbf{d}\,dx$$

$$-\int_{S_{1,2}}\tau*(\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}})*\delta\mathbf{t}\,dS-\int_{S_{3,4}}\tau*(\bar{\mathbf{t}}-\mathbf{t})*\delta\mathbf{d}\,dS \tag{4.12}$$

在上式中我们应用了卷的交换性质和梯度理论。由式(4.11)我们得到下列方程式

在$V\times T(0,\infty)$上 $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{H}:\boldsymbol{\sigma}$

$$\mathbf{Md}=\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})+\mathring{\mathbf{F}}$$

在$S_{1,2}\times T(0,\infty)$上，$\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}$

在$S_{3,4}\times T(0,\infty)$上，$\mathbf{t}=\bar{\mathbf{t}}$

定理 5 设Γ是所有允许状态的集合。令$\Phi\in\Gamma$，对于$t\in T(0,\infty)$，在Γ上定义泛函

$$\Pi_4(\Phi)=\frac{1}{2}\int_V\mathbf{Md}*\mathbf{d}\,dx-\int_V\mathring{\mathbf{F}}*\mathbf{d}\,dx+\frac{1}{2}\int_V\tau*\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon}*\boldsymbol{\varepsilon}\,dx$$

$$-\int_V\tau*[\boldsymbol{\varepsilon}-(\nabla\cdot\mathbf{d}-\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}\mathbf{d})]*\boldsymbol{\sigma}dx$$

$$-\int_{S_{1,2}}\tau*(\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}})*\mathbf{t}\,dS-\int_{S_{3,4}}\tau*\bar{\mathbf{t}}*\mathbf{d}\,dS \tag{4.13}$$

那么在Γ上，对于$t\in T(0,\infty)$有

$$\delta\Pi_4+\delta R+\delta P=0 \tag{4.14}$$

当且仅当$\Phi=\{\mathbf{d},\ \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\sigma}\}$是混合问题的解。

其中 $\delta R=\int_V\mathbf{d}*\delta\mathring{\mathbf{F}}dx$，$\delta P=\int_{S_{3,4}}\tau*\mathbf{d}*\delta\bar{\mathbf{t}}\,dS$

$\bar{\mathbf{t}}$为伴生面力场，$\mathring{\mathbf{F}}$为虚拟广义伴生体力场。这就是拟广义势能变分原理。

证明 令$\delta\Phi=\{\delta\mathbf{d},\ \delta\boldsymbol{\varepsilon},\ \delta\boldsymbol{\sigma}\}\in\Gamma$是允许状态$\Phi$中的任意变分，$\delta\mathring{\mathbf{F}}$和$\delta\bar{\mathbf{t}}$为独立的拟变分因子，那么式(4.13)的变分为

$$\delta\Pi_4(\Phi)=\int_V\mathbf{Md}*\delta\mathbf{d}\,dx-\int_V\mathring{\mathbf{F}}*\delta\mathbf{d}\,dx-\int_V\mathbf{d}*\delta\mathring{\mathbf{F}}\,dx$$

$$+\int_V\tau*\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon}*\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dx-\int_V\tau*[\boldsymbol{\varepsilon}-(\nabla\cdot\mathbf{d}-\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{Rd})]\times\delta\boldsymbol{\sigma}dx$$

$$-\int_V\tau*\boldsymbol{\sigma}*\delta\,\boldsymbol{\varepsilon}\,dx+\int_V\tau*\delta(\nabla\cdot\mathbf{d})dx$$

$$-\int_V\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})*\delta\mathbf{d}\,dx-\int_{S_{1,2}}\tau*(\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}})*\delta\mathbf{t}\,dS$$

$$-\int_{S_{1,2}}\tau*\mathbf{t}*\delta\,\mathbf{d}\,dS-\int_{S_{3,4}}\tau*\bar{\mathbf{t}}*\delta\mathbf{d}\,dS$$

$$-\int_{S_{3,4}}\tau*\mathbf{d}*\delta\bar{\mathbf{t}}\,dS \tag{4.15}$$

现在我们对式(4.15)的第七项应用梯度理论可以得到

$$\int_V\tau*\boldsymbol{\sigma}*\delta(\nabla\cdot\mathbf{d})dx=\int_V\tau*\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}*\delta\mathbf{d})dx-\int_V\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}*\delta\mathbf{d}\,dx$$

$$=\int_S\tau*\mathbf{t}*\delta\,\mathbf{d}\,dS-\int_V\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}*\delta\mathbf{d}\,dx \tag{4.16}$$

将上式代入式(4.15)我们有

$$\delta\Pi_4+\delta R+\delta P=\int_V[\mathbf{Md}-\mathring{\mathbf{F}}-\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})-\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}]*\delta\mathbf{d}\,dx$$

$$+\int_V\tau*(\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma})*\delta\boldsymbol{\varepsilon}dx-\int_V\tau*[\boldsymbol{\varepsilon}-(\nabla\cdot\mathbf{d}-\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{Rd})]*\delta\boldsymbol{\sigma}\,dx$$

$$-\int_{S_{1,2}}\tau*(\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}})*\delta t\,dS-\int_{S_{3,4}}\tau*(\bar{\mathbf{t}}-\mathbf{t})*\delta\mathbf{d}\,dS \tag{4.17}$$

如果Φ是满足式(2.2)，(2.4)，(2.16)，(2.17)和(3.3)的解，则从式(4.17)可以得到$\delta\Pi_4+\delta R+\delta P=0$。相反地，如果状态$\Phi=\{\mathbf{d},\ \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\sigma}\}$满足式(4.14)，根据$\delta\mathbf{d}$，$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$，$\delta\boldsymbol{\sigma}$的任意性可以推证是所论问题的解。因此驻值条件式(4.14)给出

在$V\times T(0,\infty)$上 $\mathbf{Md}-\mathring{\mathbf{F}}-\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})-\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=0$

$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon}$

$\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla\cdot\mathbf{d}-\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{Rd}$

在$S_{1,2}\times T(0,\infty)$上 $\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}$

在$S_{3,4}\times T(0,\infty)$上 $\mathbf{t}=\bar{\mathbf{t}}$

定理 6 令$\Gamma_2\subset\Gamma$是满足本构关系的允许状态的集合。设$\Phi\in\Gamma_2$，对于$t\in T(0,\infty)$我们定义泛函

$$\Pi_6(\Phi)=\frac{1}{2}\int_V\mathbf{Md}*\mathbf{d}\,dx+\frac{1}{2}\int_V\tau*\mathbf{H}:\boldsymbol{\sigma}*\boldsymbol{\sigma}\,dx$$

$$+\int_V[\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})+\mathring{\mathbf{F}}-\mathbf{Md}]*\mathbf{d}\,dx$$

$$-\int_{S_{1,2}}\tau*\bar{\mathbf{d}}*\mathbf{t}\,dS-\int_{S_{3,4}}\tau*(\mathbf{t}-\bar{\mathbf{t}})*\mathbf{d}\,dS \tag{4.18}$$

那么在Γ_2上，对于$t\in T(0,\infty)$我们有

$$\delta\Pi_6(\Phi)-\delta R-\delta P=0 \tag{4.19}$$

当且仅当Φ是混合问题的解。其中

$$\delta R=\int_V\mathbf{d}*\delta\mathring{\mathbf{F}}\,dx,\quad \delta P=\int_{S_{3,4}}\tau*\mathbf{d}*\delta\bar{\mathbf{t}}\,dS$$

这便是拟广义余能变分原理。

证明 令$\delta\Phi\in\Gamma_2$是任意变分。$\delta\mathring{\mathbf{F}}$，$\delta\bar{\mathbf{t}}$是独立拟变分因子。则式(4.18)的变分为

$$\delta\Pi_6=\int_V\mathbf{Md}*\delta\mathbf{d}\,dx+\int_V\tau*\mathbf{H}:\boldsymbol{\sigma}*\delta\boldsymbol{\sigma}dx$$

$$+\int_V[\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})+\mathring{\mathbf{F}}-\mathbf{Md}]*\delta\mathbf{d}\,dx$$

$$+\int_V\tau*\mathbf{d}*\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{\sigma})\,dx+\int_V\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{Rd})*\delta\boldsymbol{\sigma}\,dx$$

$$+\int_V\mathbf{d}*\delta\mathring{\mathbf{F}}\,dx-\int_V\mathbf{Md}*\delta\mathbf{d}\,dx-\int_{S_{1,2}}\tau*\bar{\mathbf{d}}*\delta\mathbf{t}\,dS$$

$$-\int_{S_{3,4}}\tau*(\mathbf{t}-\bar{\mathbf{t}})*\delta\mathbf{d}\,dS-\int_{S_{3,4}}\tau*\mathbf{d}*\delta\,\mathbf{t}\,dS+\int_{S_{3,4}}\tau*\mathbf{d}*\delta\bar{\mathbf{t}}dS \tag{4.20}$$

在式(4.20)中我们应用了卷的交换性质．考虑到

$$\int_V \tau*\mathbf{d}*\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{\sigma})\,dx=\int_S \tau*\mathbf{d}*\delta\,\mathbf{t}\,dS-\int_V \tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}*\delta\boldsymbol{\sigma}\,dx$$

我们可以将式(4.20)变为

$$\begin{aligned}\delta\Pi_5-\delta R-\delta P=&\int_V[\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})+\mathring{\mathbf{F}}-\mathbf{M}\mathbf{d}]*\delta\mathbf{d}\,dx\\&+\int_V\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}\mathbf{d}-\nabla\cdot\mathbf{d})*\delta\boldsymbol{\sigma}dx-\int_{S_{3,4}}\tau*(\mathbf{t}-\bar{\mathbf{t}})*\delta\mathbf{d}\,dS\\&+\int_{S_{1,2}}\tau*(\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}})*\delta\mathbf{t}\,dS\end{aligned}\qquad(4.21)$$

状态Φ是混合问题的解，式(4.19)是一个充分条件．因为如果Φ满足应变位移关系，运动方程组，应力边界条件，位移边界条件，显然有

$\delta\Pi_5-\delta R-\delta P=0$．考虑到$\delta\mathbf{d}$，$\delta\boldsymbol{\sigma}$的任意性及Titchmarsh定理，可以知道式(4.19)也是一个必要条件．因此我们得到

在$V\times T(0,\infty)$上 $\tau*\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\tau*(\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma})+\mathring{\mathbf{F}}=\mathbf{M}\mathbf{d}$

$\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla\cdot\mathbf{d}-\boldsymbol{\varepsilon}^*:\mathbf{R}\mathbf{d}$

在$S_{1,2}\times T(0,\infty)$上 $\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}$

在$S_{3,4}\times T(0,\infty)$上 $\mathbf{t}=\bar{\mathbf{t}}$

在定理2到定理6中，如果$\mathring{\mathbf{F}}$和$\bar{\mathbf{t}}$为非伴生力场时，它们应视为常数．这时$\delta R=0$，$\delta P=0$．那么所述定理退化为通常的变分原理．

参　考　文　献

[1] 胡海昌，《弹性力学的变分原理及其应用》，科学出版社 (1981).

[2] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, *Pergamon Press* (1968).

[3] 钱伟长，《变分法及有限元》(上册)，科学出版社 (1968).

[4] Segel, Lee A., *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*, Macmillan Publishing Co. Inc. (1979).

[5] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，力学与实践，1，2 (1979).

[6] 胡海昌，论弹性体力学和受范体力学中一般变分原理，物理学报 10，3 (1954)，259.

[7] 戴天民，非局部微极线性介质理论中的各种互易定理和变分原理，应用数学和力学，1，1 (1980)，89—105.

[8] Leipholz, H., On conservative elastic systems of the first and second kinds, Ing-Arch 43 (1974).

[9] 刘殿魁、张其浩，弹性理论中非保守问题的一般变分原理，力学学报，6 (1981)，562.

[10] Eningen, A. C. and C. B. Kafadav, *Polar Field Theories*, Academic Press (1976).

[11] Eningen, A. C. and E. S. Sububi, *Elastodynamics*, Ⅱ (1975).

Variational Methods for the Problems of Nonconservative Force Fields in the Micropolar Elastodynamics

Dai Tian-min
(*Liaoning University, Shenyang*)

Fu Ming-fu
(*Zhejiang University, Hangzhou*)

Lin Zhong-xiang
(*Zhejiang University, Hangzhou*)

Yang De-pin
(*Jiangxi Polytechnic University, Nanchang*)

Abstract

Based on the properties of the convolution and the convolute commutation, some quasi-variational principles for the problems of nonconservative force field in micropolar elastodynamics are given and verified in this paper. The theorem given in this paper can be applied to the theories of the nonlocal elastic mediums and the nonlocal micropolar elastic mediums.