

# 圆管 Poiseuille 流动中平均速度的一种修正剖面及其稳定性研究\*

周 哲 玮

(上海市应用数学和力学研究所, 1986年7月21日收到)

## 摘 要

本文给出了圆管 Poiseuille 流动中 Hagen-Poiseuille 速度剖面的一种修正剖面, 这种剖面可看作是轴对称扰动各谐波分量非线性相互作用对平均流影响的一般体现。通过对这种速度剖面的稳定性研究, 本文首次得到轴对称扰动造成失稳的结果, 提出了 Hagen-Poiseuille 流动一种新的产生失稳的可能途径。

## 一、引 言

自从1883年著名的雷诺实验以来, 层流到湍流的转换问题, 或湍流的发生问题, 引起了人们极大的兴趣。然而经过一百多年来的艰难探索, 虽然取得了不少重要成果, 距离问题的真正解决却还是非常遥远的。

圆管 Poiseuille 流动就是一个典型的例子。虽然对转换问题最早的研究工作就是从圆管 Poiseuille 流动的雷诺实验开始的, 但至今为止在转换问题上所有得到承认的重要结果几乎都是有关平板边界层流动和平面 Poiseuille 流动的, 如文献[1]~[3]。对于圆管 Poiseuille 流动, 实验研究不断在进行, 但对其转换的发生还未有能被普遍接受的理论解释。

目前一般认为, 圆管 Poiseuille 流动对于轴对称的小扰动是线性稳定的, Sexl<sup>[4]</sup>, Syngé<sup>[5]</sup>, Pekeris<sup>[6]</sup>, Gill<sup>[7]</sup>, Davey 和 Drazin<sup>[8]</sup>, Salwen 和 Grosch<sup>[9]</sup>等人的工作都得出这样的结论。对于非轴对称的小扰动, 大多数人的工作都认为是线性稳定的, 如 Lessen, Sadler, Liu<sup>[10]</sup>, Garg 和 Rouleau<sup>[11]</sup>, 但也有不少人认为非轴对称扰动的稳定性仍值得探讨, Munakata(1993)<sup>[12]</sup>用特征函数展开和 QR 算法, 算出对于非轴对称小扰动线性失稳的临界雷诺数为1300。据作者所知, 这是唯一对充分发展的层流抛物线速度剖面得出线性失稳结论的文献, 但其临界雷诺数值比实验所观察到的最小临界雷诺数2000要低。除此之外, 仅 Tatsumi(1952)<sup>[13]</sup>对圆管进口区小扰动算出临界雷诺数为10000。

把圆管 Poiseuille 流动发生转换的原因归于非轴对称的小扰动, 是与 Leite(1959)<sup>[14]</sup>

\* 钱伟长推荐。

的实验结果相矛盾的。Leite 在充分发展的层流段引入扰动, 在雷诺数为 2000~13000 的范围内观察到小扰动的非轴对称分量比轴对称分量衰减得更快。因此在小扰动的范围内, 扰动的非轴对称分量应更为稳定。

不少作者进而研究圆管 Poiseuille 流动的有限振幅轴对称扰动, 但其结果也很不一致。Davey和Nguyen(1971)<sup>[15]</sup>和 Itoh(1977)<sup>[16]</sup>就得出了相反的结论。对此, Davea(1978)<sup>[17]</sup>进行了讨论, 认为在仅考虑级数解前两项的情况下, 不可能得到最终的结论。Ptery和Orszag<sup>[18]</sup>对轴对称扰动直接用契贝谢夫多项式展开法进行了数值模拟, 仍然得到衰减的结果, 并认为对于圆管 Poiseuille 流动, 基于中性曲线的弱非线性方法是无效的。

从 Stuart, Watson<sup>[19,20]</sup>开始发展的弱非线性理论, 用数学形式表达出扰动分量的非线性自相互作用对平均速度剖面的修正。周恒(1982)<sup>[3]</sup>更基于这种修正提出了人为中性方法, 对平面 Poiseuille 流动得出了比前人更好的结果。然而将这种方法应用于圆管 Poiseuille 流动时, 仍不能得到人为中性的结果(赵耕夫(1985)<sup>[21]</sup>)。这样, 对圆管 Poiseuille 流动失稳的机理, 至今提不出能为人们所接受的理论解释。

Gill (1962)<sup>[22]</sup>根据 Leite 的实验, 对圆管流动失稳的机理进行了讨论。他认为, 对平均速度值改变很小, 而对其曲率改变有限的扰动是流动失稳的主要原因, 并用渐近分析方法讨论了雷诺数趋于无穷大时的情况。

本文从更一般的情形考虑, 直接研究平均速度修正剖面可能的形式, 得出了一种修正速度剖面, 并用契贝谢夫多项式展开法和 QR 算法, 得到了轴对称扰动造成线性失稳的结果, 从而揭示了一种新的流动失稳的途径。

## 二、圆管 Poiseuille 流动中平均速度的一种速度修正剖面

在流动稳定性研究中最常见的方法就是在层流速度上迭加 Tollmien-Schlichting 波形式的扰动。

引入流函数  $\psi$ , 满足

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.1)$$

其中  $u$  为轴向流速,  $v$  为径向流速。则  $\psi = \bar{\psi} + \varepsilon \psi'$ 。 (2.2)

设扰动流函数的形式为

$$\psi' = \phi(r) \exp[i\alpha(x-ct)] + c. c. \quad (2.3)$$

$c. c.$  为第一项的复共轭;  $\alpha$  为实数,  $c = c_r + ic_i$ , 当  $c_i > 0$ , 所研究的扰动随时间增长, 层流是不稳定的; 当  $c_i < 0$ , 则扰动随时间衰减, 层流是稳定的。此时扰动流函数的方程为

$$\left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} D^2 \psi' + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} D^2 \psi' - r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}}{dr} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial x} \\ & + \varepsilon J(\psi', D^2 \psi') = -\frac{1}{R} D^4 \psi' \end{aligned} \right\} \\ & \text{当 } r=1, \quad \frac{\partial \psi'(r)}{\partial x} = \frac{\partial \psi'(r)}{\partial r} = 0 \\ & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi'}{\partial r} < +\infty \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$$\text{其中 } D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$J(\phi, D^2\phi) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} D^2\phi - \frac{\partial \phi}{\partial r} D^2\phi \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} D^2\phi$$

如果我们考虑非线性项  $J(\psi', D^2\psi)$ , 由(2.3)式可知由于谐波分量的自相互作用, 解答中包含零波数成分

$$\Phi(r) \exp[2\alpha c_i t] \quad (2.5)$$

$\Phi(r)$  相当于 Stuart 和 Watson<sup>[18]</sup> 文中的  $f(r)$ , 以及周恒文[3]中的  $\phi_{10}$ . 这一零波数解反映了非线性作用对平均流速的修正. 但我们可以看到, 在亚临界流动中, 也即雷诺数低于线性临界值时, 这一修正作用将随时间而衰减. 在平面 Poiseuille 流动中, 这种修正对流动失稳的意义是得到公认的. 周恒的人为中性方法之所以获得较理想的结果, 也在于他强调了这种修正作用, 在零级近似方程中就考虑了修正速度剖面的影响. 然而在圆管 Poiseuille 流动中, 直接应用周恒方法, 仍不能获得人们所希望的结果.

本文直接考虑在圆管 Poiseuille 流动中可能产生的速度剖面的形式, 然后研究其稳定性.

仍引入流函数(2.1). 在圆管 Poiseuille 流动中, 轴对称流动的流函数所满足的方程为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} D^2\psi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} D^2\psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} D^2\psi \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} D^2\psi \\ & = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \left( \frac{3}{r^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right] \\ & \text{当 } r=1 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \\ & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} < +\infty \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

对于定常层流流动, 我们有著名的 Hagen-Poiseuille 解

$$\psi(r) = \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \quad (2.7)$$

对于一般的非定常流动, 还无法得到解析解.

现在我们考虑非定常的层流解, 也即可随时间变化, 但无径向速度, 在流动过程中不发生掺混的解答. 该流函数具有以下形式

$$\psi = \phi(r) \exp[\mu t] \quad (2.8)$$

其中  $\mu$  为实数.

与(2.5)式比较, 我们可以说这是各谐波分量的相互作用对平均速度剖面修正的一般形式. 此时有方程

$$\left. \begin{aligned} & \phi^{(4)} - \frac{2}{r} \phi^{(3)} + \left( \frac{3}{r^2} - \mu R \right) \left( \phi'' - \frac{1}{r} \phi' \right) = 0 \\ & \phi(0) = \phi(1) = \phi'(0) = \phi'(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$\phi(0) = \phi(1) = 0$  的条件意味着这种速度剖面的修正引起的总流量变化为零.

采用 Frobenius 级数解法, 可设

$$\phi = r^a \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^i \quad (2.10)$$

其指数方程有四个根

$$\alpha=0, 2, 2, 4 \quad (2.11)$$

可得出方程的四个线性无关解。所以

$$\begin{aligned} \phi(r) = & c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+2)(\mu R)^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n+2)^2} r^{2n+2} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(2n+4)(\mu R)^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n+4)} r^{2n+4} \\ & + c_3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+2)(\mu R)^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n+2)^2} r^{2n+2} \left\{ \ln r + \left[ \frac{n+2}{2(n+1)} - \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right) \right] \right\} \\ & + c_4 \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(\mu R)^n r^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2} \left\{ \ln r + \left[ \frac{1}{2n} - \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \right] \right\} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\text{因为 } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} < +\infty$$

所以  $c_3=c_4=0$

$$\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(\mu R)^n r^{2n}}{[(2n)!!]^2} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(\mu R)^n r^{2n+2}}{[(2n+2)!!]^2} \quad (2.13)$$

其中  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$  当  $n=0$ ,  $(2n)!! = 1$

由  $u(1)=0$ , 令  $u(0)=1$ , 我们得到

$$u(r) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n r^{2n}}{[(2n)!!]^2} - A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n r^{2n+2}}{[(2n+2)!!]^2} \right\} \exp[\mu t] \quad (2.14)$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n}{[(2n)!!]^2} / \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n}{[(2n+2)!!]^2} \quad (2.15)$$

显然,  $\phi(0)=0$ 。欲满足  $\phi(1)=0$ , 问题成为求以  $\mu R$  为未知数的下式之零点

$$\phi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)(\mu R)^n}{[(2n+2)!!]^2} - A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+4)(\mu R)^n}{[(2n+4)!!]^2} = 0 \quad (2.16)$$

我们用数值方法直接求出前几个实零点为

$$\begin{aligned} \mu R = & -26.374614, \quad -70.849999, \quad -135.02071, \\ & -218.92019, \quad -322.55512, \quad -445.92756, \\ & -589.03835, \quad -751.88837, \quad -930.86419, \quad \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

可以继续得出无穷个零点。

因此, 只有随时间衰减的这种扰动才可能存在。由于零点值的增大意味着这种剖面随时间增长的迅速衰减, 我们可以不去研究更多的零点值。

这种修正速度剖面的形状见图1。非常有趣的是, 这种剖面的拐点数目是同零点的序号一致的。

由于拐点的出现, 我们可以期望它的作用是使流动变得更加不稳定。

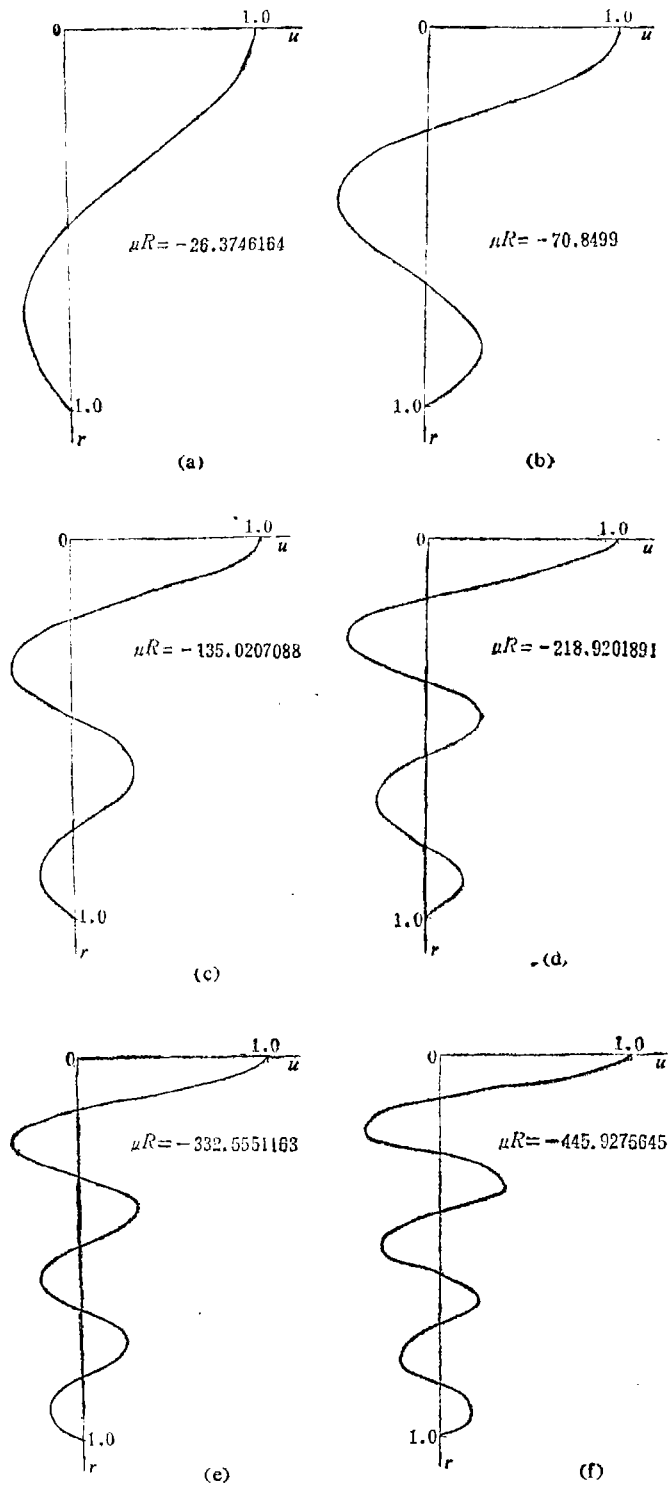


图 1

### 三、考虑到修正影响的平均速度剖面的稳定性研究

由(2.6), (2.7), (2.8)式可知, 层流 Hagen-Poiseuille 解和修正速度解所满足的方程都是线性方程, 因此这两个解是可以进行迭加的. 现在我们研究这种迭加后的层流速度剖面的线性稳定性质. 暂不考虑因子  $\exp[\mu t]$ , 可认为

$$u = \bar{u} + \varepsilon u_1 \quad (3.1)$$

此时的  $u_1$  可看作 Tollmien-Schlichting 波的所有谐波分量的相互作用所可能产生的对平均流的修正. 因此我们在研究某一谐波分量的稳定性时, 考虑到了所有其他分量的影响对平均流速的修正. 从这个意义上说, 本文也是研究不同波数的 Tollmien-Schlichting 波分量之间的相互作用对稳定性的影响.

此时方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D^2 \psi + u \frac{\partial}{\partial x} D^2 \psi - r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{1}{R} D^4 \psi \\ \text{当 } r=1 \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\psi}{r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} &< +\infty \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$\text{仍设 } \psi = \phi(r) \exp[i\alpha(x-ct)] + \text{c. c.} \quad (3.3)$$

其中  $\alpha$  为实数,  $c = c_r + ic_i$ ,  $c_r, c_i$  为复共轭.

则有

$$\left. \begin{aligned} (u-c) \left( \phi'' - \frac{1}{r} \phi' - \alpha^2 \phi \right) - \left( u'' - \frac{1}{r} u' \right) \phi \\ = \frac{1}{i\alpha R} \left[ \phi^{(4)} - \frac{2}{r} \phi^{(3)} + \left( \frac{3}{r^2} - 2\alpha^2 \right) \left( \phi'' - \frac{1}{r} \phi' \right) + \alpha^4 \phi \right] \\ \phi(1) = \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r=1} = 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\phi(r)}{r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} < +\infty \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

其中

$$u = 1 - r^2 + \varepsilon u_1 \quad (3.5)$$

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n r^{2n}}{[(2n)!!]^2} - A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n r^{2n+2}}{[(2n+2)!!]^2}$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n}{[(2n)!!]^2} / \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n}{[(2n+2)!!]^2} \quad (3.6)$$

问题成为求特征值  $c$  的问题. 一般用数值方法求解, 将其化为一般复矩阵的特征值问题. 特征值的确定有两个途径, 一是直接在复平面内对特征值进行搜索 (Thomas(1953)<sup>[23]</sup>), 一是用矩阵特征值算法求出全部特征值 (Orszag(1971)<sup>[24]</sup>). 在可能提供较好的初值时, 第一种方法效率较高. 第二种方法则可同时求出几个模态, 且不需要提供搜索的初始值. 本文问题的提法与前人不同, 无法提供较好的特征值初值. 故采用第二种方法, 应用推导上略嫌

麻烦,但在达到同样精度时自由度较少的契贝谢夫正交多项式展开法(Orszag(1971)<sup>[24]</sup>).

我们将修正速度  $u_i$  和扰动函数  $\phi(r)$  都用契贝谢夫多项式展开,由问题的轴对称提法,我们仅考虑偶阶契贝谢夫多项式

$$\phi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_{2n}(r) \quad (3.7)$$

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n}(r) \quad (3.8)$$

将(3.7), (3.8)代入(3.4),将方程(3.4)的左边用契贝谢夫多项式展开,令各阶契贝谢夫多项式的系数为零,可得到关于  $a_n$  的线性代数方程组.求解线性代数方程组时,仍采用 Tau 法,这种方法解的高阶项 ( $n$  最大的三项)不是由运动方程决定,而是由边界条件决定的.

求矩阵特征值时运用 QR 算法.首先将未扰速度剖面的线性稳定结果与已有结果对比,可见只需取27项,则可达到4位有效数字.

$$\alpha=6.2, R=500$$

Davey, Nguyen(1970)	$c_r=0.9492,$	$c_i=-0.0632$
本文 $N=27$	$c_r=0.94919991,$	$c_i=-0.0631998$
$N=28$	$c_r=0.94919996,$	$c_i=-0.0632002$

$$\alpha=5.8 R=1600$$

Patera, Orszag(1981)	$c_r=0.27326$	$c_i=-0.09303$
本文 $N=27$	$c_r=0.27326436$	$c_i=-0.0930335$
$N=28$	$c_r=0.27326344$	$c_i=-0.0930327$

引入修正速度剖面后再计算特征值,发现在所有情况下  $c_i$  都有所增大,说明这种修正增加了流动的不稳定性.

$$\text{例: } \alpha=1, R=10000, \mu R=-445.9275645$$

$\varepsilon=0$ 时,最不稳定的两个模态为

$$\begin{aligned} c_r &= 0.9715, c_i = -0.02822 \\ c_r &= 0.9369, c_i = -0.05656 \end{aligned}$$

$\varepsilon=-0.05$ 时,出现两个随时间增长的模态

$$\begin{aligned} c_r &= 0.6936, c_i = 0.02889 \\ c_r &= 0.9354, c_i = 0.01605 \end{aligned}$$

修正速度剖面特征值的计算结果的收敛性如表1所示.在以后的计算中,我们采用29项契贝谢夫多项式.

图2中给出了修正速度剖面的振幅阈值曲线.由于修正速度剖面随时间衰减,这里的阈值是这样定义的:当  $\varepsilon$  达到阈值时, Tollmien-Schlichting 波的增长率与修正速度剖面的衰减率在数值上相等.修正速度剖面的幅值一旦超过此临界值,就会产生 Gill<sup>[22]</sup>所指出的情况:平均流动的修正衰减到可忽略不计之前,非线性的效应已变得十分重要了.

表 1

圆管 Poiseuille 流动的契贝谢夫多项式逼近  
 $(\alpha=1, R=5000, \mu R=-135.02071, \varepsilon=-0.06)$

多项式项数 $n$	特 征 值 $c$	多项式项数 $n$	特 征 值 $c$
26	0.803833+0.00386501	31	0.803830+0.00385950
27	0.803832+0.00386162	39	0.803826+0.00387964
28	0.803830+0.00386137	40	0.803828+0.00386133
29	0.803830+0.00386181	41	0.803831+0.00386275
30	0.803830+0.00386212		

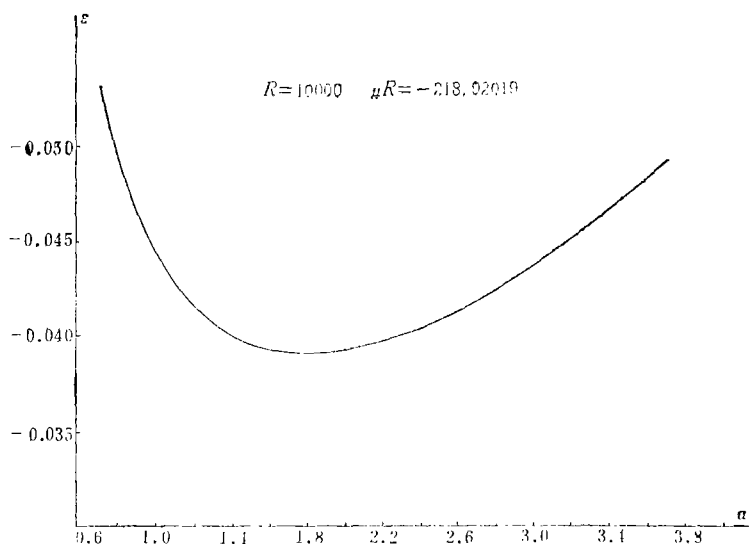


图 2

## 四、讨 论

本文讨论了圆管 Poiseuille 流动中由于轴对称扰动非线性相互作用对平均流动的修正及其对流动稳定性的影响，首次得到轴对称扰动造成失稳的结果。欲对圆管 Poiseuille 流动的失稳机理作出较为完全的解释，还须进一步研究扰动的非线性发展过程。关于非线性稳定性研究的结果，我们将在另文发表。

**致谢** 本文在钱伟长教授的指导下完成。作者并对周恒教授，蔡树棠教授和戴世强副教授的关心和帮助表示衷心的感谢。在上海市应用数学和力学研究所理论流体力学讨论班上进行的探讨使作者受益匪浅，在此一并致谢。

## 参 考 文 献

- [1] Lin, C. C., On the stability of two-dimensional parallel flows, *Quart. Appl. Math.*, **3** (1945), 117-142, 218-234, 277-301.
- [2] Reynolds, W. C. and M. C. Potter, Finite-amplitude instability of parallel shear flows, *J. F. M.*, **27** (1967), 465.
- [3] Zhou, H., On the nonlinear theory of stability of plane Poiseuille flow in the sub-



- critical range, *Proc. R. Soc. London.*, A 381 (1982), 407-418.
- [4] Sexl, T., Zur stabilitätsfrage der poiseuilleschen und couetteschen strömung, *Ann. Phys.* **83** (1927), 835, **84** (1927), 807.
- [5] Synge, J. L., *Hydrodynamic Stability*, Semicentennial Publ. Am. Math. Soc. **2** (1938), 227.
- [6] Pekeris, C. L., stability of the laminar flow through a straight pipe of circular cross-section to infinitesimal disturbances which are symmetrical about the axis of the pipe, *Proc. U. S. Nat. Acad. Sci.* **34** (1948), 285.
- [7] Gill, A. E., On the behaviour of small disturbances to Poiseuille flow in a circular pipe, *J. F. M.* **21** (1965), 145-172.
- [8] Davey, A. and P. G. Drazin, The stability of Poiseuille flow in a pipe, *J. F. M.* **36** (1969), 209-218.
- [9] Salwen, H. and C. E. Grosch, The Stability of Poiseuille flow in a pipe of circular cross-section *J. F. M.* **54** (1972), 93.
- [10] Lessen, M., S. G. Sadler and T. Y. Liu, Stability of pipe Poiseuille flow, *Phys. Fluids*, **11** (1968), 1404-1409.
- [11] Gary, V. K. and W. T. Rouleau, Linear spatial Stability of pipe Poiseuille flow, *J. F. M.*, **54** (1972), 113.
- [12] Munakata, Ken-iti, The stability of Poiseuille flow in a circular pipe, *J. Phys. Soc. Jap.*, **52** (1983), 2004-2015.
- [13] Tatsumi, Tomomasa, Stability of the laminar inlet-flow prior to the formation of Poiseuille regime, *J. Phys. Soc. Jap.*, **7** (1952), 489-502.
- [14] Leite, R. J., An experimental investigation of the stability of Poiseuille flow, *J. F. M.*, **5** (1969), 81.
- [15] Davey, A. and H. P. F. Nguyen, Finite-amplitude stability of pipe flow, *J. F. M.*, **45** (1971), 701-720.
- [16] Itoh, N., Nonlinear stability of parallel flows with subcritical Reynolds number, Part 2, Stability of pipe Poiseuille flow to finite axisymmetric disturbances, *J. F. M.*, **82** (1977), 469-479.
- [17] Davey, A., On Itoh's finite amplitude stability theory for pipe flow, *J. F. M.*, **86** (1978), 695-703.
- [18] Patera, A. T. and S. A. Orszag, Finite-amplitude stability of axisymmetric pipe flow, *J. F. M.*, **112** (1981), 467-474.
- [19] Stuart, J. T., On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, I. The basic behaviour in Plane Poiseuille flow, *J. F. M.*, **9** (1960), 353-370.
- [20] Watson, J., On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, II. The development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow, *J. F. M.*, **9** (1960), 371-389.
- [21] 赵耕夫, 圆管 Poiseuille 流轴对称有限扰动稳定性研究, 第三届全国流体力学学术会议, 中国力学学会, 长沙 (1985).
- [22] Gill, A. E., A mechanism for instability of plane Couette flow and of poiseuille flow in a pipe, *J. F. M.*, **21** (1962), 503-511.

- [23] Thomas, L. H., The stability of plane Poiseuille flow, *Phys. Rev.*, **91** (1953), 780.  
[24] Orszag, A. S., Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, *J. F. M.*, **50** (1971), 689-703.

## A Kind of Distortion of Mean Velocity Profile in Pipe Poiseuille Flow and Its Stability Behaviour

Zhou Zhe-wei

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

### Abstract

This paper presents a kind of distortion of Hagen-Poiseuille velocity profile in pipe Poiseuille flow. This distortion can be regarded as a general expression of the influence on the mean flow by nonlinear interaction of various components of axisymmetric perturbations. Through the investigation of the stability behaviour of this velocity profile, this paper obtains unstable result induced by axisymmetric perturbations for the first time, and thus presents a new possible approach which leads to instability of Hagen-Poiseuille flow.