

文章编号: 1000-0887(2004) 08_0837_10

湍流不同尺度间的近程和共振 作用规律及应用*

高 智

(中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

(我刊原编委 卞荫贵推荐)

摘要: 从 Navier-Stokes 方程出发, 研究了湍流不同尺度间的相互作用规律, 给出相近尺度间近程粘性应力的积分和微分表达式; 引入极相近尺度之间共振相互作用的概念, 得到共振粘性应力的微分表达式; 利用共振粘性应力张量获得不含经验关系和常数、近似封闭的大涡模拟 (LES) 方程组; 利用近程和共振粘性应力张量获得不含经验关系和常数、近似封闭的湍流多尺度方程组; 讨论了湍流多尺度方程的性质及用于湍流计算的优点, 尺度间相互作用的近程特性说明; 多尺度模拟是湍流计算很有价值的方法, 并列了算例。

关键词: 湍流; 尺度间相互作用; 近程粘性应力; 共振粘性应力; 涡粘性;
湍流多尺度方程

中图分类号: V211.1 文献标识码: A

引 言

湍流包含了宽广的时间、空间尺度范围, 不同尺度之间的非线性相互作用对湍流的演化具有关键的作用。在湍流的理论研究及工程近似计算中, 近百年来人们广泛使用了由 J. Boussinesq, G. Taylor 和 L. Prandtl 提出和发展的涡粘性概念^[1,2]。这一概念用分子粘性来比拟湍流粘性, 因此涡粘性是尺度彼此可以分得很开的尺度间的“远程”相互作用。然而, 人们普遍认为湍流不同尺度之间的相互作用主要是相近尺度间的近程相互作用^[3]。这方面的研究工作已有一些, 典型的如 R. Kraichnan 的直接相互作用理论^[4], 当雷诺数足够大时, 该理论表明在波谱空间能量传递主要发生在三合一的波分量 ($k \approx k' \approx k - k'$) 之间^[4]。又如近年来 J. Domaradzki 等处理槽道湍流直接数值模拟 (DNS) 数据库的数值分析结果^[5,6]表明: 在波谱空间, 可分辨波数 ($k < k_1$) 的非线性动力学主要为波数 k 介于 k_1 和 $2k_1$ 之间的相近波数范围所支配, 波数 $k > 2k_1$ 的高波数范围对波数 $k < k_1$ 的可分辨波数范围的影响很小可近似略而不计; 另一方面相近波数范围 ($k_1 < k < 2k_1$) 的非线性动力学主要为波数 $k < k_1$ 的可分辨波数范围所支配, 而波数 $k > 2k_1$ 的更高波数范围对 $k_1 < k < 2k_1$ 波数范围的影响比较次要。又如高智和庄逢

* 收稿日期: 2002_02_24; 修订日期: 2004_01_09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19772067, 10272106)

作者简介: 高智(1937—), 男, 山西祁县人, 研究员(Tel: + 86_10_62546965; Fax: + 86_10_62561284; E-mail: Gaozhi@imech.ac.cn)。

甘提出的湍流计算的大小尺度方程组^[7-9]和 T. J. R. Hughes 等的湍流多尺度方法^[10], 两者均以湍流不同尺度(波数)之间的相互作用主要是相近尺度(波数)间的作用为基础。本文进一步探讨这一课题, 首先从原始变量形式的不可压缩 NS 方程组出发, 顺序论证了尺度间相互作用力, 即湍流粘性应力的近程作用特性, 引入了尺度间共振相互作用的概念, 然后把近程和共振作用的结果应用于建立近似封闭的湍流空间平均方程组和湍流多尺度方程组。

1 湍流尺度间的近程相互作用问题

湍流不同尺度间的近程作用可以形象地表述为: 空间尺度 Δx 、 Δy 和 Δz 小于 Δx_c 、 Δy_c 、 Δz_c (简略起见, 称尺度 $\Delta x < \Delta x_c$, 以下同) 的尺度(范围)对尺度大于 Δx_c 的尺度(范围)的作用(参见图 1), 主要是尺度介于 Δx_f 和 Δx_c (这里 $\Delta x_f < \Delta x_c$) 之间的相近尺度范围的近程作用。

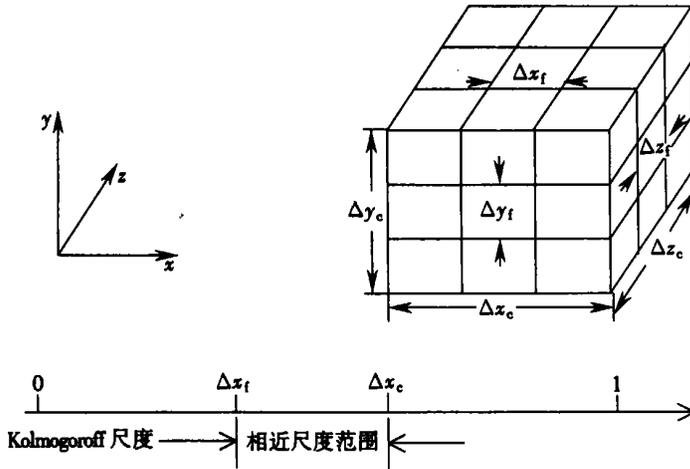


图 1 尺度间相互作用示意图(尺度以特征尺度 L 归一)

论证近程作用命题的主要步骤是: 对原始变量形式的不可压缩 Navier-Stokes(NS) 方程作空间平均运算, 求得湍流粘性应力梯度的微分表达式, 由此证明近程作用命题; 给出近程作用湍流粘性应力梯度的微分和积分表达式; 引入尺度间共振相互作用的概念并给出共振作用湍流粘性应力梯度的微分表达式。

不可压缩 Navier-Stokes(NS) 方程组为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2)$$

其中 $Re = U_0 L / \nu$, u_i 、 x_i 、 t 和 p 分别用来流速度 U_0 、边界特征长度 L 、 L/U_0 和 ρU_0^2 归一化。不可压 NS 方程组的空间平均(或称长方体滤波)方程组为

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial x_i} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial t} + U_{cj} \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} = - \frac{\partial p_c}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_j \partial x_j} - F_{ci}(u_i, U_{ci}), \quad (4)$$

其中

$$(U_{ci}, p_c) = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} (u_i, p) dv, \quad V_c = \Delta x_c \Delta y_c \Delta z_c, \quad (5a)$$

$$F_{ci}(u_i, U_{ci}) = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} (u_j - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i - U_{ci}) dv, \tag{5b}$$

U_{ci}, p_c 和 $F_{ci}(u_i, U_{ci})$ 分别表示空间平均速度 i 分量、空间平均压力和尺度小于 Δx_c 的尺度(范围) 作用于尺度大于 Δx_c 的尺度(范围) 的粘性应力梯度(简称粘性应力, 以下同)。

假设 NS 方程组 (1) ~ (2) 解连续可微, u_i 存在导数; 取小体积元 $V_c = \Delta x_c \Delta y_c \Delta z_c$ 中心为笛卡尔坐标原点, $\Delta x_c \ll 1, \Delta y_c \ll 1, \Delta z_c \ll 1$, 故有

$$U_{cj} = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} u_j dv = \frac{1}{\Delta x_c \Delta y_c \Delta z_c} \int_{-\Delta x_c/2}^{\Delta x_c/2} \int_{-\Delta y_c/2}^{\Delta y_c/2} \int_{-\Delta z_c/2}^{\Delta z_c/2} \left[u_{j0} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} \right)_0 y + \left(\frac{\partial u_j}{\partial z} \right)_0 z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)_0 x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} \right)_0 y^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} \right)_0 z^2 + \dots \right] dx dy dz =$$

$$u_{j0} + \frac{1}{24} \left[\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)_0 \Delta x_c^2 + \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} \right)_0 \Delta y_c^2 + \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} \right)_0 \Delta z_c^2 \right] + O(\Delta x_c^4, \Delta y_c^4, \dots), \tag{6a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (U_{cj}) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 + \frac{1}{24} \left[\left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x^2} \right)_0 \Delta x_c^2 + \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial y^2} \right)_0 \Delta y_c^2 + \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial z^2} \right)_0 \Delta z_c^2 \right] + O(\Delta x_c^4, \dots) \tag{6b}$$

利用式(6a)和(6b)推出

$$F_{ci}(u_i, U_{ci}) = \frac{1}{\Delta x_c \Delta y_c \Delta z_c} \int_{-\Delta x_c/2}^{\Delta x_c/2} \int_{-\Delta y_c/2}^{\Delta y_c/2} \int_{-\Delta z_c/2}^{\Delta z_c/2} \left\{ \left[u_{j0} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} \right)_0 y + \left(\frac{\partial u_j}{\partial z} \right)_0 z + \dots - u_{j0} - \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)_0 \Delta x_c^2 - \dots \right] \times \left[\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial y} \right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial z} \right)_0 z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x^2} \right)_0 x^2 + \dots - \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)_0 - \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x^2} \right)_0 \Delta x_c^2 - \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial y^2} \right)_0 \Delta y_c^2 - \dots \right] dx dy dz =$$

$$\frac{1}{12} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x} \right)_0 \Delta x_c^2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} \right)_0 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial y} \right)_0 \Delta y_c^2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial z} \right)_0 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial z} \right)_0 \Delta z_c^2 \right] + O(\Delta x_c^4, \Delta y_c^4, \dots) \tag{7}$$

同理尺度小于 Δx_f 的尺度(范围) 作用于尺度大于 Δx_f 的尺度(范围) 的湍流粘性应力同样有(参见图 1)

$$F_{fi}(u_i, U_{fi}) = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} (u_j - U_{fj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i - U_{fi}) dv =$$

$$\frac{1}{12} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x} \Delta x_f^2 + \frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial y} \Delta y_f^2 + \frac{\partial u_j}{\partial z} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial z} \Delta z_f^2 \right] + O(\Delta x_f^4, \Delta x_f^2 \Delta y_f^2, \dots), \tag{8}$$

其中

$$\begin{cases} (U_{fi}, p_f) = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} (u_j, p) dv, \\ V_f = \Delta x_f \Delta y_f \Delta z_f \quad (\Delta x_f < \Delta x_c, \Delta y_f < \Delta y_c, \Delta z_f < \Delta z_c) \end{cases} \tag{8a}$$

不失一般性, 设体积元 V_f 和 V_c 几何相似且满足关系 $\Delta x_f / \Delta x_c = \Delta y_f / \Delta y_c = \Delta z_f / \Delta z_c$, 则由式(7)和(8) 推得

$$F_{fi}(u_i, U_{\bar{f}i}) = \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2} F_{ci}(u_i, U_{ci}) + O(\Delta x_c^4, \dots) \quad (9)$$

由式(9)可知, 尺度小于 Δx_f 的尺度范围作用于尺度大于 Δx_f 的尺度范围的湍流粘性应力仅为尺度小于 Δx_c 作用于尺度大于 Δx_c 的粘性应力的 $\Delta x_f^2 / (\Delta x_c^2)$ 倍(参见表1)• 设想即使该粘性应力 $F_{fi}(u_i, U_{\bar{f}i})$ 全部施加到尺度大于 Δx_c 的尺度范围, 则粘性应力 $F_{ci}(u_i, U_{ci})$ 还比 $F_{fi}(u_i, U_{\bar{f}i})$ 大 $(1 - \Delta x_f^2 / (\Delta x_c^2)) F_{ci}(u_i, U_{ci})$ • 从物理的考虑知道, 欠缺的这部分粘性应力 $(1 - \Delta x_f^2 / (\Delta x_c^2)) F_{ci}(u_i, U_{ci})$ 只能由尺度大于 Δx_f 而小于 Δx_c 的尺度范围所提供, 从而证明了尺度小于 Δx_c 尺度范围作用于尺度大于 Δx_c 尺度范围的粘性应力主要由尺度靠近 Δx_c 的尺度范围, 更确切地说, 由尺度大于 Δx_f 而小于 Δx_c 的近程尺度(范围)所提供• 上述的陈述是近程粘性应力的物理内涵•

2 近程粘性应力的积分和微分表达式

由 $F_{ci}(u_i, U_{ci})$ 和 $F_{fi}(u_i, U_{\bar{f}i})$ 的积分表达式(5b)和式(8)可知, 尺度介于 Δx_f 和 Δx_c 之间的尺度(范围)作用于尺度大于 Δx_c 的尺度范围的粘性应力, 即近程粘性应力的积分表达式应为

$$F_{cfi}(U_{\bar{f}i}, U_{ci}) = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} (U_{\bar{f}j} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{\bar{f}i} - U_{ci}) dv, \quad (10)$$

其中 U_{ci} 和 $U_{\bar{f}i}$ 分别由式(5a)和式(8a)给出•

近程应力梯度积分式(10)的证明 把 $F_{cfi}(u_i, U_{ci})$ 积分式(5b)转化为下式

$$\begin{aligned} F_{cfi}(u_i, U_{ci}) &= \frac{1}{V_c} \int_{V_c} (u_j - U_{\bar{f}j} + U_{\bar{f}j} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i - U_{\bar{f}i} + U_{\bar{f}i} - U_{ci}) dv = \\ &= \frac{1}{V_c} \int_{V_c} (u_j - U_{\bar{f}j}) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i - U_{\bar{f}i}) dv + \frac{1}{V_c} \int_{V_c} (u_j - U_{\bar{f}j}) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{\bar{f}i} - U_{ci}) dv + \\ &= \frac{1}{V_c} \int_{V_c} (U_{\bar{f}j} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i - U_{\bar{f}i}) dv + F_{cfi}(U_{\bar{f}i}, U_{ci}) \end{aligned} \quad (11)$$

不失一般性, 设 V_c 内含有 m^2 个与 V_c 相似且大小相等的 V_f , V_c 的表面为若干 V_f 的表面所覆盖, 并恒有 $V_c = m^2 V_f$, S 表示 V_c 内任一体积元 V_f 的中心, 则式(11)右端第一项可化为

$$\frac{1}{V_c} \sum_s^{m^2} \int_{V_f} (u_j - U_{\bar{f}j}) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i - U_{\bar{f}i}) dv = F_{\bar{f}i}(u_i, U_{\bar{f}i}) + O(\Delta x_f^2 \Delta x_c^2) \quad (12a)$$

进而我们证明式(11)右端第2项的数量级为 $O(\Delta x_f^2 \Delta x_c^2)$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{V_c} \int_{V_c} (u_j - U_{\bar{f}j}) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i - U_{ci}) dv = \\ &= \frac{1}{V_c} \sum_s^{m^2} \int_{V_f} \left\{ \left[u_{js} + \left[\frac{\partial u_j}{\partial x} \right]_s (x - x_s) + \left[\frac{\partial u_j}{\partial y} \right]_s (y - y_s) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{\partial u_j}{\partial z} \right]_s (z - z_s) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right]_s (x - x_s)^2 + \dots - u_{js} - \frac{1}{24} \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right]_s \Delta x_f^2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{24} \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} \right]_s \Delta y_f^2 - \dots \right\} \times \left[\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]_s + \frac{1}{24} \left[\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x^2} \right]_s \Delta x_f^2 + \frac{1}{24} \left[\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial y^2} \right]_s \Delta y_f^2 + \dots \right. \end{aligned}$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 - \frac{1}{24} \left[\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x^2} \right]_0 \Delta x_c^2 - \dots \right\} dx dy dz =$$

$$\frac{V_f}{V_c} \sum_s^{m^2} \left[-\frac{1}{192} \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right]_s \left[\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x^2} \right]_0 \Delta x_f^2 \Delta x_c^2 - \frac{1}{192} \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right]_s \left[\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial y^2} \right]_0 \Delta x_f^2 \Delta y_c^2 - \dots \right] =$$

$$O(\Delta x_f^2 \Delta x_c^2, \dots) \quad (12b)$$

类似运算后, 可以证明式(11)右端第3项与第2项的数量级相同

$$\frac{1}{V_c} \int_{V_c} (U_{fj} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i - U_{fi}) dv = O(\Delta x_f^2 \Delta x_c^2, \dots) \quad (12c)$$

利用式(12a)~(12c)和式(9), 得到如下关系

$$F_{ci}(u_i, U_{ci}) = F_{fi}(u_i, U_{fi}) + F_{cfi}(U_{fi}, U_{ci}) + O(\Delta x_f^2 \Delta x_c^2), \quad (13)$$

$$F_{cfi}(U_{fi}, U_{ci}) = \left[1 - \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2} \right] F_{ci}(u_i, U_{ci}) + O(\Delta x_c^4, \dots) \quad (14)$$

式(14)证实了第1节中关于尺度间近程作用的物理推断。式(14)中 $F_{ci}(u_i, U_{ci})$ 代表尺度 $\Delta x < \Delta x_c$ 的全部小尺度范围作用于尺度 $\Delta x > \Delta x_c$ 的大尺度(范围)的湍流粘性应力, 参见图1, 这是通常所说的尺度彼此可以分得很开的尺度间的相互作用^[3,4], 即远程粘性应力。 $F_{cfi}(U_{fi}, U_{ci})$ 代表尺度 Δx 介于 Δx_f 和 Δx_c 之间($\Delta x_f < \Delta x < \Delta x_c$) 的相近尺度作用于尺度 $\Delta x > \Delta x_c$ 的尺度范围的粘性应力, 即近程粘性应力。表1给出湍流近程粘性应力与远程粘性应力之比值 $|F_{cfi}| / |F_{ci}|$ 随 $\Delta x_f / \Delta x_c$ 的变化关系。

表1 $|F_{cfi}| / |F_{ci}|$ 和 $|F_{fi}| / |F_{ci}|$ 随 $\Delta x_f / \Delta x_c$ 的变化

$\Delta x_f / \Delta x_c$	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$ F_{cfi} / F_{ci} $	0.36	0.51	0.64	0.75	0.84	0.91	0.96	0.99
$ F_{fi} / F_{ci} $	/	/	/	0.33	0.19	0.10	0.04	0.01

由表1中的数据可知: 相邻小尺度, 即近程尺度应从 Δx_c 到 $\Delta x_c/2$ 或到 $\Delta x_c/3$; 在这两种情况下, 近程尺度贡献了尺度 $\Delta x < \Delta x_c/2$ 或 $\Delta x_c/3$ 的整个尺度范围作用于尺度 $\Delta x > \Delta x_c$ 的粘性应力的75%或91%, 尺度 $\Delta x < \Delta x_c/2$ 或 $\Delta x_c/3$ 的更小尺度对尺度 $\Delta x > \Delta x_c$ 大尺度的影响比较次要。上述结论与文[5,6]分析槽道湍流直接数值模拟(DNS)数据库得到的主要结论, 即波数 k 低于 k_1 波谱范围的非线性动力学主要为波数介于 k_1 和 $2k_1$ 之间的波谱范围所支配的结论^[5,6]相一致。但近程作用关系(14)不仅仅适用于槽道湍流, 它适用于所有的湍流流动。

已知平均流速 U_{fi} 、 U_{ci} 连续可微存在导数。故由近程粘性应力积分表达式(10)出发, 通过类似于导出 $F_{ci}(u_i, U_{ci})$ 微分式(7)的运算, 参见式(7), 不难导出近程粘性应力的如下微分表达式

$$F_{cfi}(U_{fi}, U_{ci}) = \frac{1}{12} \left[\frac{\partial U_{fj}}{\partial x} \frac{\partial^2 U_{fi}}{\partial x_j \partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{fj}}{\partial y} \frac{\partial^2 U_{fi}}{\partial x_j \partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{fj}}{\partial z} \frac{\partial^2 U_{fi}}{\partial x_j \partial z} \Delta z_c^2 \right] + O(\Delta x_c^4, \dots) \quad (15)$$

由式(15)可知尺度 Δx 介于 Δx_f 和 Δx_c ($\Delta x_f < \Delta x < \Delta x_c$) 之间的尺度范围作用于大尺度 $\Delta x > \Delta x_c$ 的近程粘性应力与细网格(即尺度 Δx_f) 上平均速度的一阶和二阶导数成非线性关系, 而与粗网格(即尺度 Δx_c) 面积成正比。

3 共振相互作用概念和共振粘性应力

考虑尺度小于 Δx_c 但很靠近 Δx_c 的尺度范围与尺度大于 Δx_c 尺度范围之间的相互作用, 这种作用显然与近程作用有所不同; 为了与近程作用相区别, 我们引入共振相互作用的概念, 共振相互作用表示尺度小于 Δx_c 但很靠近 Δx_c 的尺度范围与尺度 $\Delta x > \Delta x_c$ 的尺度范围之间的作用。根据平均流速的定义推知, 当 $\Delta x_f \rightarrow \Delta x_c$, 也就是 $V_f \rightarrow V_c$ 时(参见图 1), 必有 $U_{fi} \rightarrow U_{ci}$, 因此由近程粘性应力公式(15)推出共振粘性应力的微分式为

$$F_{cxi}(U_{ci}, U_{ci}) = \frac{1}{12} \left[\frac{\partial U_{cj}}{\partial x} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_j \partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{cj}}{\partial y} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_j \partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{cj}}{\partial z} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_j \partial z} \Delta z_c^2 \right] + O(\Delta x_c^4, \dots) \quad (16)$$

对尺度 Δx_f , 类似地导出共振粘性应力的微分式为

$$F_{fxi}(U_{fi}, U_{fi}) = \frac{1}{12} \left[\frac{\partial U_{fj}}{\partial x} \frac{\partial^2 U_{fi}}{\partial x_j \partial x} \Delta x_f^2 + \frac{\partial U_{fj}}{\partial y} \frac{\partial^2 U_{fi}}{\partial x_j \partial y} \Delta y_f^2 + \frac{\partial U_{fj}}{\partial z} \frac{\partial^2 U_{fi}}{\partial x_j \partial z} \Delta z_f^2 \right] + O(\Delta x_f^4, \dots) \quad (17)$$

由式(16)和(17)可知尺度小于 Δx_f (或 Δx_c) 作用于尺度大于 Δx_f (或 Δx_c) 的共振粘性应力与尺度 Δx_f (或 Δx_c) 上平均速度的一阶和二阶导数成非线性关系, 又与尺度 Δx_f (或 Δx_c) 网格面积成正比。

共振粘性应力 $F_{fxi}(U_{fi}, U_{fi})$ 形式上类似于 Smagorinsky 假设的亚格子尺度(SGS)模型^[1,2], 但导出它们的概念并不相同。对应于 $F_{fxi}(U_{fi}, U_{fi})$ 的 SGS 模型为^[1~3]

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}), \quad \tau_{ij} = (c\Delta)^2 \left[\frac{\partial U_{fi}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{fj}}{\partial x_i} \right) \right]^{1/2} \left(\frac{\partial U_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{fj}}{\partial x_i} \right), \quad (18a)$$

其中 $\partial(\tau_{ij})/\partial x_j$ 对应于 $F_{fxi}(U_{fi}, U_{fi})$, c 是无量纲经验常数, Δ 表示滤波尺度或网格尺度, 选取 Δ 为

$$\Delta = (\Delta x_f \Delta y_f \Delta z_f)^{1/2} \text{ 或 } (\Delta x_f^2 + \Delta y_f^2 + \Delta z_f^2)^{1/2}. \quad (18b)$$

比较两者, 共振粘性应力不包含任何经验常数和关系, 它基于湍流相近尺度间的共振相互作用; 而亚格子尺度(SGS)应力包含了经验常数和关系, 它基于经典涡粘性概念, 即湍流尺度间的相互作用是尺度彼此可以分得很开的尺度间的远程相互作用^[1~4]。利用亚格子尺度模型可以近似封闭大涡模拟(LES)方程组, 同理, 利用共振粘性应力微分式(17)自然可以导出新的大涡模拟(LES)方程组。

4 湍流大涡模拟(LES)方程组

利用共振粘性应力张量, 见式(17), 不难建立如下的空间平均(或称长方体滤波) Navier-Stokes 方程组, 即大涡模拟(LES)方程组

$$\frac{\partial U_{fi}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (19a)$$

$$\frac{\partial U_{fi}}{\partial t} + U_{fj} \frac{\partial U_{fi}}{\partial x_j} = - \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_{fi}}{\partial x_j \partial x_j} - F_{fxi}(U_{fi}, U_{fi}) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (19b)$$

其中 U_{fi} 和 $F_{fxi}(U_{fi}, U_{fi})$ 分别在式(8a)和(17)给出。根据尺度间相互作用的近程特性, 方程组

(19b) 中的分子粘性项理应丢弃, 把它们保存下来是为了适应固壁条件。粘性流体在固壁上必须满足无滑移条件, 在固壁邻域的粘性次层中分子粘性项具有重要的作用。同理, 尺度间的近程作用意味着 LES 方程(19b) 中的共振粘性应力项, 应只作用于尺度大于 Δx_f 但很靠近 Δx_f 的局部范围, 而不是作用于可分辨尺度的全部尺度范围, 参见图 1。因此, LES 方程组(19a)、(19b) 难以准确计算湍流的平均特性, 湍流计算最好采用多尺度方法, 即最好事先把可分辨尺度划分成 2 个或更多个尺度范围, 并对这 2 个或更多个尺度范围进行求解, 只有这样才能更好地反映尺度间近程作用的物理规律。

5 湍流多尺度方程组

把可分辨尺度划分为 2 个或更多个尺度范围, 并利用尺度间相互作用的近程和共振粘性应力关系即可获得描述湍流运动的多尺度方程组。例如当把可分辨尺度划分为尺度介于 Δx_f 和 Δx_c 之间的小尺度范围和尺度介于 Δx_c 和 1 之间的大尺度范围时, 参见图 1, 支配大尺度运动的大尺度空间平均方程组为

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial x_c} = 0, \quad (20a)$$

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial t} + U_{cj} \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} = - \frac{\partial p_c}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_j \partial x_j} - F_{cfi}(U_{fi}, U_{ci}) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (20b)$$

把 LES 方程组(19) 减去大尺度方程组(20), 即可得到支配小尺度(细网格) 平均量相对大尺度(粗网格) 平均量涨落运动的“小尺度”方程组

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(U_{fi} - U_{ci}) = 0, \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(U_{fi} - U_{ci}) + (U_{fj} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{fi} - U_{ci}) = \\ - \frac{\partial}{\partial x_i}(p_f - p_c) - U_{cj} \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{fi} - U_{ci}) - (U_{fj} - U_{cj}) \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} + \\ \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}(U_{fi} - U_{ci}) + F_{cfi}(U_{fi}, U_{ci}) - F_{ffi}(U_{fi}, U_{fi}). \end{aligned} \quad (21b)$$

其中 U_{ci} 和 U_{fi} 分别在式(5a) 和(8a) 给出, 近程粘性应力 $F_{cfi}(U_{fi}, U_{ci})$ 可用它的积分公式(10) 或微分公式(15), 共振粘性应力 $F_{ffi}(U_{fi}, U_{fi})$ 见式(17); Δx_f 及 Δy_f 和 Δz_f (简称为 Δx_f) 与 LES 的滤波尺度一致而 $\Delta x_c \approx (2 \sim 3) \Delta x_f$ 。可见大小尺度方程组(20) 和(21) 为不包含任何经验常数和经验关系的近似封闭方程组。在 LSS 方程组中保留分子粘性项的原因与 LES 方程组(19) 中保留分子粘性项的原因相同。在大尺度方程(20b) 中, 近程粘性应力由尺度 Δx 介于 Δx_f 和 Δx_c ($\Delta x_f < \Delta x < \Delta x_c$) 之间的可分辨小尺度, 即近程小尺度所提供。小尺度方程(21b) 中 F_{ffi} 表示不可分辨的更小尺度 Δx ($\Delta x < \Delta x_f$) 作用于可分辨小尺度 Δx ($\Delta x_f < \Delta x < \Delta x_c$) 的共振粘性应力。在粗细网格几何相似且满足 $\Delta x/\Delta x_c = \Delta y/\Delta y_c = \Delta z/\Delta z_c$ 的条件下, 由式(9) 和式(14) 推知:

$$\frac{F_{ffi}}{F_{cfi}} \approx \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2} \left(1 - \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2} \right)^{-1},$$

参见表 1。因此作用于可分辨小尺度 Δx ($\Delta x_f < \Delta x < \Delta x_c$) 的粘性应力主要为可分辨大尺度 Δx ($\Delta x > \Delta x_c$) 所提供, 不可分辨更小尺度的贡献比较次要。对大小尺度(LSS) 方程(20) ~ (21) 的上述说明与数值处理槽道湍流 DNS 数据库得到的结论^[5, 6] 一致; 文[5, 6] 的一个主要结

论已在对表 1 所作的说明中给出, 另一个主要结论是: 波数 k 介于 k_1 和 $2k_1$ 之间的亚格子尺度动力学主要为它们与波数 $k < k_1$ 的已分辨尺度间的非线性相互作用所支配, 更高波数的影响比较次要。

LSS 方程组 (20) 和 (21) 与大涡模拟 (LES) 的传统方程组相比, 前者不可分辨尺度只作用于可分辨尺度的小尺度范围, 后者则作用于可分辨尺度的全部尺度范围, 因此前者比后者可以更好地反映近程作用的物理规律及其影响。另一方面, 不可分辨尺度同样包含了宽广的时、空尺度范围, 因此, 要用少数参量和公式来描述不可分辨尺度的完整效应, 必然存在不确定的不可知因素。在多尺度方法中, 上述不可知因素的影响被局限在可分辨尺度的小尺度范围, 而在传统 LES 方法中, 上述不可知因素的影响将波及可分辨尺度的整个尺度范围。多尺度方法可同时提供湍流空间平均和涨落运动等资料。以上是多尺度方法与传统 LES 方法相比的一些特点。

多尺度方法在可分辨尺度的不同尺度范围之间引入了动量、能量传递的非线性物理机制, 因此能够更好地反映湍流大涡“产生”小涡、能量级串 (cascade) 等湍流实验现象和人们长期积累的经验认识。多尺度方法给出的平均、涨落运动和尺度间的交换诸特性可由湍流直接数值模拟 (DNS) 的结果获得, 为此必须进行“事后”的尺度区分, 并对 DNS 数据库进行数值处理。数值处理 DNS 数据库得到的结果与多尺度方法结果的一致性和差异, 是值得研究的课题。下节对不可压平面剪切流研究了这一问题。

此外应提到, 分子粘性项为线性项, 近程和共振湍流粘性项均为非线性项。能量在可分辨尺度的最小尺度 Δx_f 处不应“累积”, 粘性耗散在 Δx_f 处必须占优, 即方程组 (21b) 右端的后 3 项之和应大于零; 若该条件不满足, 则可采用尺度范围多于 2 个的多尺度方程, 或适当增大共振粘性应力项, 亦可采用常见的亚格子尺度 (SGS) 模式取代共振粘性应力项。

6 不可压平面混合层流动的三维时间演化

对不可压平面混合层流动的三维时间演化问题, 利用拟谱方法数值求解了湍流多尺度方程组 (20) 和 (21) 以及非定常 Navier-Stokes 方程组^[8,9]。

对平面混合层流动的三维演化, 初始条件如下

$$\begin{cases} (U_c, V_c, W_c) = (U_0 \tanh(2z), 0, 0), \\ U_f - U_c = A_2 \sin x \cos y + A_3 \sin x \cos y \cos z, \\ V_f - V_c = -A_2 \cos x \sin y - A_3 \cos x \sin y \cos z, \\ W_f - W_c = 0, (x, y, z) = \frac{1}{\delta_w^0} (x, y, z), \end{cases} \quad (22)$$

其中 $A_2, A_3 = 10^{-4}$ 分别是二维和三维初始扰动的振幅。 U_0 为两股来流的平均速度。流速、时间 t 、坐标变量和压力分别用 $U_0, T_0 = \delta_w^0 / U_0, \delta_w^0$ 和 ρU_0^2 归一化, δ_w^0 为初始涡量厚度, $Re = U_0 \delta_w^0 / \nu$, ν 为运动学粘性系数。为更好地分析大小尺度 (LSS) 方程组 (20) 和 (21) 解的性质, 并与 NS 方程组数值解进行全面的比较, 对 LSS 方程组和 NS 方程组的求解, 采用了同样的网格体系, 例如对 $Re = 10^2 \delta_w^0 / \nu$, 网格点数在 x, y 和 z 方向分别为 $32 \times 64 \times 128$ 。一些典型结果如下: 平均速度、平均脉动速度、平均剪切粘性应力与 NS 解的数值处理结果一致, 参见图 2~ 图 3。LSS 方程组计算同样提供了一些新结果, 例如给出最大脉动速度、最大剪切粘性应力的变化与各自平均值的变化有明显不同, 特别是最大脉动速度和最大剪切粘性应力几乎同时出现了两

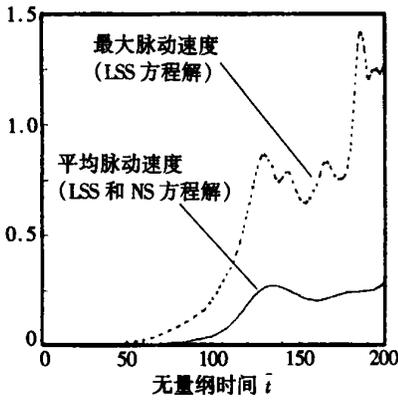


图2 平面混合层流动平均
和最大脉动速度

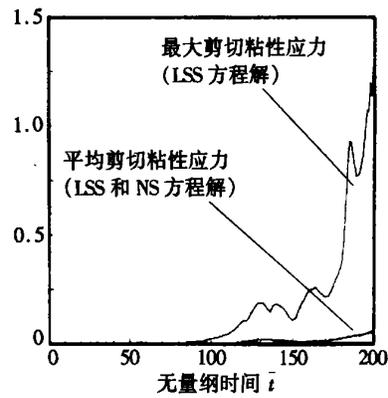


图3 平面混合层流动平均和
最大剪切粘性应力

次陡增;出现陡增的时间和大小尺度运动之间能量的反传递时间段一致,也与大尺度展向涡和肋涡卷起的时间段一致,上述事实说明大小尺度运动之间的动量、能量交换是大尺度运动变化的主要物理起因。最大脉动速度和最大剪切粘性应力的突增显然与转捩流中的猝发(burst)现象相对应。应该指出,相应NS计算结果的数值处理并未得到最大脉动速度和最大剪切粘性应力及其两次突增,参见图2和图3。

7 结束语

湍流包含了宽广的时间和空间尺度范围,尺度间的非线性相互作用是支配湍流动力学的主要物理机制;由于相互作用主要是相近尺度间的近程作用,因此湍流计算理应或者说最好采用多尺度方法。文中研究了尺度间的近程作用规律,得到了湍流近程和共振粘性应力公式,作为应用给出了不包含经验常数或经验关系的近似封闭多尺度方程组以及大涡模拟(LES)方程组,并讨论了多尺度方法计算湍流的优点。

王为国博士完成不可压平面剪切层流动的有关数值计算,作者在此表示感谢。

[参 考 文 献]

- [1] 是勋刚. 湍流[M]. 天津: 天津大学出版社, 1994.
- [2] Lumley J L. Whither turbulence? Turbulence at the crossroads[J]. Lecture Notes in Physics, 1989, 357: 313—374.
- [3] Frish V, Orszag S A. Turbulence: challenges for theory and experiment[J]. Physics Today, 1990, 10(1): 23—32.
- [4] Hinze J O. Turbulence [M]. 2nd Ed. New York: McGraw-Hill Book Co, 1975.
- [5] Domaradzki J A, Saiki E M. A subgrid_scale model based on the estimation of unresolved scales of turbulence[J]. Phys Fluids, 1997, 9(7): 2148—2164.
- [6] ZHOU Ye, Speziale C G. Advances in the fundamental aspects of turbulence: energy transfer, interacting scales, and self_preservation in isotropic decay [J]. Appl Mech Rev, 1998, 51(4): 267—301.
- [7] GAO Zhi, ZHUANG Feng_gan. Time_space scale effects in computing numerically flowfields and a new approach to flow numerical simulation[J]. Lecture Notes in Physics, 1995, 453: 256—262.
- [8] WANG Wei_guo, GAO Zhi, ZHUANG Feng_gan. A numerical comparison of the large and small scale

- (LSS) equations with the Navier-Stokes equations: the three dimensional evolution of a planar mixing layer flow[A]. In: ZHUANG Feng gan Ed. Proceedings of the International Symposium on Computational Fluid Dynamics [C]. Beijing: International Academic Publisher, 1997, 484—490.
- [9] 高智. 湍流计算的多尺度模型与尺度间相互作用规律[J]. 自然科学进展, 2003, 13(11): 1147—1153.
- [10] Hughes T J R, Mazze L, Oberai A A. The multiscale formulation of large eddy simulation: Decay of homogenous isotropic turbulence[J]. Phys Fluids, 2001, 13(2): 505—512.
- [11] 周光炯, 严宗毅, 许世雄, 等. 流体力学[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2000.

Short_ and Resonant_Range Interactions Between Scales in Turbulence and Their Applications

GAO Zhi

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P. R. China)

Abstract: Interactions between different scales in turbulence were studied starting from the incompressible Navier-Stokes equations. The integral and differential formulae of the short_range viscous stresses, which express the short_range interactions between contiguous scales in turbulence, were given. A concept of the resonant_range interactions between extreme contiguous scales was introduced and the differential formula of the resonant_range viscous stresses was obtained. The short_ and resonant_range viscous stresses were applied to deduce the large_eddy simulation (LES) equations as well as the multiscale equations, which are approximately closed and do not contain any empirical constants or relations. The properties and advantages of using the multiscale equations to compute turbulent flows were discussed. The short_range character of the interactions between the scales in turbulence means that the multiscale simulation is a very valuable technique for the calculation of turbulent flows. A few numerical examples were also given.

Key words: turbulence; interacting scale; eddy viscosity; short_range viscous stress; resonant_range viscous stress; multiscale equation