应用数学和力学，第9卷第2期(1988年2月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

横观各向同性轴对称问题的通解

丁浩江　　徐博侯

(浙江大学，1987年1月11日收到)

摘　　要

本文按应力求解轴对称问题，以统一的格式导出了一系列有实用价值的通解，其中有的是已有的著名的通解，有的尚未见文献报导．同时证明了各种通解的完备性．

一、引　　言

横观各向同性迴转体的轴对称变形问题，是由Лехницкий[1,2]首先提出，他推广了Love解，并计算了许多实例．Elliott[3]得到了用两个类调和函数表示的三维问题解，特别适用于轴对称变形情形，同时也导出了Лехницкий解．文[4,5]应用Elliott解求出了许多重要的课题．胡海昌所导出的三维问题的解，在文[6]的应用中所给出的形式，在轴对称变形情形，可化归Лехницкий解和Elliott解．文[7]从位移表示的平衡方程出发系统地推导了Лехницкий解，并补充了完备性的证明，还推广了Almansi定理，用以证明Elliott解的完备性．本文按应力求解轴对称问题，以统一的格式导出了一系列通解，其中有的尚未见文献报导，有的包含了上述的两个著名通解．同时，在推导的过程中，避免使用特殊的定理，以常用的运算证明了各种通解的完备性．

本文限于研究与文[7]有相同限制的旋转体，即它由子午面所截的区域R具有性质：平行于坐标轴的直线交R的边界至多两点．

二、应力函数和通解

横观各向同性弹性体的平衡方程、应力应变关系、应变位移关系以及用应力表示的应变协调方程，分别如文[1]的(78.8)，(78.1)，(78.7)和(78.10)所示．不难导出不计体力的平衡方程的解的一般形式[10]：

$$\tau_{rz}=-\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z},\quad \sigma_z=\nabla_*^2 F,\quad \sigma_r=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\frac{\partial G}{r\partial r},\quad \sigma_\theta=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \tag{2.1}$$

$$\nabla_*^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r} \tag{2.2}$$

式中，F和G是两个任意函数，称为应力函数．将(2.1)代入用应力表示的应变协调方程，得

$$(a_{11}-a_{12})\left(\frac{\partial G}{r\partial r}-\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}\left[a_{12}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\frac{\partial G}{r\partial r}\right)+a_{11}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\right)+a_{13}\nabla_*^2 F\right] \tag{2.3}$$

$$-a_{44}\frac{\partial^3 F}{\partial r\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial r}\left[a_{13}\nabla_*^2 G+2a_{13}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+a_{33}\nabla_*^2 F\right]$$
$$=r\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[a_{11}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\right)+a_{12}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\frac{\partial G}{r\partial r}\right)+a_{13}\nabla_*^2 F\right] \tag{2.4}$$

由于
$$\frac{\partial G}{r\partial r}-\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}=-r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial G}{r\partial r}\right)$$

将(2.3)对r积分一次，整理后得

$$a_{11}\nabla_*^2 G+(a_{11}+a_{12})\,\partial^2 F/\partial z^2+a_{13}\nabla_*^2 F=B(z) \tag{2.5}$$

式中$B(z)$是z的任意函数。

利用(2.5)消去(2.4)式右端含F的各项，然后对r积分，得

$$a_{13}\nabla_*^2 G+(2a_{13}+a_{44})\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+a_{33}\nabla_*^2 F=(a_{11}-a_{12})\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}-\frac{1}{2}r^2 B''(z)+C(z) \tag{2.6}$$

式中$C(z)$是z的任意函数。

再利用(2.5)消去(2.6)中的 $\nabla_*^2 G$，可得

$$a_{11}(a_{11}-a_{12})\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}-[a_{11}a_{44}+a_{13}(a_{11}-a_{12})]\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)\nabla_*^2 F$$
$$=a_{13}B(z)+a_{11}r^2 B''(z)/2-a_{11}C(z) \tag{2.7}$$

令

$$G=eH \tag{2.8}$$

式中
$$e=(a_{11}+a_{12})/a_{11} \tag{2.9}$$

将式(2.8)代入(2.5)，(2.7)，并用$(a_{11}-a_{12})$乘(2.5)各项，然后用$(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)$遍除(2.5)和(2.7)各项，得

$$d\nabla_*^2 H+a\nabla_*^2 F+d(\partial^2 F/\partial z^2)=dP(z) \tag{2.10}$$

$$d\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}-\nabla_*^2 F-c(\partial^2 F/\partial z^2)=fP(z)+gr^2 P''(z)-dQ(z) \tag{2.11}$$

式中 $P(z)=B(z)/(a_{11}+a_{12})$，$Q(z)=a_{11}C(z)/(a_{11}^2-a_{12}^2)$ (2.12)

以及

$$\left.\begin{aligned}&a=a_{13}(a_{11}-a_{12})/(a_{11}a_{33}-a_{13}^2),\quad d=(a_{11}^2-a_{12}^2)/(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)\\&c=[a_{11}a_{44}+a_{13}(a_{11}-a_{12})]/(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)\\&f=a_{13}(a_{11}+a_{12})/(a_{11}a_{33}-a_{13}^2),\quad g=a_{11}(a_{11}+a_{12})/[2(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)]\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

在式(2.13)中a,c,d的记号与文[1]所用的一致（参见文[1]的（78.12））。

将(2.8)代入(2.1)，则有

$$\tau_{rz}=-\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z},\quad \sigma_z=\nabla_*^2 F,\quad \sigma_r=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+e\frac{\partial H}{r\partial r},\quad \sigma_\theta=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+e\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \tag{2.14}$$

以上推导表明，已将平衡方程和应力表示的协调方程化为（2.10)，(2.11）和（2.14)。应力函数H和F各由两部分组成。一部分是对应(2.10)和(2.11)的齐次方程通解，另一部分是对应(2.10)和(2.11)的非齐次方程的特解。我们很容易看出对应(2.10）和（2.11）的等式

右端项的特解可写成如下形式

$$H=gr^2H_2(z)/d+H_0(z),\quad F=F_0(z) \tag{2.15}$$

将它们代入(2.10)和(2.11)，不难求得确定H_2,H_0和F_0的微分方程，由此得到

$$\left.\begin{aligned}&H_2''(z)=P''(z)\\&dH_0''(z)-cF_0''(z)=fP(z)-dQ(z)\\&4gH_2(z)+dF_0''(z)=dP(z)\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

由(2.16)得到

$$\left.\begin{aligned}&H_2(z)=P(z)+k_0z+k_1\\&dF_0''(z)=(d-4g)P(z)-4gk_0z-4gk_1\\&dH_0''(z)=fP(z)-dQ(z)-cF_0''(z)\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

式中k_0，k_1是积分常数。将(2.15)代入(2.14)，并利用(2.17)，得到相应的应力

$$\left.\begin{aligned}&\tau^*_{rz}=0,\quad \sigma^*_z=0\\&\sigma^*_r=\sigma^*_\theta=(d-4g+2ge)P(z)+2gk_0(e-2)z+2gk_1(e-2)\end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

利用(2.13)容易验算$d-4g+2ge=0$，从而(2.18)简化为

$$\tau^*_{rz}=\sigma^*_z=0,\quad \sigma^*_r=\sigma^*_\theta=m_1+m_0z \tag{2.19}$$

式中 $m_0=2g(e-2)k_0,\quad m_1=2g(e-2)k_1$

现在，我们来证明由(2.19)所表示的应力状态也包含在(2.10)和(2.11)的齐次方程的通解中。实际上，对应于(2.19)的应力状态时，(2.14)成为

$$\partial^2F/\partial r\partial z=0,\quad \nabla^2_*F=0 \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial z^2}+e\frac{\partial H}{r\partial r}=\frac{\partial^2F}{\partial z^2}+e\frac{\partial^2H}{\partial r^2}=m_1+m_0z \tag{2.21}$$

按(2.20)的第一式有

$$F=f_1(r)+f_2(z) \tag{2.22}$$

代入(2.20)的第二式并积分后得

$$f_1(r)=c_0\ln r+c_1 \tag{2.23}$$

式中c_0,c_1是积分常数。由(2.21)式可得

$$\frac{\partial^2H}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right)=0$$

即

$$H=r^2h_1(z)/2+h_2(z) \tag{2.24}$$

将(2.22)和(2.24)代入(2.21)的第二个等式，得

$$f_2''(z)+eh_1(z)=m_0z+m_1 \tag{2.25}$$

为确定h_1,h_2和f_2，将(2.22)和(2.24)代入(2.10)和(2.11)的齐次方程，

$$2h_1(z)+f_2''(z)=0 \tag{2.26}$$

$$dr^2h_1''(z)/2+dh_2''(z)-cf_2''(z)=0 \tag{2.27}$$

由于$e\neq2$，联立求解(2.25)，(2.26)，(2.27)可得到h_1,h_2,f_2的表达式，将它们和 (2.23)一起代入(2.22)和 (2.24)，即得F和 H 的表达式，其中总共有五个积分常数。于是，不失一般性可让(2.10)，(2.11)等式右端的任意函数$P(z)=Q(z)=0$，即

$$d\nabla^2_*H+a\nabla^2_*F+d(\partial^2F/\partial z^2)=0 \tag{2.28}$$

$$d\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}-\nabla_*^2 F-c(\partial^2 F/\partial z^2)=0 \tag{2.29}$$

也就是说，(2.10)，(2.11)，(2.14)和(2.28)，(2.29)，(2.14) 在用以表示应力时是等价的。

利用应变位移关系和应力应变关系以及(2.14)，(2.28)，(2.29)各式，不难积分求得位移表达式

$$u=-e(a_{11}-a_{12})\partial H/\partial r,\ w=(\partial/\partial z)[e(a_{11}-a_{12})H-a_{44}F] \tag{2.30}$$

于是H和F也可称为位移函数。从位移的角度出发，现在(2.30)中 F，H 的任意性减为四个积分常数。

由于前面已经证明，(2.10)，(2.11)，(2.14) 和 (2.28)，(2.29)，(2.14) 在用以表示应力时是等价的，从而从它们各自出发所得到的位移表达式至多差一个刚体位移（即 z 方向的平移）。容易证明，(2.30)已经包含了一个任意刚体位移，所以任一真实的解都已包含在解(2.30)之中。由于本节推导中每一步都是可逆的，所以，用任意满足(2.28)，(2.29)的 F，H来表示的位移 (2.30) 必定是弹性力学问题的解。这样，事实上已证明了，(2.30) 是本文所讨论的问题的通解，并且是完备的。

三、用两个类调和函数表示通解

H和F所应满足的方程(2.28)，(2.29)仍嫌复杂，并且是耦合的。在本节中，我们首先希望能找到用两个函数表示的通解，而这两个函数所需满足的微分方程比较简单，并且是解耦的。由文[1]的(78.14)知道

$$s_1^2+s_2^2=(a+c)/d,\quad s_1^2 s_2^2=1/d \tag{3.1}$$

命

$$H=H_1-(a/d)F+(s_1^2+s_2^2)F/2 \tag{3.2}$$

并代入(2.28)和(2.29)，就导出

$$\nabla_*^2 H_1+\frac{1}{2}\left(s_2^2\nabla_*^2 F+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(s_1^2\nabla_*^2 F+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)=0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2}-\frac{1}{2}s_1^2\left(s_2^2\nabla_*^2 F+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{2}s_2^2\left(s_1^2\nabla_*^2 F+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)=0 \tag{3.4}$$

当 $s_1^2\neq s_2^2$时，将(3.3)分别乘$s_i^2(i=1,2)$，并分别与(3.4)相加，则导出如下结果：

$$\nabla_i^2 F_i=0 \tag{3.5}$$

式中

$$\nabla_i^2=\nabla_*^2+\partial^2/s_i^2\partial z^2 \qquad (i=1,2)$$

$$F_1=H_1+(s_1^2-s_2^2)F/2,\ F_2=H_1-(s_1^2-s_2^2)F/2 \tag{3.6}$$

由(3.6)可以解出H_1,F，然后代入(3.2)，则

$$F=(F_1-F_2)/(s_1^2-s_2^2),H=\frac{1}{2}\left[1+\frac{c-a}{d(s_1^2-s_2^2)}\right]F_1+\frac{1}{2}\left[1-\frac{c-a}{d(s_1^2-s_2^2)}\right]F_2 \tag{3.7}$$

将它们代入(2.30)，并命

$$F_1=-\frac{2\rho d(s_1^2-s_2^2)\phi_1}{e[d(s_1^2-s_2^2)+c-a]},\quad F_2=-\frac{2\rho d(s_1^2-s_2^2)\phi_2}{e[d(s_1^2-s_2^2)-c+a]} \tag{3.8}$$

则得

$$\left.\begin{aligned}&u=\rho(a_{11}-a_{12})\frac{\partial(\phi_1+\phi_2)}{\partial r}\\&w=-\rho(a_{11}-a_{12})\frac{\partial(\phi_1+\phi_2)}{\partial z}+\frac{a_{44}\rho d}{e}\left(\frac{1}{ds_1^2-a}\cdot\frac{\partial\phi_1}{\partial z}-\frac{1}{a-ds_2^2}\cdot\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

式中

$$\rho=e(d-ac)/d \tag{3.10}$$

显然，ϕ_i满足类调和方程

$$\nabla_i^2\phi_i=0\qquad(i=1,2) \tag{3.11}$$

容易验证，(3.9)与文[3]的(2.4.8)和(2.4.9)相同，即Elliott解[3]。

如果 $s_1^2=s_2^2=s^2$，则(3.2)，(3.3)和(3.4)简化为

$$H=H_1+F(c-a)/2d \tag{3.12}$$

$$\nabla_*^2H_1+s^2\nabla_*^2F+\partial^2F/\partial z^2=0 \tag{3.13}$$

$$\partial^2H_1/\partial z^2-s^2(s^2\nabla_*^2F+\partial^2F/\partial z^2)=0 \tag{3.14}$$

将(3.13)乘s^2与(3.14)相加，得

$$\nabla_s^2H_1=0 \tag{3.15}$$

式中 $\nabla_s^2=\nabla_*^2+\partial^2/s^2\partial z^2$。这表明$H_1$是一个类调和函数。为了求解$F$，可以利用 (3.14)，也可利用(3.13)，于是F的通解可以分别写成如下两种形式

$$F=\frac{1}{s^2}\left(F_0+\frac{1}{2}z\frac{\partial H_1}{\partial z}\right)=\frac{2d}{a+c}\left(F_0+\frac{1}{2}z\frac{\partial H_1}{\partial z}\right) \tag{3.16}$$

或

$$F=\frac{1}{s^2}\left(F_0-\frac{1}{2}r\frac{\partial H_1}{\partial r}\right)=\frac{2d}{a+c}\left(F_0-\frac{1}{2}r\frac{\partial H_1}{\partial r}\right) \tag{3.17}$$

式中，F_0满足类调和方程

$$\nabla_s^2F_0=0 \tag{3.18}$$

将(3.16)和(3.12)代入(2.30)，则有

$$u=-\frac{c-a}{4(c+a)}\frac{\partial}{\partial r}(\varphi_0+z\varphi_2),\quad w=\varphi_2-\frac{c-a}{4(c+a)}\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_0+z\varphi_2) \tag{3.19}$$

式中

$$\varphi_2=2e(a_{11}-a_{12})\partial H_1/\partial z,\quad \varphi_0=4e(a_{11}-a_{12})[(c+a)H_1/(c-a)+F_0] \tag{3.20}$$

显然，φ_0，φ_2应满足

$$\nabla_s^2\varphi_i=0\qquad(i=0,2) \tag{3.21}$$

将(3.17)和(3.12)代入(2.30)，则有

$$u=\varphi_1-\frac{c-a}{4(c+a)}(\varphi_0+r\varphi_1),\quad w=-\frac{c-a}{4(c+a)}(\varphi_0+r\varphi_1) \tag{3.22}$$

式中

$$\varphi_1=-2e(a_{11}-a_{12})\partial H_1/\partial r,\quad \varphi_0=4e(a_{11}-a_{12})(F_0-(c+a)H_1/(c-a)) \tag{3.23}$$

按(3.15)，(3.18)，φ_0应满足(3.21)，而由于

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla_s^2 H_1=\left(\nabla_s^2-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial H_1}{\partial r}$$

则φ_1应满足

$$(\nabla_*^2-1/r^2)\varphi_1=0 \tag{3.24}$$

这样，我们用简单而不失一般性的办法证明了轴对称问题的通解可用两个类调和函数来表示：在$s_1^2\neq s_2^2$时，表示成（3.9），其中ϕ_i满足（3.11）；在$s_1^2=s_2^2$时，有通解（3.19）或（3.22），φ_i分别满足(3.21)和(3.24)。

对于各向同性体，记泊桑比为μ，有

$$(c+a)/(c-a)=1-\mu,\quad s^2=1 \tag{3.25}$$

则(3.19)和(3.22)化为Папкович-Neuber解[8,10]。

四、用类双调和函数表示通解

将(2.29)乘a后与(2.28)相加，得

$$d\left(\nabla_*^2+a\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)H+(d-ac)\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0$$

引入函数ψ，使

$$H=(d-ac)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},\quad F=-d\left(\nabla_*^2+a\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi \tag{4.1}$$

则上式可以满足。将(4.1)代入(2.14)，并命

$$d\frac{\partial\psi}{\partial z}=\varphi \tag{4.2}$$

则得到

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{rz}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla_*^2+a\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi,\quad \sigma_z=\frac{\partial}{\partial z}\left(c\nabla_*^2+d\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi\\&\sigma_r=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+b\frac{\partial}{r\partial r}+a\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi,\quad \sigma_\theta=-\frac{\partial}{\partial z}\left(b\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r}+a\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

式中

$$b=1+e(ac-d) \tag{4.4}$$

将(4.1)代入(2.28)或(2.29)，并注意到(3.1)和(4.2)，就得到

$$\nabla_1^2\nabla_2^2\varphi=0 \tag{4.5}$$

将(4.3)和(4.5)与文[1]的(78.11)和(78.17)相比较，显然(4.3)就是Лехницкий解。各向同性时，(4.3)退化成Love解，命$\psi=(1-\mu)\phi$，就与文[8]的(189)式完全相同，(4.5)退化为双调和方程。

现在推导另一形式的解。首先，解(2.30)写成如下更简洁的形式：

$$u=-\frac{\partial S}{\partial r},\quad w=\frac{\partial}{\partial z}\left(S-\frac{c-a}{d}T\right) \tag{4.6}$$

式中

$$S=e(a_{11}-a_{12})H,\quad T=e(a_{11}-a_{12})F \tag{4.7}$$

相应地(2.28)，(2.29)成为

$$d\nabla_*^2 S + a\nabla_*^2 T + d\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,\ d\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \nabla_*^2 T - c\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{4.8}$$

将(4.8)第一式乘a/d^2，第二式乘$1/d$，然后相加，得

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(S - \frac{c-a}{d}T\right) + \frac{1}{d^2}\nabla_*^2[daS + (a^2-d)T] = 0 \tag{4.9}$$

引入函数U，使

$$S - \frac{c-a}{d}T = \nabla_*^2 U,\ da\,S + (a^2-d)T = -d^2\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{4.10}$$

则(4.9)得以满足。由(4.10)可以解出

$$S = \frac{1}{(ac-d)}\left[(a^2-d)\nabla_*^2 U - d(c-a)\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right],\ T = -\frac{d}{(ac-d)}\left[a\nabla_*^2 U + d\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right] \tag{4.11}$$

将(4.11)和(4.10)的第一式代入(4.6)，得

$$u = -\frac{1}{(ac-d)}\frac{\partial}{\partial r}\left[(a^2-d)\nabla_*^2 U - d(c-a)\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right],\ w = \frac{\partial}{\partial z}\nabla_*^2 U \tag{4.12}$$

将(4.11)代入(4.8)任一式，均得到U应满足的如下方程

$$\nabla_1^2\nabla_2^2 U = 0 \tag{4.13}$$

如果命$\partial U/\partial r = \Phi$，则(4.12)可改写成

$$u = -\frac{1}{(ac-d)}\left[(a^2-d)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r}\right) - d(c-a)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right],\ w = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r}\right) \tag{4.14}$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla_i^2 = \left(\nabla_i^2 - \frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r} \qquad (i=1,2) \tag{4.15}$$

于是由(4.13)可导出Φ应满足的方程

$$\left(\nabla_1^2 - \frac{1}{r^2}\right)\left(\nabla_2^2 - \frac{1}{r^2}\right)\Phi = 0 \tag{4.16}$$

各向同性时，(4.14)和(4.16)化为Michell解：

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{\mu(2-\mu)}\left[(2\mu-1)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r}\right) - 2(1-\mu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right] \\ w &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r}\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\Phi = 0 \tag{4.18}$$

对(2.28)和(2.29)的不同形式的简化和求解，还可以获得其他形式的通解。以上各种通解的特点是，位移表达式中不出现高于二次导数的项。

五、结　　论

横观各向同性体轴对称问题，不计体力，按应力求解。本文首先给出通解(2.30)，(2.28)和(2.29)，证明它们与平衡方程和应力表示的协调条件是等价的；其次由这三式出发，经过不失一般性的变换和简化以及求解，导出了一系列有实用价值的通解：(3.9)，

(3.19), (3.22), (4.3)和(4.14)。其中 (4.14) 尚未见报导；$s_1^2=s_2^2$ 时的通解 (3.19) 和 (3.22) 包含了各向同性时的 Папкович-Neuber 解；(3.9), (4.3) 是著名的 Elliott 解和 Лехницкий解，而当各向同性时，(4.3)退化为Love解。

参考文献

[1] Lekhniskii, S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers (1981).

[2] Лехницкий С. Г., Симметричная деформация и кручение тела вращения с анизотролией частноговита, *ПММ*, **4**, 3 (1940), 43—60.

[3] Elliott, H. H., Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **44** (1948), 522—533.

[4] Elliott, H. H., Axial symmetric stress distributions in hexagonal crystals, the problem of the plane and related problems, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **45** (1949), 621—630.

[5] Shield, R. T., Notes on problems in hexagonal aeolotropic materials, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **47** (1951), 401—409.

[6] 胡海昌，横观各向同性的半无限弹性体的若干问题，物理学报，**10**，3 (1954)，239—258.

[7] Eubanks, R. A. and E.Sternberg, On the axisymmetric problem of elasticity theory for a medium with transverse isotropy, *Journal of Rational Mechanics Analysis*, **3** (1954), 89—101.

[8] Timoshenko, S. P. and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, third edition (1970).

[9] Папкович П. Ф., *Теория Упругости*, Оборонгиз (1939).

[10] 丁浩江，关于轴对称问题应力函数，上海力学，**8**，1 (1987)，42—48.

General Solutions of Axisymmetric Problems in Transversely Isotropic Body

Ding Hao-jiang   Xu Bo-hou

(*Zhejiang University, Hangzhou*)

Abstract

In this paper we solve axisymmetric problems by stress and deduce a series of valuable general solutions by unified method. Some of them are well-known solutions, and others have not appeared in the literature. We also prove the completeness of these general solutions.