

# 平面变形正向挤压、反向挤压的参变量 积分解法(减缩率 $R=0.5$ )\*

赵德文 张强

(东北工学院, 1985年12月29日收到)

## 摘要

对断面收缩率为 $R=0.5$ 的平面变形正向、反向挤压滑移线场之刚性区边界滑移线引进参变量 $t$ 进行换元积分, 求得垫片或凹模上的挤压力。对反向挤压, 应力影响系数 $\bar{p}/2k=1.29$ , 凸模压力为 $5.14k$ ; 对正向挤压, 垫片平均压力为 $\bar{p}=2.57k$ ,  $\bar{p}/2k=1.29$ 。参量积分求得的上述结果与目前惯用解法之结果完全相同。

## 一、前言

参量积分法对滑移线场求解变形力是一种新的求解方法。其基本要点是, 对刚性区边界滑移线之轨迹方程引进参变量 $t$ , 将滑移线转角 $\varphi$ 与坐标轴 $x, y$ 间关系化为可积函数, 然后对刚性区边界进行换元积分求得变形力。本文旨在以参变量积分法专门求解正向、反向挤压的变形力问题, 并与目前的传统解法进行比较, 以了解与讨论积分解法的某些特点。

## 二、平面变形挤压的参变量积分解法

1) 反向挤压 平面变形反向挤压滑移线场及速端图如图1, 其断面收缩率为 $R=0.5$ , 在此我们不再重复证明速端图附合体积不变定律, 承认惯用解法的全部假设条件<sup>[1][2][3]</sup>。

由图1(a)知: 有心扇形场 $ABC$ 的参数方程为:

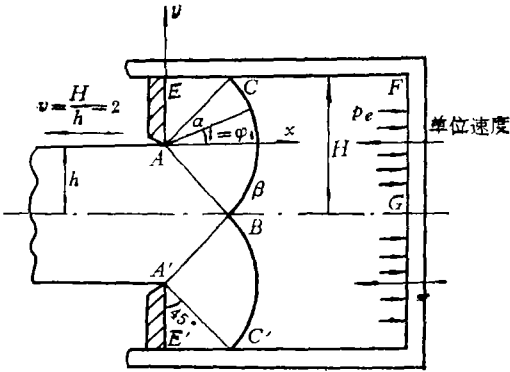
$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= a \sin t \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中 $a$ 为有心扇形场之半径 $AC$ 。 $t$ 为 $a$ 线与 $x$ 轴之夹角。

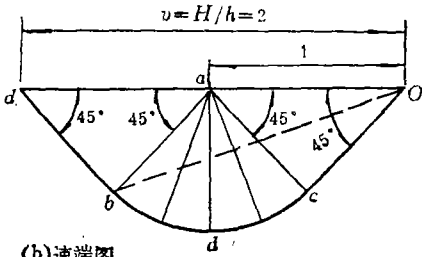
由图1(a)知: 沿 $\beta$ 线 $BC$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_i &= \frac{y}{x} = \frac{a \sin t}{a \cos t} = \operatorname{tg} t \\ \varphi_i &= t \end{aligned} \quad (2.2)$$

\* 钱伟长推荐。



(a) 滑移线场



(b) 速度图

图1 方形凹模平面变形反向挤压 ( $R=0.5$ )

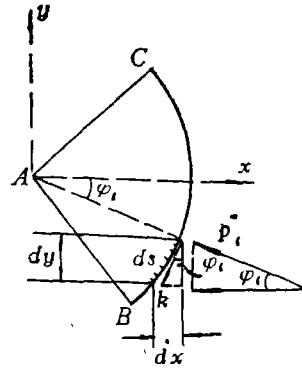


图2  $\beta$ 滑移线BC单元ds上的作用力

方程(2.2)是参量变换的基本方程. 因为沿滑移线  $\varphi$  与  $t$  的函数关系满足方程(2.2), 而  $t$  与  $x, y$  的关系满足方程(2.1), 这样  $\varphi$  与  $x, y$  的关系就通过参量  $t$  确定下来了.

作用在滑移线微元  $ds$  上的力如图2所示, 沿微元  $ds$  上的水平力为:

$$\begin{aligned} dP_H &= p_i ds \cos\varphi_i + k ds \sin\varphi_i \\ &= p_i dy + k dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

由图2知  $p_A = p_B = k$ , 沿  $\beta$  线  $BC$

$$p_i - 2k\varphi_i = p_B - 2k\varphi_B$$

所以

$$p_i = p_B + 2k(\varphi_i - \varphi_B) \quad (2.4)$$

将(2.4)代入(2.3)并积分, 因刚性区  $CBFG$  侧壁无摩擦 (因无相对运动) 故沿刚性区边界滑移线  $BC$  其水平总力与  $FG$  接触面上总力相等即等于  $H p_e$ .

$$P_H = p_B \int_{-H/2}^{H/2} dy + 2k \int_{-H/2}^{H/2} \varphi_i dy - 2k\varphi_B \int_{-H/2}^{H/2} dy + k \int_{x_B}^{x_C} dx = H p_e$$

由公式(2.2)  $\varphi_i = -\frac{\pi}{4}, t = -\frac{\pi}{4}, y = -\frac{H}{2}$

$$\varphi_i = \frac{\pi}{4}, t = \frac{\pi}{4}, y = \frac{H}{2}$$

由公式(2.1)  $dy = a \cos t dt, dx = -a \sin t dt$ , 代入上式左边:

$$\begin{aligned} P_H &= p_B H - 2k\varphi_B H + 2k \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t a \cos t dt + k \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -a \sin t dt = p_e H \\ &= p_B H - 2k\varphi_B H + 2ka [t \sin t + \cos t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + ka [\cos t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= p_B H - 2k\varphi_B H = p_e H \end{aligned}$$

因上式后两项积分为零, 将  $p_B = k, \varphi_B = -\pi/4$  代入上式

$$kH + 2k \frac{\pi}{4} H = p_e H \quad (2.5)$$

所以 
$$p_e = k \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) = k(2 + \pi)/2$$

$$\frac{p_e}{2k} = \frac{(2 + \pi)}{4} = 1.285 \approx 1.29 \quad (2.5)'$$

(2.5)'式表明反向挤压力与  $2k$  之比为 1.29.

对  $A E F G$  取平衡, 设凸模  $A E$  上法向压力为  $q$

$$q \cdot A E = p_e \cdot F G \quad (2.6)$$

$A E = h = H/2$ ,  $F G = H$  代入上式

$$q = \frac{p_e F G}{A E} = \frac{(k(2 + \pi)/2) H}{H/2} = (2 + \pi) k = 5.14 k \quad (2.6)'$$

(2.5)', (2.6)'式结果与惯用解法结果完全相同<sup>[1]</sup>.

2) 正向挤压 正向挤压滑移线场如图 3 此时凹模 (挤压筒) 固定, 垫片运动. 断面收缩率为  $R=0.5$ , 侧壁无摩擦. 采用与反向挤压完全相同的积分方式, 求得挤压力  $p_e$  为:

$$p_e / 2k = 1.29 \quad (2.7)$$

$$p_e = 2.57 k \quad (2.8)$$

$p_e$  即挤压垫片所受平均单位压力, 此时凹模  $A E$  所受压力为:

$$q = \frac{p_e \cdot H}{h} = 2 \cdot p_e = 5.14 k \quad (2.9)$$

对正向挤压的计算结果与惯用解法之结果<sup>[2]</sup>相同.

刚性滑移线  $BC$  上静水压力分布形态可以图 4 表示. 其分布方程为:

$$p_i = p_B + 2k(\varphi_i - \varphi_B) \quad (2.4)$$

在  $B$  点  $p_B = k$ ,  $\varphi_B = -\pi/4$ , 在  $C$  点,  $\varphi_C = \pi/4$ ,  $p_C = p_B + 2k \cdot \pi/2 = k + k\pi$ . 中间各点  $p_i$ , 随  $\varphi_i$  逐渐增加而逐渐增大, 而  $\beta$  线  $BC$  上的切应力  $k$  则始终为常数如图, 显然切应力在  $x$  轴上投影为

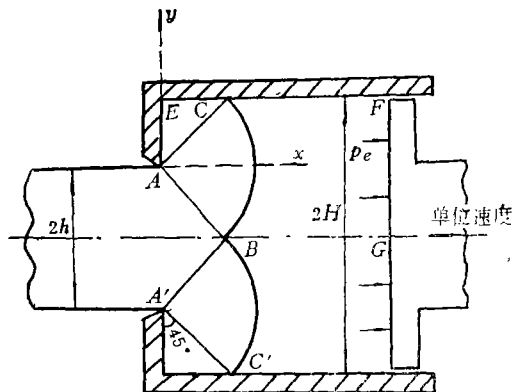


图 3 平面变形正向挤压滑移线场 ( $R=0.5$ )

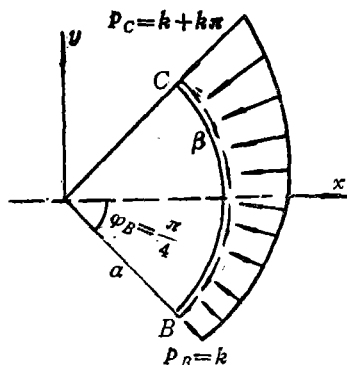
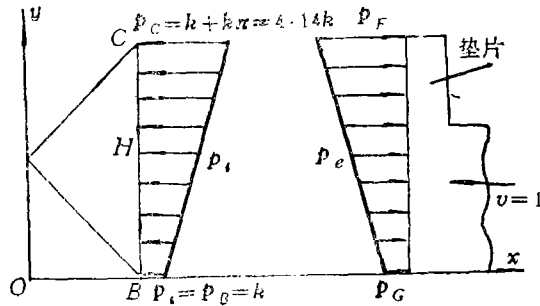


图 4 静水压力  $p_i$  与切应力  $k$  沿  $\beta$  线  $BC$  分布形态

零, 而  $p_i$  则应沿  $y$  轴积分. 将  $p_i$  投影到垂直坐标面上 (根据以面积投影代替力的投影的法则) 其分布形态如图 5, 其中  $CB=H$  为边界线  $\beta$  在  $y$  轴上的投影, 将坐标原点移到对称轴上则为:

$$p_i = k + k \frac{\pi}{H} y \quad (2.10)$$

由 Hencky 方程(2.4)及图1(a)可知 $\varphi$ 角是线性增加的,所以静水压力也是线性增加的,由此可推证得方程(2.10),其中 $\pi k/H$ 为沿 $y$ 轴分布之斜率如图5(a),为此我们得出挤压力 $p_e$ 沿垫片的分布方程为:



(a)  $p_t$ 在垂直轴上线性分布 (b) 挤压力 $p_e$ 沿垫片线性分布

图 5

$$p_e = k + k \frac{\pi}{H} y \quad (2.11)$$

式中 $H$ 为挤压筒壁宽向的一半。

为了验证方程(2.10)、(2.11)的可靠性,将分布方程沿 $y$ 轴积分求总挤压力:

$$\begin{aligned} P_e &= \int_0^H p_e dy = \int_0^H \left( k + k \frac{\pi}{H} y \right) dy \\ &= \int_0^H k dy + k \frac{\pi}{H} \int_0^H y dy = kH + k \frac{\pi}{H} \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^H \\ &= kH + \frac{\pi}{2} kH \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.12)式与(2.5)式结果完全相同,这就证明了以(2.11)式描述挤压垫片上的压力分布是正确的。这里我们意外地发现,无论正向挤压或反向挤压 $F$ 点的压力大于 $G$ 点(对称轴上的点)压力。为此又与传统的看法不同,(传统看法认为垫片中心静水压最高,单位压力也最高)。作者认为这里的看法是正确的。宏观上, $G$ 点(即垫片中点对应模口中心,其承受三向压应力状态应小于 $F$ 点。只有平面变形冲孔才有与此相反的情况<sup>[3]</sup>。

### 三、惯用解法简解

为了比较,以便更好认识参量积分,下面介绍惯用解法<sup>[1][2][4][5][6]</sup>。

由图1(a)滑移线 $AB$ 上任一点, $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ ,以屈服条件 $\{(\sigma_x - \sigma_y)^2/4\} + \tau_{xy}^2 = k^2$ 解得

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \pm 2k \\ p &= -\sigma_x = -\sigma_y = k \end{aligned}$$

沿 $\alpha$ 线 $AB$ ,  
沿 $\beta$ 线 $BC$ ,

$$\begin{aligned} p_B &= p_A = k \\ p_0 - 2k\varphi_0 &= p_B - 2k\varphi_B \\ p_0 &= k + 2k(\varphi_0 - \varphi_B) \end{aligned}$$

因为  $\varphi_B = -\pi/4$ ,  $\varphi_C = \pi/4$ , 所以  $p_C = k + 2k \cdot \pi/2 = k(1 + \pi)$ 。

在死区  $AEC$  上取平衡如图 6。因为死金属区  $ACE$  上  $AC$  面滑移线为直线, 所以静水压力  $p$  不变,  $q$  是垂直凹模且作用模面  $AE$  上的压力,  $n$  为无摩擦挤压筒与死区内表面上正压力, 将上述诸力在轴向上投影

$$q \cdot AE = p \cdot AC \cos 45^\circ + k \cdot AC \sin 45^\circ$$

$$q \cdot h = ph + k \cdot h$$

$$q = p + k = k(1 + \pi) + k = k(2 + \pi) = 5.14k \quad (3.1)$$

$p_0$  为挤压力,

$$qh = p_0 H \quad (3.1)'$$

$$q \cdot \frac{H}{2} = p_0 H$$

$$p_0 = \frac{q}{2} = k(\pi + 2)/2$$

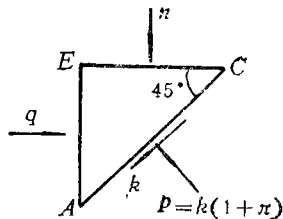


图 6 死金属区  $AEC$  上的应力

所以

$$p_0/2k = \frac{\pi + 2}{4} = 1.285 \approx 1.29 \quad (3.2)$$

以上结果(3.2)、(3.1)与参量积分结果(2.5)'式及(2.6)'式完全相同。然而参量积分不必取  $AEC$  死区平衡, 直接采用(3.1)'式之平衡即可解出。再者惯用解法不能描述挤压力  $p_0$  沿  $FG$  上的分布形态, 只能求  $p_0$  的平均值<sup>[1][2]</sup>, 而参量积分则可描述静水压力及挤压力在纵向断面及垫片上的分布形态且可求出真分布方程(2.11)。

## 四、结 论

1. 以参变量积分法求解平面变形正向、反向滑移线场, 其结果与惯用解法结果相同, 在断面减缩率  $R=0.5$  时,  $n_0 = p_0/2k = 1.29$ 。
2. 参变量积分可求解刚性区滑移线上的水平总力, 不必通过求得死区金属平衡而求解挤压力。
3. 参变量积分可求解垂直断面的压力分布, 及挤压垫片上的应力分布形态。其分布方程为:  $p_0 = k + k(\pi/H)y$ 。垫片中点压力小于边缘压力。

## 参 考 文 献

- [1] Slate, R. A. C., *Engineering Plasticity Theory and Application to Metal Forming Processes*, The Macmillan Press LTD, London (1977), 209—217.
- [2] 汪大年, 《金属塑性成形原理》, 机械工业出版社 (1982), 169—170.
- [3] Slate, R. A. C., *Engineering Plasticity Theory and Application to Metal Forming Processes*, The Macmillan Press LTD, London (1977), 227—228.
- [4] 日本材料学会编, 《塑性加工学》(陶永发译), 机械工业出版社 (1983), 46—47.
- [5] Harris, John Noel, *Mechanical Working of Metals, Theory and Practice*, Robert Maxwell, MC (1983), 189—193.
- [6] 河合望, 《应用塑性加工学》(赖耿阳译), 复汉出版社 (1980), 60—63.

**Solution for Plane Strain Forward and Backward Extrusions  
with a Fractional Reduction  $R=0.5$  by the  
Integration Depending on a Parameter**

Zhao De-wen    Zhang Qiang

*(Northeast University of Technology, Shenyang)*

**Abstract**

A parameter  $t$  is introduced to boundary slip line of rigid regions for plane strain direct and indirect extrusion with a fractional reduction  $R=0.5$ . Integration by substitution has been used along the boundary slip line in order to obtain the extrusion pressure. By the integration depending on a parameter, the following results are obtained,  $\bar{p}/2k=1.29$  and die pressure is  $5.14k$  for backward extrusion;  $\bar{p}/2k=1.29$  and pad average pressure is  $2.57k$  for forward extrusion. All the results from this method are the same as those of the conventional solution.