应用数学和力学，第9卷第4期（1988年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

用复变函数法求解弹性力学空间轴对称问题的方法及解例*

王 子 昆

（西安交通大学，1986年9月20日收到）

摘 要

本文证明了空间轴对称问题的Love应力函数可用两个适当选择的复变量广义解析函数[1]表示，并导出了应力分量、位移分量及边界条件的复变函数表达式。为了表明文中所述方法的可行性以及检验所得公式的正确性，本文用幂级数法求解了含有球形空腔的圆柱体在周围受压及两端受拉时的解答，与用其他方法得到的该问题的解答完全一致。最后本文还求解了一个锥体在侧面受均匀剪力时的解答，同时通过把常体力化为表面力以后还求解了锥体在重力作用下的解答。

一、Love应力函数的广义解析函数表示

文献[1]、[2]所述空间轴对称问题的复变函数法其推导与求解过程均采用的是位移法，与此不同，本文以Leov应力函数为出发点用应力法建立了空间轴对称问题的复变函数解法。这种方法的特点是只要能够确定和轴对称物体子午面相应的平面问题的通常复变量解析函数，通过特定的数学方法即可求出空间轴对称问题所需的广义解析函数，从而使一些问题可根据边界条件进行求解。

如所周知，空间轴对称问题引用Leov应力函数时归结为柱坐标下重调和方程

$$\nabla^4\varphi=0 \tag{1.1}$$

的求解，其中

$$\nabla^4=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

φ是轴向坐标z和径向坐标r的二维函数。轴对称场可通过任一子午面为代表来研究，而子午面上的点可用复数$t=z+ir$及$\bar{t}=z-ir$来确定，这就使得重调和函数$\varphi(z,r)$可表示为t与$\bar{t}$的复变函数。设有一复变函数为

$$\Psi(t)=A_z(z,r)+iA_r(z,r)$$

若其实部和虚部满足下列关系：

$$\frac{\partial A_z}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r),\quad \frac{\partial A_z}{\partial r}=-\frac{\partial A_r}{\partial z} \tag{1.2}$$

* 蒋咏秋推荐。

$\Psi(t)$即被称为广义解析函数，上式可看作与普通解析函数论中Cauchy-Riemann条件相似的关系，进而还可证明A_z，A_r分别满足

$$\nabla^2 A_z=0,\quad \left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)A_r=0 \tag{1.3}$$

其中 $$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

是轴对称调和算子，这说明A_z是柱坐标下的调和函数，A_r则被称为和A_z共轭的函数。

将(1.1)写为$\nabla^2(\nabla^2\varphi)=0$，令

$$F=\nabla^2\varphi \tag{1.4}$$

则有 $\nabla^2 F=0$，故 F 为柱坐标调和函数。在用复变函数法求解弹性力学平面问题时，可以证明直角坐标系下重调和函数U可用调和函数表示为

$$U=p_1+xp+yq$$

p_1是调和函数，p,q是共轭调和函数[3]。设柱坐标下重调和函数可用类似的形式表示为

$$\varphi=P_1+h(z)P+f(r)Q \tag{1.5}$$

其中P是柱坐标调和函数，Q是和它共轭的函数，即$\Phi=P+iQ$为广义解析函数；$h(z)$，$f(r)$分别为z和r的待定函数。如能求得$h(z)$，$f(r)$使(1.5)中的P_1是柱坐标调和函数时，即可证明φ能用适当选择的广义解析函数表示。把(1.5)式写为

$$P_1=\varphi-h(z)P-f(r)Q$$

对上式两端施行算符

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

整理后得

$$\begin{aligned}\nabla^2 P_1=&\nabla^2\varphi-h(z)\nabla^2 P-f(r)\nabla^2 Q-\left[f''(r)+\frac{f'(r)}{r}\right]Q\\&-2f'(r)\frac{\partial Q}{\partial r}-h''(z)P-2h'(z)\frac{\partial P}{\partial z}\end{aligned} \tag{1.6}$$

已知 $\Phi=P+iQ$ 为广义解析，故有

$$\nabla^2 Q=\frac{1}{r^2}Q,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{Q}{r}+\frac{\partial Q}{\partial r} \tag{1.7}$$

把上列关系代入(1.6)，为简单起见选取$h(z)=z$，则(1.6)成为

$$\nabla^2 P_1=\nabla^2\varphi-\left[f''(r)+\frac{f'(r)}{r}+\frac{f(r)}{r^2}+\frac{2}{r}\right]Q-[2f'(r)+2]\frac{\partial Q}{\partial r}$$

若选择$f(r)=r$，由上式即得

$$\nabla^2 P_1=\nabla^2\varphi-4\left(\frac{Q}{r}+\frac{\partial Q}{\partial r}\right) \tag{1.8}$$

由(1.7)的第二式有

$$\nabla^2\left(\frac{Q}{r}+\frac{\partial Q}{\partial r}\right)=\nabla^2\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 P=0$$

据(1.4)可知，只要取

$$F=\nabla^2\varphi=4\left(\frac{Q}{r}+\frac{\partial Q}{\partial r}\right)=4\frac{\partial P}{\partial z}$$

即可使(1.8)式成为$\nabla^2 P_1=0$，也就是使P_1为柱坐标调和函数。设Q_1是P_1的共轭函数，则$\chi=P_1+iQ_1$为广义解析函数。把$h(z)=z$，$f(r)=r$代入(1.5)，得

$$\varphi=P_1+zP+rQ$$

上式立即可用复变函数表示为

$$\varphi=\mathrm{Re}[\bar{t}\Phi+\chi] \tag{1.9}$$

或者写为

$$\varphi=\frac{1}{2}(\bar{t}\Phi+\chi+t\bar{\Phi}+\bar{\chi}) \tag{1.10}$$

其中$\bar{\Phi}=P-iQ$，$\bar{\chi}=P_1-iQ_1$。以上说明Love应力函数可用两个适当选择的广义解析函数表示，而且在形式上与平面直角坐标系下用普通解析函数表示重调和函数的Goursat公式一致，正是这样一个事实为空间轴对称问题的复变函数解法提供了可能。

二、应力、位移及边界条件的复变函数表示

把$\nabla^2\varphi=4\partial P/\partial z$及式(1.10)代入以下各式：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right),\quad \sigma_\theta=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\\&\sigma_z=\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right],\quad \tau_{zr}=\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

经运算整理后，得

$$\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z=4(1+\nu)\mathrm{Re}\Phi'' \tag{2.2}$$

$$\sigma_z+\sigma_r=\frac{5}{2}(\Phi''+\bar{\Phi}'')+\frac{iz}{2r}(\Phi''-\bar{\Phi}'')+\frac{i}{2r}(\Phi'-\bar{\Phi}')+\frac{i}{2r}(\chi''-\bar{\chi}'') \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z-\sigma_r+2i\tau_{zr}=&(5-8\nu)\bar{\Phi}''-2t\bar{\Phi}'''-\frac{it}{4r}(\Phi''-\bar{\Phi}'')\\&-\frac{i}{2r}(\Phi'-\bar{\Phi}')-2\bar{\chi}'''-\frac{i}{2r}(\chi''-\bar{\chi}'')\end{aligned} \tag{2.4}$$

以上各式中Φ',Φ''等表示广义解析函数Φ的各阶导数，例如$\Phi'=\partial P/\partial z+i\partial Q/\partial z$；同时可见，对具体问题若已求得广义解析函数$\Phi$和$\chi$，则由以上各式即可解出四个应力分量。同样，由应力函数φ与位移的关系式很容易得到位移的复变函数表示式：

$$\begin{aligned}2G(w+iu_r)=&(3-4\nu)(\Phi'+\bar{\Phi}')+\frac{iz}{4r}\bar{\Phi}'+\frac{1}{2}\Phi'-\frac{3}{4}\bar{\Phi}'\\&-t\left[\bar{\Phi}''+\frac{1}{4r^2}(\Phi-\bar{\Phi})\right]-\frac{i}{2r}\chi'+\frac{3i}{4r}\bar{\chi}'-\left[\bar{\chi}''+\frac{1}{4r^2}(\chi-\bar{\chi})\right]\end{aligned} \tag{2.5}$$

如图1所示，微分单元abc是由相邻两个子午面以及分别垂直z，r轴的平面截割而成的薄片，列出该微分单元体的平衡方程，因σ_θ在r方向的投影为高阶小量可略去不计，于是得边界条件的表达式为

$$X_z=\sigma_z\cos\alpha+\tau_{zr}\sin\alpha,\quad X_r=\tau_{zr}\cos\alpha+\sigma_r\sin\alpha \tag{2.6}$$

给上式第二式两端乘以i，再将两式相加，把应力分量的复变函数表达式代入即得X_z+iX_r的表达式。

三、由普通解析函数确定广义解析函数

前述已将空间轴对称问题归结为寻求两个适当的广义解析函数的问题，对具体问题如何确定这样的广义解析函数是一个关键性的问题．事实上，只要能够确定和轴对称问题子午面相应的平面上的普通解析函数，借助一定的数学关系即可求出所需要的广义解析函数．设在子午面内取直角坐标xOy使x,y轴分别与z，r轴重合，$\xi=x+iy$为xOy系内的复变数，$F(\xi)$为xOy平面上的解析函数，可以证明，当使

$$A_z=\frac{1}{\pi i}\int_{\bar{t}}^{t}\frac{F(\xi)d\xi}{\sqrt{(\xi-t)(\xi-\bar{t})}},\quad A_r=-\frac{1}{\pi ir}\int_{\bar{t}}^{t}\frac{F(\xi)(\xi-z)d\xi}{\sqrt{(\xi-t)(\xi-\bar{t})}} \tag{3.1}$$

则$\Psi=A_z+iA_r$必为广义解析函数[1]．

在弹性力学平面问题的复变函数解法中，通常根据物体的形状特点选择幂级数作为解析函数，例如对于一个圆环域，可取下列幂级数作为解析函数：

$$F(\xi)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n\xi^n,\quad h(\xi)=\sum_{-\infty}^{\infty}b_n\xi^n \tag{3.2}$$

由于和轴对称问题子午面相应的平面问题总是以x轴为对称的，因此可设

$$\mathrm{Re}F(x+iy)=\mathrm{Re}F(x-iy),\quad \mathrm{Im}F(x+iy)=-\mathrm{Im}F(x-iy)$$
$$\mathrm{Re}h(x+iy)=\mathrm{Re}h(x-iy),\quad \mathrm{Im}h(x+iy)=-\mathrm{Im}h(x-iy)$$

故(3.2)中的a_n，b_n应取实数．

为了求得与(3.2)相应的广义解析函数可以利用下列关系：

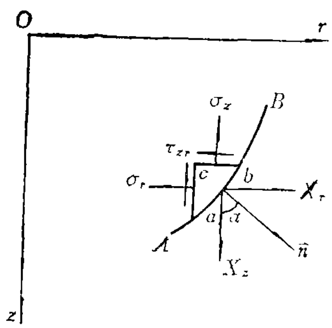

图 1

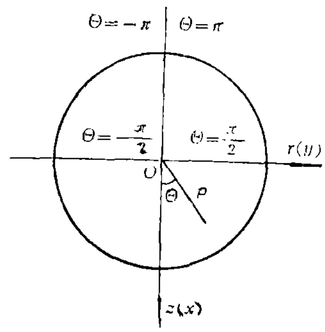

图 2

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi i}\int_{\bar{t}}^{t}\frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{(\xi-t)(\xi-\bar{t})}}=\rho^n P_{n-k}(\cos\Theta)\\
&\frac{1}{\pi ir}\int_{\bar{t}}^{t}\frac{\xi^n(\xi-z)d\xi}{\sqrt{(\xi-t)(\xi-\bar{t})}}=\frac{\rho^n}{n+1}\frac{d}{d\Theta}P_{|n-k|}(\cos\Theta)\qquad(n\neq-1)\\
&\frac{1}{\pi ir}\int_{\bar{t}}^{t}\frac{(\xi-z)d\xi}{\xi\sqrt{(\xi-t)(\xi-\bar{t})}}=\frac{1}{\rho}\mathrm{tg}\frac{\Theta}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

如图 2 所示，ρ,Θ为子午面内的极坐标，上式中当$n\geqslant0$时$k=0$，当$n<0$时$k=1$，$P_n(\cos\Theta)$为勒让特多项式[1],[4]．利用上述关系由(3.1)求得和(3.2)相应的广义解析函数为

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi(z,r)=&\sum_{n=0}^{\infty}a_n\rho^n\left[P_n(\cos\Theta)-\frac{i}{n+1}\frac{d}{d\Theta}P_n(\cos\Theta)\right]\\
&+a_{-1}\frac{1}{\rho}\left[P_0(\cos\Theta)-i\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right]\\
&+\sum_{n=-2}^{-\infty}a_n\rho^n\left[P_{|n|-1}(\cos\Theta)-\frac{i}{n+1}\frac{d}{d\Theta}P_{|n|-1}(\cos\Theta)\right]\\
\chi'(z,r)=&\sum_{n=0}^{\infty}b_n\rho^n\left[P_n(\cos\Theta)-\frac{i}{n+1}\frac{d}{d\Theta}P_n(\cos\Theta)\right]\\
&+b_{-1}\frac{1}{\rho}\left[P_0(\cos\Theta)-i\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right]\\
&+\sum_{n=-2}^{-\infty}b_n\rho^n\left[P_{|n|-1}(\cos\Theta)-\frac{i}{n+1}\frac{d}{d\Theta}P_{|n|-1}(\cos\Theta)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{3.4}
$$

在上式中直接给出χ'是为了简化运算。

四、几 个 解 例

1. 带有空心球腔的圆轴在两端受均匀拉力 q，在侧面受均匀压力 q 时的解答[3]，其子午面如图 3所示。

在和子午面重合的xOy平面下列函数是解析的：

$$
\left.\begin{aligned}
F(\xi)&=A_2\xi^2+A_1\xi+\sum_{n=0}^{-\infty}a_n\xi^n\\
h(\xi)&=B_2\xi^2+B_1\xi+\sum_{n=0}^{-\infty}b_n\xi^n
\end{aligned}\right\}\tag{4.1}
$$

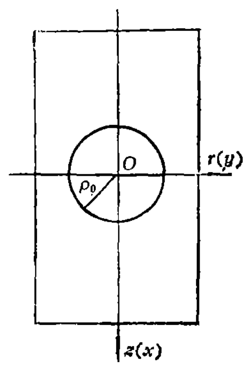

图 3

由(3.4)式可知与上式相应的广义解析函数为

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi(z,r)=&A_2\rho^2\left[P_2(\cos\Theta)-\frac{i}{3}\frac{d}{d\Theta}P_2(\cos\Theta)\right]\\
&+A_1\rho\left[P_1(\cos\Theta)-\frac{i}{2}\frac{d}{d\Theta}P_1(\cos\Theta)\right]\\
&+a_0\left[P_0(\cos\Theta)-i\frac{d}{d\Theta}P_0(\cos\Theta)\right]+a_1\frac{1}{\rho}\left[P_0(\cos\Theta)-i\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right]\\
&+\sum_{m=2}^{\infty}a_m\frac{1}{\rho^m}\left[P_{m-1}(\cos\Theta)-\frac{i}{m+1}\frac{d}{d\Theta}P_{m-1}(\cos\Theta)\right]\\
\chi'(z,r)=&B_2\rho^2\left[P_2(\cos\Theta)-\frac{i}{3}\frac{d}{d\Theta}P_2(\cos\Theta)\right]
\end{aligned}\right.\tag{4.2}
$$

$$+B_1\rho\left[P_1(\cos\Theta)-\frac{i}{2}\frac{d}{d\Theta}P_1(\cos\Theta)\right]$$

$$+b_0\left[P_0(\cos\Theta)-i\frac{d}{d\Theta}P_0(\cos\Theta)\right]+b_1\frac{1}{\rho}\left[P_0(\cos\Theta)-i\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right]$$

$$+\sum_{m=2}^{\infty}b_m\frac{1}{\rho^m}\left[P_{m-1}(\cos\Theta)-\frac{i}{m+1}\frac{d}{d\Theta}P_{m-1}(\cos\Theta)\right]$$

这里$m=-n$。注意到$\cos\Theta=z/\rho$，$\sin\Theta=r/\rho$，把上式代入(2.3)，(2.4)，由$\rho\to\infty$的边界条件：

$$\sigma_z+\sigma_r=0,\quad \sigma_z-\sigma_r=2q$$

得

$$9A_2-B_2=0,\ (11-16\nu)A_2-3B_2=2q \tag{4.3}$$

设球腔的半径为ρ_0，则其表面的边界条件可写为

$$\{(\sigma_z+\sigma_r)\exp[i\Theta]+[(\sigma_z-\sigma_r)+2i\tau_{zr}]\cdot\exp[-i\Theta]\}_{\rho=\rho_0}=0 \tag{4.4}$$

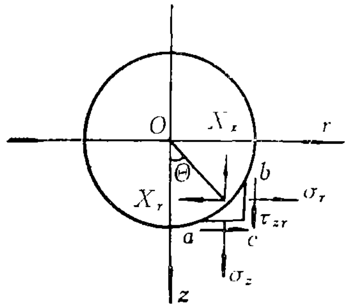

图 4

上式是由图4所示微分单元体abc的平衡条件得到的，在本例中有$X_z=X_r=0$。把由(3.4)代入(2.3)、(2.4)的结果再代入(4.4)，令$\rho=\rho_0$，两端比较$\exp[im\Theta]$的系数，得

$$\left.\begin{aligned}&6a_1\frac{1}{\rho_0^3}-\frac{15}{2}b_3\frac{1}{\rho_0^5}=0\\&4a_1\frac{1}{\rho_0^3}-2\nu a_1\frac{1}{\rho_0^3}-\frac{3}{2}b_3\frac{1}{\rho_0^5}-8\nu A_2+\frac{11}{2}A_2-\frac{3}{2}B_2=0\\&6a_1\frac{1}{\rho_0^3}-2b_1\frac{1}{\rho_0^3}-6\nu a_1\frac{1}{\rho_0^3}-3b_3\frac{1}{\rho_0^5}+\frac{9}{2}A_2-\frac{1}{2}B_2=0\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

$$A_1=B_1=a_0=b_0=b_2=0$$

$$a_m=0,\ m\geqslant 2$$

$$b_m=0,\ m\geqslant 4$$

把(4.3)、(4.5)联立求解，得

$$A_2=-\frac{q}{8(1+\nu)},\quad B_2=-\frac{9q}{8(1+\nu)},\quad a_1=-\frac{5q\rho_0^3}{2(7-5\nu)}$$

$$b_1=-\frac{3(3-5\nu)q\rho_0^3}{2(7-5\nu)},\quad b_3=-\frac{2q\rho_0^5}{7-5\nu}$$

故该问题的广义解析函数若用子午面内的极坐标表示，则为

$$\Phi(\rho,\Theta)=-\frac{q}{8(1+\nu)}\rho^2\left[\frac{1}{2}(3\cos^2\Theta-1)+\frac{i}{2}\sin 2\Theta\right]-\frac{5q\rho_0^3}{2(7-5\nu)\rho}\left[1-i\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right]$$

$$\chi'(\rho,\Theta)=-\frac{9q}{8(1+\nu)}\rho^2\left[\frac{1}{2}(3\cos^2\Theta-1)+\frac{i}{2}\sin 2\Theta\right]$$

$$-\frac{3(3-5\nu)q\rho_0^3}{2(7-5\nu)\rho}\left[1-i\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right]-\frac{2q\rho_0^5}{(7-5\nu)\rho^3}\left[\frac{1}{2}(3\cos^2\Theta-1)+\frac{3}{8}i\sin 2\Theta\right]$$

把上式代入(2.2)、(2.3)、(2.4)，解得

$$\sigma_r=-q+\frac{q}{8(7-5\nu)}\left\{\left[(33-70\nu)-6(9+5\nu)\cos2\Theta+75\cos4\Theta\right]\frac{\rho_0^3}{\rho^3}\right.$$

$$\left.+(9-105\cos4\Theta)\frac{\rho_0^5}{\rho^5}\right\}$$

$$\sigma_z=q-\frac{q}{8(7-5\nu)}\left\{[(47-10\nu)+6(21-5\nu)\cos2\Theta+75\cos4\Theta]\frac{\rho_0^3}{\rho^3}\right.$$

$$\left.-3(9+20\cos2\Theta+45\cos4\Theta)\frac{\rho_0^5}{\rho^5}\right\}$$

$$\tau_{zr}=-\frac{q}{8(7-5\nu)}\left\{[6(6-5\nu)\sin2\Theta+75\sin4\Theta]\frac{\rho_0^3}{\rho^3}\right.$$

$$\left.-15(2\sin2\Theta+75\sin4\Theta)\frac{\rho_0^5}{\rho^5}\right\}$$

上述解答与文献[3]所给的结果一致，说明本文所给公式是正确的。

2. 锥体在侧面受均布剪力的问题，其子午面如图5所示，设剪力集度为τ_0。在与子午面重合的xOy平面的有限范围内，下列函数是解析的：

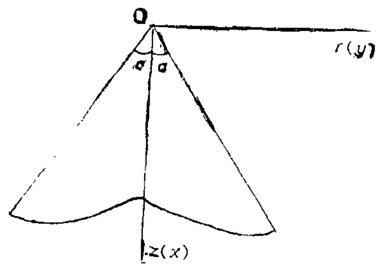

图 5

$$F(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\xi^n,\quad h(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\xi^n$$

由(3.1)、(3.3)得到与上式对应的广义解析函数为

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z,r)&=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\rho^n\left[P_n(\cos\Theta)-\frac{i}{n+1}\frac{d}{d\Theta}P_n(\cos\Theta)\right]\\ \chi'(z,r)&=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\rho^n\left[P_n(\cos\Theta)-\frac{i}{n+1}\frac{d}{d\Theta}P_n(\cos\Theta)\right]\end{aligned}\right\}\tag{4.6}$$

这个问题的边界条件为

$$\sigma_z\sin\alpha-\tau_{zr}\cos\alpha=-\tau_0\cos\alpha,\quad \sigma_r\cos\alpha-\tau_{zr}\sin\alpha=\tau_0\sin\alpha\tag{4.7}$$

无须进行繁复的计算，由应力与广义解析函数关系(2.3)、(2.4)以及边界条件(4.7)可知，本问题的广义解析函数应为

$$\Phi(\rho,\Theta)=A_2\rho^2\left[\frac{1}{2}(3\cos^2\Theta-1)+\frac{i}{2}\sin2\Theta\right]$$

$$\chi'(\rho,\Theta)=B_2\rho^2\left[\frac{1}{2}(3\cos^2\Theta-1)+\frac{i}{2}\sin2\Theta\right]$$

把上式代入(2.3)、(2.4)得

$$\sigma_z+\sigma_r=9A_2-B_2,\quad \sigma_z-\sigma_r+2i\tau_{zr}=(11-16\nu)A_2-3B_2\tag{4.8}$$

由上式解出σ_z，σ_r，τ_{zr}，再代入(4.7)，解得

$$\left.\begin{aligned}A_2&=\frac{(2\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha)\tau_0}{8(1+\nu)}\\ B_2&=\frac{[2(5-4\nu)\mathrm{tg}\alpha-(1-8\nu)\mathrm{ctg}\alpha]\tau_0}{8(1+\nu)}\end{aligned}\right\}\tag{4.9}$$

把(4.9)再代回(4.8)，并利用(2.2)式，解得

$$\sigma_z=-\tau_0\mathrm{ctg}\alpha,\ \sigma_r=\tau_0\mathrm{tg}\alpha,\ \sigma_\theta=\tau_0\mathrm{tg}\alpha,\ \tau_{zr}=0$$

由上述解答可见，正象在平面问题楔形体的经典解答，当 $\alpha=\pi/2,\pi$ 时出现伴谬一样，对圆锥体当$\alpha=\pi/2,\pi$时也出现同样的情况。特别值得指出的是，把(4.9)代入例1中的(4.5)式，还可以得到含球形空腔的锥体问题的解答。

3. 圆锥体在自重作用下的应力解答，其子午面如图6所示，设圆锥体的密度为ρ_0。由于该问题 r 方向的体力为零，z 方向的体力 $\rho_0 g$ 为常量，由空间轴对称问题的平衡方程及相容方程可知，只要把在体力$\rho_0 g$作用下的应力$\sigma_z,\sigma_\theta,\sigma_r,\tau_{zr}$作如下代换：

$$\sigma_z=\sigma_z^*-\rho_0 gz,\ \sigma_r=\sigma_r^*,\ \sigma_\theta=\sigma_\theta^*,\ \tau_{zr}=\tau_{zr}^* \tag{4.10}$$

即可把问题化为在相应面力作用下而无体力的情况，这时 σ_z^*，σ_r^*，σ_θ^*，τ_{zr}^*即可利用前述复变函数法求解。用和上例中相同的方法求得该问题的复变量广义解析函数为

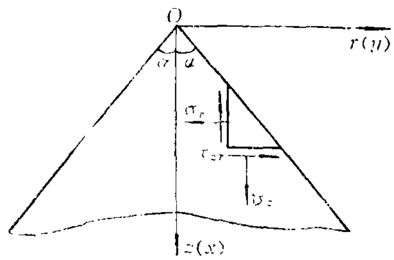

图 6

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z,r)&=\frac{A_3}{64}\rho^3(35\exp[3i\Theta]+15\exp[i\Theta]+9\exp[-i\Theta]+5\exp[-3i\Theta])\\ \chi'(z,r)&=\frac{B_3}{64}\rho^3(35\exp[3i\Theta]+15\exp[i\Theta]+9\exp[-i\Theta]+5\exp[-3i\Theta])\end{aligned}\right\}\tag{4.11}$$

将上式代入(2.3)、(2.4)，分离实部和虚部，得

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_z^*+\sigma_r^*=18A_3z-3B_3z\\ &\sigma_z^*-\sigma_r^*=-48\nu A_3z+24A_3z-9B_3z\\ &\tau_{zr}^*=12\nu A_3r-12A_3r+3B_3r\end{aligned}\right\}\tag{4.12}$$

由图6可见，原问题的边界条件为

$$\sigma_z\sin\alpha-\tau_{zr}\cos\alpha=0,\ \sigma_r\cos\alpha-\tau_{zr}\sin\alpha=0 \tag{4.13}$$

把(4.10)代入上式，得

$$\sigma_z^*\sin\alpha-\tau_{zr}^*\cos\alpha=\rho_0 gz\sin\alpha,\ \sigma_r^*\cos\alpha-\tau_{zr}^*\sin\alpha=0 \tag{4.14}$$

由(4.12)解得σ_z^*，σ_r^*，σ_θ^*，τ_{zr}^*后再代入(4.14)，得

$$A_3=\frac{(\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha)\rho_0 g}{12(3\nu+2)\mathrm{ctg}\alpha+3\mathrm{tg}\alpha},\ B_3=\frac{[(1-8\nu)\mathrm{ctg}\alpha-4(1-\nu)\mathrm{tg}\alpha]\rho_0 g}{4(3\nu+2)\mathrm{ctg}\alpha+3\mathrm{tg}\alpha}$$

最后解得

$$\sigma_z=\sigma_z^*-\rho_0 gz=-\frac{7(1-4\nu)\mathrm{ctg}\alpha-16(1-\nu)\mathrm{tg}\alpha}{4(3\nu+2)\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha}\rho_0 gz$$

$$\sigma_r=\sigma_r^*=\frac{2(1-8\nu)\mathrm{ctg}\alpha-(11-4\nu)\mathrm{tg}\alpha}{4(3\nu+2)\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha}\rho_0 gz$$

$$\tau_{zr}=\tau^{*}_{zr}=-\frac{(1+20\nu)\operatorname{ctg}\alpha+8(1-\nu)\operatorname{tg}\alpha}{4(3\nu+2)\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}\rho_0 gr$$

值得注意的是，这组解答并不适合$\alpha=\pi/2$时的情况，因为在利用边界条件（4.4)时应用了关系式$\operatorname{tg}\alpha=r/z$。

以上例子说明本文所述方法是可行的，但用幂级数得到的复变量广义解析函数一般只能求得球体、圆锥体以及含有球形空腔的问题的解答。

参 考 文 献

[1] Александров А. Я. и Ю. И. Соловьев, *Пространственные Задачи Теории Упругости*, Изд. «Наука» (1978).

[2] 樊大钧，《数学弹性力学》，新时代出版社（1983)。

[3] Timoshenko, S. and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Inc. (1970).

[4] 王竹溪、郭敦仁，《特殊函数概论》，科学出版社（1965)。

[5] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》(1980)。

The Method of Solving Axisymmetric Problems in Elastic Space by Complex Function and Some Examples

Wang Zi-kun

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an)

Abstract

This paper proves Love's stress function of space axisymmetric problem can be represented by choosing two generalized analytic functions of complex variates reasonably[1], and deduces the expressions of the components of stress displacements and boundary conditions in complex function. To present the feasibility of the method here and examining the truth of the formulae founded in the paper, the problem of circular shaft with globular cavity pressed on the side and pulled at the ends is solved by using power series and the result is the same as that solved by other methods. In the end, the problem of a cone sheared by uniform shear stress on the side-face is solved, and the solution of a cone acted on by gravity is given by converting constant body forces into surface forces.