

弹塑性运动裂纹的动力位错解*

赵志苏

(北京工业学院应用力学系, 1987年3月20日收到)

摘 要

本文基于细观观点, 用线排列动力位错模拟运动裂纹, 通过叠加方法处理弹塑性运动裂纹问题, 求出了各种情形下的动力张开位移, 从而给出了运动裂纹的一个弹塑性失稳判据, 并就 I, II 型运动裂纹展开进行了讨论。

一、引 言

由于工程实际的需要, 近十年来断裂动力学逐步形成为一个新的学科而得到迅速的发展, 尤其是对韧性材料的动力破坏行为的研究一直是迫切需要解决的问题, 因为大多数工程结构都是韧性材料构成的。由于问题的物理模型及数学分析上的复杂性, 使得在断裂静力学中已出现的问题显得更加突出, 这表现在两个方面: ①裂纹尖端大塑性变形, 材料微结构和位错组态的不断变化, 这些都属于材料的局部物理和力学行为, 而以描述材料平均性能的固体力学研究所得到的结果不足以说明问题; ②伴随热效应, 非线性, 动力问题等的裂纹研究, 使得断裂力学的经典分析复杂化, 难以产生有用的结果。因此对裂纹物理和力学行为的研究深入到细观和微观领域就日益成为必要的了。文[1]和文[2]的作者使用位错模型作为数学工具描述静止裂纹尖端的宏观塑性性质, 用一个简单的模型给出了与经典宏观分析^[10]一致的结果, 这种方法用细观线性模型迭加处理宏观非线性问题, 对宏观断裂的研究起了巨大的推动作用。尽管动力位错的研究几乎与断裂静力学的研究同时起步, 并且关于单个运动位错的位移场的解早有结果^{[3],[4],[5],[6]}, 但迄今未见用于运动裂纹分析。本文用动力位错模型将文[1][2]的方法推广用来分析运动裂纹问题, 对于断裂动力学中这一类重要情形分别就 I, II, III 型非线性运动裂纹给出了与之等价的位错密度, 得到了弹塑性运动裂纹的张开位移判据, 而著名的BCS^[2]解和 Yoffe 解^[7]分别是其静止和弹性情形下的特例。文[8]用经典宏观数学方法得到的动力张开位移结果与本文的部分结果一致。

二、弹塑性运动裂纹的动力位错解

1. I, II 型弹塑性运动裂纹的张开位移

首先对 II 型弹塑性情形进行推导, 为此先建立滑移型刃型位错的动力学方程, 由连续分

* 薛大为推荐。

布位错理论, 应变 e_{ij} 与 α_{ij} 的关系为:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \quad \theta = \frac{1}{2}(\alpha_{12} - \alpha_{21}) \quad (2.1)$$

其中 α_{ij} 为与晶格畸变相关的量, θ 为旋转量.

$$\text{平衡方程:} \quad \rho u_i = \sigma_{ij,j} \quad (2.2)$$

$$\text{本构关系:} \quad \sigma_{ij} = (\lambda + 2\mu)e_{ij} + \delta_{ij}\lambda e_{kk} \quad (2.3)$$

$$\text{引入塑性畸变:} \quad \beta_{ij} = u_{j,i} - \alpha_{ij} \quad (2.4)$$

由(2.1), (2.2), (2.3), (2.4)可得:

$$\rho u_i - (\lambda + \mu)(u_{i,k}),_k - \mu \nabla^2 u_i = -\lambda(\beta_{ii}),_i - \mu(\beta_{ij} + \beta_{ji}),_j \quad (2.5)$$

其中 $i, j = 1, 2$, λ, μ 为 Lamé 常数. 给出位错密度 β_{ij} , 即可由(2.5)式导出问题的解. 对于无穷大介质中沿 x_1 轴匀速运动的单个正刃型位错, 文[9]用 Fourier 变换方法求得了如下的解:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{bc_2^2}{\pi v^2} \left[-\text{tg}^{-1} \frac{x_1 - vt}{\beta_1 x_2} + \left(1 - \frac{v^2}{2c_2^2}\right) \text{tg}^{-1} \frac{x_1 - vt}{\beta_2 x_2} \right] \\ u_2 &= \frac{bc_2^2}{\pi v^2} \left\{ \beta_1 \ln[(x_1 - vt)^2 + \beta_1^2 x_2^2] - \beta_2^{-1} \left(1 - \frac{v^2}{2c_2^2}\right) \ln[(x_1 - vt)^2 + \beta_2^2 x_2^2] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\text{其中:} \quad \beta_i^2 = 1 - \frac{v^2}{c_i^2}; \quad c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \quad c_2^2 = \mu/\rho$$

分别为弹性膨胀波和剪切波速的平方; v 为位错运动速度; b 为布氏矢量. 由(2.6)式可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \frac{bc_2^2}{\pi v^2} \left[\frac{\beta_1(x_1 - vt)}{\beta_1^2 x_2^2 + (x_1 - vt)^2} - \left(1 - \frac{v^2}{2c_2^2}\right) \frac{\beta_2(x_1 - vt)}{(x_1 - vt)^2 + \beta_2^2 x_2^2} \right] \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \frac{bc_2^2}{\pi v^2} \left[\frac{\beta_1(x_1 - vt)}{(x_1 - vt)^2 + \beta_1^2 x_2^2} - \beta_2^{-1} \left(1 - \frac{v^2}{2c_2^2}\right) \frac{x_1 - vt}{(x_1 - vt)^2 + \beta_2^2 x_2^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

将(2.7)代入本构关系(2.3)中, 并命 $y=0$ 得:

$$\sigma_{12} = \frac{\mu bc_2^2}{2\pi v^2 \beta_2} \left[4\beta_1 \beta_2 - \left(2 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)^2 \right] \frac{1}{x} \quad (2.8)$$

此即单个运动正刃型位错的应力场, 设在无限大介质中有一运动裂纹位于 $|x| = |x_1 - vt| < a$, $x_2 = 0$, 无穷远处作用着平行于裂纹的剪应力 σ . 此处用一连续分布的线排列位错模拟裂纹, 由运动坐标中心 $x = x_2 = 0$ 处产生的位错在 $x = \pm a$ 处并不完全阻塞, 而能越过该点进入材料中 $|x| > a$ (图1) 的部分. 这说明 a 点有新的位错源开动, 直到增殖位错去掉应力奇异为止. 由(2.8)式, 对于密度为 $f(x)$ 的线排列位错其平衡方程为:

$$\int_{-c}^c \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - x} = \frac{\sigma(x)}{A} \quad (2.9)$$

$$\text{其中:} \quad A = \frac{\mu bc_2^2}{2\pi v^2 \beta_2} \left[4\beta_1 \beta_2 - \left(2 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)^2 \right] \quad (2.10)$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma - \sigma_s, & a < |x| < c \\ \sigma, & |x| < a \end{cases}$$

奇异积分方程(2.9)的解为:

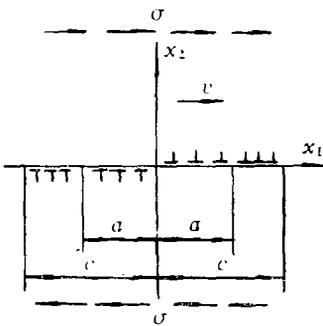


图 1

$$f(x) = \frac{-1}{\pi^2 A} \sqrt{\frac{x+c}{x-c}} \int_{-c}^c \sqrt{\frac{\xi+c}{\xi-c}} \sigma(\xi) \frac{d\xi}{\xi-x} \quad (2.11)$$

将已知的 $\sigma(x)$ 代入上式 $\sigma(\xi)$ 得:

$$f(x) = \frac{-1}{\pi^2 A} \sqrt{\frac{x+c}{x-c}} \left\{ (\sigma - \sigma_s) \int_{-c}^c \sqrt{\frac{\xi-c}{\xi+c}} \frac{d\xi}{\xi-x} + \sigma_s \int_{-a}^a \sqrt{\frac{\xi-c}{\xi+c}} \frac{d\xi}{\xi-x} \right\} \quad (2.12)$$

上式第一项由围道积分立即可知为 $i\pi$, 第二个积分

$$\int_{-a}^a \sqrt{\frac{\xi-c}{\xi+c}} \frac{d\xi}{\xi-x} = i \cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) - i\left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)\right) - \sqrt{\frac{x-c}{x+c}} \left[\operatorname{ch}^{-1} \left| \frac{c^2-ax}{c(a-x)} \right| - \operatorname{ch}^{-1} \left| \frac{c^2+ax}{c(a+x)} \right| \right] \quad (2.13)$$

因此

$$f_{\text{I}}(x, t) = \frac{-1}{\pi^2 A} \left\{ \sqrt{\frac{x+c}{x-c}} \left[i\left(2\sigma_s \cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) - \sigma\pi\right) - \sigma_s \ln \left| \frac{x(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}} + a(c^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}} - a(c^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \right| \right] \right\} \quad (2.14)$$

位错分布密度应有实解, 故:

$$a/c = \cos(\pi\sigma/2\sigma_s), \quad c = a \sec(\pi\sigma/2\sigma_s) \quad (2.15)$$

$$f_{\text{I}}(x_1, t) = \frac{\sigma_s}{\pi^2 A} \ln \left| \frac{(x_1-vt)(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}} + a[c^2-(x_1-vt)^2]^{\frac{1}{2}}}{(x_1-vt)(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}} - a[c^2-(x_1-vt)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| \quad (2.16)$$

以 n 表位错总数, 则

$$n(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi \quad (2.17)$$

裂纹张开位移为:

$$\delta^M = b[n(c) - n(a)] \quad (2.18)$$

其中 δ^M 表运动裂纹的张开位移. 将(2.16)式代入(2.17)式得:

$$\frac{\pi^2 A}{\sigma_s} n(x) = 2a \operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{c}{a}\right) + (x-a) \operatorname{ch}^{-1}\left[\frac{c^2-ax}{c(x-a)}\right] - (x+a) \operatorname{ch}^{-1}\left[\frac{c^2+ax}{c(x+a)}\right] \quad (2.19)$$

将(2.19)式代入(2.18)式得:

$$\delta_{\text{I}}^M = \frac{b\sigma_s}{\pi^2 A} \left(2a \ln \frac{c}{a} \right) = \frac{4v^2\beta_2 a \sigma_s}{\mu c_2^2 \pi \left[4\beta_1\beta_2 - \left(2 - \frac{v^2}{c_2^2} \right)^2 \right]} \ln \left[\sec\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right) \right] \quad (2.20)$$

上式可以改写为:

$$\delta_{\text{I}}^M = \frac{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)\beta_2}{4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2} \delta_{\text{I}}^{\text{static}} \quad (2.21)$$

其中:
$$\delta_{\text{I}}^{\text{static}} = \frac{8\sigma_s a(1-v^2)}{\pi E} \ln \left[\sec\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right) \right] \quad (2.22)$$

(2.21)式即 II 型弹塑性运动裂纹尖端的张开位移.

对于 I 型弹塑性运动裂纹可以用刃型位错的攀移模拟. 设刃型线排列位错位于无穷大介质中, 无穷远处有垂直作用于裂纹的拉力 σ , 刃型位错沿 x_1 轴作攀移运动, 忽略攀移阻力,

此时布氏矢量沿 x_2 方向(图2)。若将问题作为三维问题处理, 则波动方程(2.5)和本构关系(2.3)都不变, 如同滑移型位错一样, 可以利用Fourier变换就单个位错解场方程(2.5)。设单个正刃型位错处于无限大介质中, 以速度 v 沿正 x_1 轴作攀移运动, 此时的边界条件有改变, u_2 越过 $x_2=0$ 时变化一个布氏矢量, u_1 , σ_{12} 和 σ_{22} 在 $x_2=0$ 处是连续的, 与滑移的情形相反, 对 x_1 轴而言, u_1 是偶函数, u_2 是奇函数, 此时单个位错沿 x_2 方向的正应力为^[6]:

$$\sigma_{22} = \frac{\mu b c_2^2 (x_1 - vt)}{2\pi v^2 \beta_1} \left[-\left(2 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)^2 \frac{1}{(x_1 - vt)^2 + \beta_1^2 x_2^2} + \frac{4\beta_1 \beta_2}{(x_1 - vt)^2 + \beta_1^2 x_2^2} \right] \quad (2.23)$$

命 $x_2=0$ 有:

$$\sigma_{22} = \frac{\mu b c_2^2}{2\pi v^2 \beta_1} \left[4\beta_1 \beta_2 - \left(2 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)^2 \right] \frac{1}{x_1 - vt} \quad (2.24)$$

在形式上该式与(2.8)式完全一致, 对于线排列刃型位错与外力平衡的情形也与滑移型在形式上完全一致, 所以可以按以前完全相同的方法推出此时的位错密度为:

$$f_1(x_1, t) = \frac{\sigma_s}{\pi^2 A} \ln \left| \frac{(x_1 - vt)(c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + a[c^2 - (x_1 - vt)^2]^{\frac{1}{2}}}{(x_1 - vt)(c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - a[c^2 - (x_1 - vt)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| \quad (2.25)$$

其中:
$$A = \frac{\mu b c_2^2}{2\pi v^2 \beta_1} \left[4\beta_1 \beta_2 - \left(2 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)^2 \right]$$

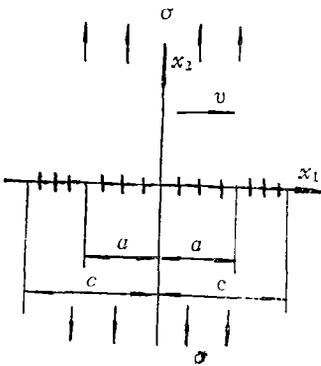


图 2

然后按前同样的方法可以求得 I 型运动裂纹尖端的张开位移为:

$$\delta_I^M = \frac{4v^2 \beta_1 \sigma_s a}{\mu c_2^2 \pi \left[4\beta_1 \beta_2 - \left(2 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)^2 \right]} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma}{2\sigma_s} \right) \right] \quad (2.26)$$

上式可以改写为:

$$\delta_I^M = \frac{2(\beta_1^2 - \beta_2^2) \beta_1}{4\beta_1 \beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2} \delta_I^{\text{static}} \quad (2.27)$$

其中:
$$\delta_I^{\text{static}} = \frac{8(1 - \nu^2) \sigma_s a}{\pi E} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma}{2\sigma_s} \right) \right]$$

若 I 型问题为平面的则本构方程和相应的波动方程应改为:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda' \delta_{ij} e_{kk} \quad (2.28)$$

$$\rho \ddot{u}_i - (\lambda' + \mu)(u_{i,i})_{,i} - \mu \nabla^2 u_i = -\lambda' (\beta_{ii})_{,i} - \mu (\beta_{ij} + \beta_{ji})_{,j} \quad (2.29)$$

方程(2.29)与(2.5)的不同之处仅在于将 λ 换成了 λ' , 其中 $\lambda' = \lambda(1 - 2\nu)/(1 - \nu)$, 故问题的解答在数学上的形式不变, 仅需将(2.24), (2.26)两式中的 β_1 换成 $\beta_1' = [1 - (1 - \nu)v^2/2c_2^2]^{\frac{1}{2}}$, 其中 ν 为 Poisson 系数。

$$\delta_I^M = \frac{4v^2 \beta_1' a \sigma_s}{\mu c_2^2 \pi \left[4\beta_1' \beta_2 - \left(2 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)^2 \right]} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma}{2\sigma_s} \right) \right] \quad (2.30)$$

上式可以改写为:

$$\delta_I^M = \frac{(1 + \nu)v^2 \beta_1'}{c_2^2 \left[4\beta_1' \beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2 \right]} \delta_I^{\text{static}} \quad (2.31)$$

$$\delta_I^{\text{static}} = \frac{8a\sigma_s}{\pi E} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma}{2\sigma_s} \right) \right] \quad (2.32)$$

2. III型运动裂纹的张开位移

III型运动裂纹可以用动力螺型位错的滑移来模拟, 此时的基本方程为:

$$u_{3,t} = \alpha_i + \beta_i \tag{2.33}$$

$$\rho \dot{u}_3 = \sigma_{3t,t} \tag{2.34}$$

$$\sigma_{t3} = \mu \alpha_i \tag{2.35}$$

由以上三式得波动方程:

$$\ddot{u}_3/c^2 = \nabla^2 u_3 - \beta_{t,t} \tag{2.36}$$

其中: $c = (\mu/\rho)^{\frac{1}{2}}$. 作Lorentz变换, $x = \beta^{-1}(x_1 - vt)$, $y = x_2$

$T = \beta^{-1}(t - vx_1/c^2)$, 其中 $\beta = (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$, 方程(2.36)变为:

$$\nabla_i^2 u_3 = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta_i}{\partial x} + \frac{\partial \beta_2}{\partial y} \tag{2.37}$$

其中 $\nabla_i^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, 因为在新原点 $x=y=0$ 位错变成固定的, 解 $u_3(x, y, T)$ 必然不依赖于新的时间坐标 T , 而偏导数 $\partial/\partial T$ 不出现在方程(2.37)中. 当问题被分为两个半平面求解时, (2.32)式为静态问题, 对于位于无大介质中的单个螺位错, 设其沿 x_1 的运动速度为 v , 则由(2.37)可得其拟静态解应与静态解^[11]形式上一致:

$$u_3 = (b/2\pi) \text{tg}^{-1}(y/x) \tag{2.38}$$

由此和本构关系得:

$$\sigma_{yz} = \frac{\mu b}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \tag{2.39}$$

回到物理坐标中得:

$$\sigma_{23} = \frac{\mu b}{2\pi} \frac{\beta(x_1 - vt)}{(x_1 - vt)^2 + x_2^2 \beta^2} \tag{2.40}$$

对于III型运动裂纹, 我们设有位于 x_1 轴的线排列螺型位错, 其布氏矢量沿 x_3 轴, 整个分布螺位错沿 x_1 轴匀速运动, 无穷远处作用沿 x_3 轴的剪力 σ (图3), 此时命(2.40)中的 $x_2=0$ 得:

$$\sigma_{23} = \frac{\mu b \beta}{2\pi} \frac{1}{x_1 - vt} \tag{2.41}$$

易知整个分布螺位错的平衡条件为:

$$\int_{-c}^c \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi = \frac{\sigma(x)}{A} \tag{2.42}$$

其中 $A = \mu b \beta / 2\pi$, $\sigma(x)$ 的分布与滑移刃型运动位错情形相同, 对比前面的分析可知, 螺型运动位错的线分布密度为:

$$f(x_1, t) = \frac{\sigma_s}{\pi \mu b \beta} \ln \left[\frac{(x_1 - vt)(c^2 - a^2) + a[c^2 - (x_1 - vt)^2]^{\frac{1}{2}}}{(x_1 - vt)(c^2 - a^2) - a[c^2 - (x_1 - vt)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \tag{2.43}$$

弹塑性运动裂纹尖端的张开位移为:

$$\delta_{\text{I}}^M = \frac{4\sigma_s a}{\pi \mu \beta} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma}{2\sigma_s} \right) \right] \tag{2.44}$$

上式可以改写为:

$$\delta_{\text{I}}^M = (1/\beta) \delta_{\text{I}}^{\text{static}} \tag{2.45}$$

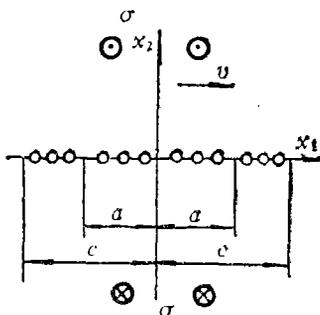


图 3

$$\delta_{\text{I}}^{\text{static}} = \frac{8(1+\nu)\sigma_s a}{\pi E} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s} \right) \right] \quad (2.46)$$

三、讨 论

以上我们以运动位错模型作为数学工具,描述了运动裂纹尖端的宏观塑性性质,将BCS模型引入运动裂纹问题,用细观线性模型处理了宏观动力非线性问题。下面我们拟从两个方面着手讨论其解答的意义:1.与经典宏观分析比较,尽管这方面的结果尚属少见,但我们上述的工作应包括静止和弹性运动裂纹这样两种情形,2.上述分析结果的物理意义。

关于第1点可以从两个方面进行,首先应用已求得运动位错密度,命 $\nu \rightarrow 0$,或 $a/c \rightarrow 1$ 可以分别求得静止位错和弹性运动位错的分布情形如下:

(1) 静止位错

$$f_{\text{I, I, I}}(x_1) = \frac{4\sigma_s}{\pi E' b} \ln \left[\frac{x_1(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} + c(a^2 - x_1^2)^{\frac{1}{2}}}{x_1(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} - c(a^2 - x_1^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (3.1)$$

$$\text{其中: } E' = \begin{cases} E & \text{平面应力} \\ E/(1-\nu^2) & \text{平面应变} \\ E/(1+\nu) & \text{反平面应变} \end{cases}$$

考察(3.1)式可知其即为静止分布位错解,其对宏观裂纹尖端塑性场的分析结果可参见文[2],显然结果与BCS模型得到的结果是完全一致的。

其次也可分别直接命前面求得的裂尖张开位移解各式中的 ν 分别 $\rightarrow 0$ 而得到静止弹塑性裂纹尖端的张开位移解为:

$$\delta_{\text{I, I, I}}^{\text{static}} = \frac{8\sigma_s a}{E'} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s} \right) \right] \quad (3.2)$$

$$\text{其中: } E' = \begin{cases} E & \text{平面应力} \\ E/(1-\nu^2) & \text{平面应变} \\ E/(1+\nu) & \text{反平面应变} \end{cases}$$

(2) 弹性分布运动位错

在前面得到的各运动位错密度表达式中命 $a/c \rightarrow 1$,并以 $\pi\sigma/(2\cos^{-1}(a/c))$ 取代 σ_s ,此时得到一个(0/0)型极限,对 a/c 用L'Hospital法则得:

$$f(x_1, t) = \frac{\sigma}{\pi A'} \frac{x_1 - vt}{[a^2 - (x_1 - vt)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.3)$$

$$\text{其中: } A' = \begin{cases} \frac{\mu b c_2^2}{2\pi v^2 \beta_2} [4\beta_1 \beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2] & \text{平面应变} \\ \frac{\mu b c_1^2}{2\pi v^2 \beta_1} [4\beta_1 \beta_2 - (1 + \beta_1^2)^2] & \text{平面应力} \\ \mu b \beta / 2\pi & \text{反平面应变} \end{cases}$$

应用Galileo变换,可以将此问题变为数学平面中的静止问题,故不难求得其相应的宏观裂纹尖端的应力场,其I型裂纹解显然为Yoffe^[7]解。

也可以直接命运动弹塑性裂纹尖端的张开位移表达式中 $a/c \rightarrow 1$, 同样以 $\pi\sigma/2\cos^{-1}(a/c)$ 取代 σ_s , 并利用 L'Hospital 法则可以看到 $\lim_{a/c \rightarrow 1} \delta_{I, I, I} = 0$, 这与弹性情形下裂尖张开位移为零的经典结果一致. 此外本文得到的结果与经典宏观分析结果^[8]部分一致. 可以说本文用一个简单的数学模型给出了运动裂纹的弹塑性解, 显然不光裂尖的张开位移, 整个裂纹尖端的应力和位移解也是不难导出的.

关于第二点, 考察(2.16)和(2.25)式可知, 当位错群的运动速度 v 趋于 Rayleigh 波速 v_R 时, 位错密度将趋于无穷大, 这可能成为韧性材料裂纹形成的一种机理. 文[12]的作者曾就脆性材料讨论过这个问题, 但工程材料大多是韧性的. 由本文推得的结果分析可知, 在高速变形时, 位错群在变形体中快速移动, 形成塑性变形, 当位错速度趋于 Rayleigh 表面波速时位错密度迅速增长而合并为一个大位错, 形成起始微裂纹, 而无需位错的积塞. 这可能成为一种在韧性材料中高速变形时宏观裂纹的形成机理, 同时也给运动位错群的研究赋予了实际意义. 考察位错密度分布的表达式可知, 对于裂纹尖端发生塑性变形的情形, 运动位错密度是对数形的, 这说明裂纹尖端的位错增殖削弱了奇异性, 这与静态的BCS解相似.

最后(2.21), (2.27), (2.31), (2.45)诸式显然可以作为运动裂纹的失稳判据, 由实验得到其临界值 $\delta_{I, I, I}^{M_0}$, 则张开位移判据为:

$$\delta_{I, I, I}^M < \delta_{I, I, I}^{M_0} \quad (3.4)$$

四、结 论

1. 本文用动力位错作为数学工具描述运动裂纹尖端的宏观塑性性质, 用细观线性模型叠加处理非线性问题, 在断裂动力学的研究中引入了一种较简便的分析方法.

2. 运动裂纹尖端的张开位移临界值 $\delta_{I, I, I}^{M_0}$ 可作为弹塑性运动裂纹的失稳判据.

3. 运动位错群趋于临界速度时引起位错密度突发性增长, 可以作为韧性介质高速变形时微裂纹生成原因, 区别于由于位错积塞形成微裂纹的机理, 而成为裂纹形成的另一种可能的解释.

文作者感谢薛大为教授在本文写作过程中给予的支持和帮助.

参 考 文 献

- [1] Eshelby, J. D., Edge dislocations in anisotropic materials, *Phil. Mag.*, **40** (1949), 903.
- [2] Bilby, B. A., A. H. Cottrell and H. Swinden, The spread of plastic yield from a notch, *Proc. Roy. Soc.*, **A272**. (1963), 304.
- [3] Leibfried, G. and H. D. Dietze, Zur theorie der schraubenversetzung, *Z. Physik*, **126** (1949), 790.
- [4] Eshelby, J. D., Dislocations in visco-elastic materials, *Phil. Mag.*, **6** (1961), 593.
- [5] Radok, J. R. M., On the solution of problems of dynamic plane elasticity, *Quarterly Appl. Math.*, **14** (1956), 289.
- [6] Weertman, J., Stress and displacement fields and edge dislocation that climbs

- with a uniform velocity, *J. Appl. Phys.*, **38** (1967), 2612.
- [7] Yoffe, E. Y., The moving Griffith crack, *Phil. Mag.*, **42** (1951), 739.
- [8] Fan, T. Y., Moving defect with irreversible deformation zone and criterion of nonlinear dynamic fracture of solids, *Chinese Phys. Letter*, **9** (1986), 405.
- [9] Eshelby, J. D., Uniformly moving dislocations, *Proc. Phys. Soc.*, **A62** (1949), 307.
- [10] Dugdale, D. S., Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Solids*, **8** (1960), 100.
- [11] Lardner, R. W., *Mathematical Theory of Dislocation and Fracture*, University of Toronto Press (1974), 72.
- [12] Weertman, J., *Response of Metals to High Velocity Deformation*, P. G. Shewman and V. F. Zackay Press, Cambridge (1959).

Dynamic Dislocations Solution to Elastoplastic Moving Cracks

Zhao Zhi-su

(Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing)

Abstract

In the range of micro-cosmic, an analogy between linear dislocation arrays and moving cracks is drawn, then elastoplastic moving crack problems are derived by superposition of distribution of dislocations. Various dynamical crack-opened-displacements are derived, which gives an elastoplastic stability criterion of moving cracks. In this paper, modes I, II, III moving crack problems are discussed, respectively.