

三维变形状态下 I 型裂纹裂尖应力场 结构的有限元分析*

陈晓明 官忠信 庄嘉麟

(西北工业大学) (杭州汽轮机厂)

(钱伟长推荐, 1987年1月21日收到)

摘 要

本文用ADINA(Automatic Dynamical Incremental Nonlinear Analysis)有限元程序计算了三维变形条件下, 幂硬化材料紧凑拉伸(CT)试样的应力应变场, 并根据计算结果分析了 I 型裂纹裂尖应力场的结构, 发现在厚度方向的任一平面上, 裂尖应力场的表达式都可写成 r, θ 坐标变量分离的形式, 从而 r 的函数部分可展成罗朗级数, 且三个正应力分量具有相同的数量级. 这两个结论为从理论上求解 I 型裂纹裂尖应力场的数学表达式提供了两个有根据的假设条件, 可大大简化求解过程.

一、引 言

在以往的弹塑性断裂研究中, 人们往往把 I 型断裂简化为平面问题来处理, 但事实上, I 型断裂是三维变形问题. 具有一定厚度的试样, 由于沿厚度方向的约束不同, 其应力应变场的分布亦不一样, 在自由表面附近, 这种变化尤为显著^[1,2,3,4]. 对 I 型线弹性断裂, Bapu Rao 已从理论上进行了一系列的研究, 并给出了三维变形条件下, 裂尖应力奇异场的数学表达式^[5,6], 但在弹塑性领域, 尚未有解析的应力、应变场问世. 许多实验和有限元分析发现, 弹塑性状态下应力、应变沿厚度分布的不均匀性比线弹性状态下要严重得多, 因此, 研究弹塑性状态下 I 型裂纹的三维应力应变场及由此而产生的各种物理、力学现象是非常有意义的.

本文用ADINA有限元程序对 I 型断裂的典型试样——紧凑拉伸(CT)试样进行了计算, 得到了其应力、应变分布, 并据此分析了 I 型裂纹裂尖附近应力场的结构. 分析结果发现, 沿厚度方向 z 为常数的任意平面上, 各应力分量的数学表达式均可写成平面坐标 r, θ 变量分离的形式. 因此, 按照复变函数中级数展开的定理, 可推出: 诸应力分量表达式中 r 的函数一项, 可在裂尖附近展成罗朗级数, 即诸应力分量可表示成 r 的幂函数和 θ 的函数相乘的形式, 这就是裂尖附近的应力奇异场. 对有限元计算结果的分析还发现, 在裂尖附近, 三个主应力分量的数量级相同, 或说它们的奇异性相同. 上述两条结论可为用数学的方法求解 I 型裂纹裂尖附近的应力奇异场提供两条有根据的假设, 从而简化整个理论推导过程.

* 国家自然科学基金资助课题的部分工作.

二、三维CT试样的 ADINA 有限元计算过程

ADINA有限元程序全称为: Automatic Dynamical Incremental Nonlinear Analysis (自动动态增量非线性分析) 程序, 经过多年的实践检验和不断地修正及完善, ADINA 已成为有限元软件中应用最广泛的程序之一, 因此, 用该程序对 CT 试样进行三维分析, 可以期待得到令人满意的结果。

1. 试样形式及单元划分

有限元分析是针对紧凑拉伸(CT)试样进行的, 试样及加载方式如图 1 所示。

试样有两种厚度: $B=32\text{mm}$ 和 $B=16\text{mm}$, 其它尺寸均相同: $a=24.6\text{mm}$, $w=64.6\text{mm}$, $H=38\text{mm}$, $L/2=20\text{mm}$, $D=20\text{mm}$ 。

为了客观地反映裂尖处的应力集中和应力应变沿 z 方向的变化, 有限元计算网格依据如下两条原则进行划分: 1) $x-y$ 平面上, 网格从裂尖到边界由密变稀疏; 2) 沿厚度方向 z , 网格从中心截面($z=0$)到自由表面($z=\pm B/2$)由稀疏变密, 且为了对 z 方向不同截面的计算结果进行比较, 划分时使 z 方向各截面的网格相互重合。具体形式如图 2 所示 (由于对称

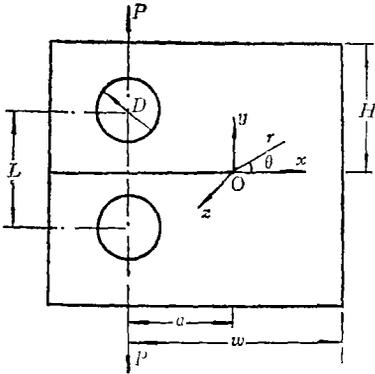


图1 CT试样中心截面及加载形式

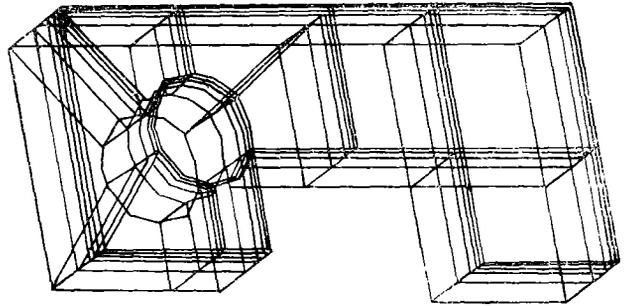


图2(a) CT试样有限元计算网格局部

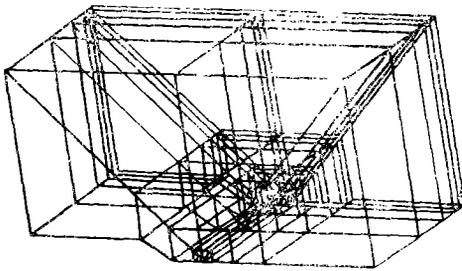


图2(b) CT试样有限元计算网格裂尖局部

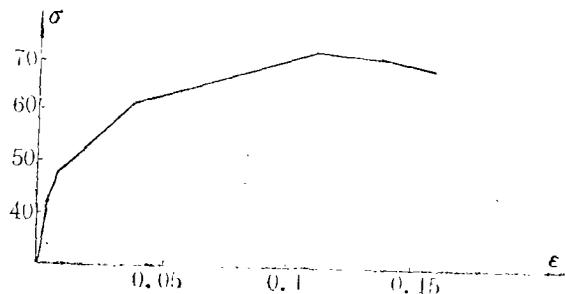


图3 应力应变关系曲线

性, 计算时只取了试样的 1/4, 即: $y \geq 0$ 和 $z \leq 0$ 部分)。

为了减少计算量又不影响精度, 计算中对裂尖附近三层单元采用非线性模式, 其余单元采用线性模式; 裂尖附近的第一层单元采用 15 节点等参元, 其余均为 20 节点等参元; $B=16\text{mm}$ 厚试样采用 $3 \times 3 \times 2$ 高斯积分, $B=32\text{mm}$ 厚试样用 $2 \times 2 \times 2$ 高斯积分。

2. 材料特性

CT 试样所用材料为 $30\text{Cr}_2\text{MoV}$, 其应力应变曲线属密赛斯 (Mises) 等向强化材料范畴, 在进行有限元分析时, 按照 ADINA 程序的要求, 其应力应变关系由图 3 所示多线性等向强化模型给出。

3. 加载过程

在有限元计算之前, 曾用试验估计出 $B=32\text{mm}$ 和 $B=16\text{mm}$ 试样的启裂载荷分别为 9200kg 和 3900kg , 因此, 将这两个值作为有限元计算的最大载荷值。计算时, 载荷逐渐增大, 且加载步长由大变小, 以便利于产生塑性变形后单元刚度矩阵的修正和迭代的进行。加载函数如图 4 和 5 所示。

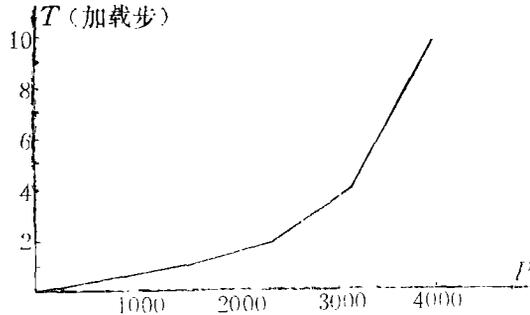


图4 B=16mm试样加载曲线

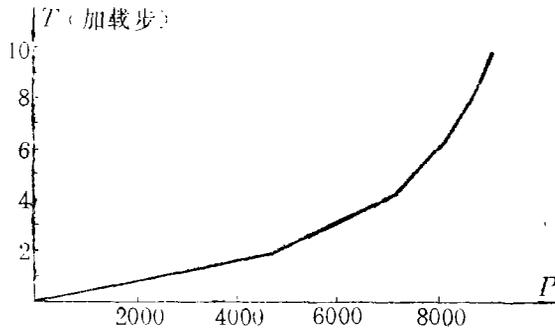


图5 B=32mm试样加载曲线

三、I 型裂纹裂尖附近应力场的结构分析

利用 ADINA 程序对 CT 试样进行的有限元计算, 得到了在不同载荷水平下应力应变的分布, 通过观察和分析发现, 在 z 为常数的任一平面上, 裂尖附近的应力分量都具有如下特征: 任取四个点 (r_1, θ_1) , (r_1, θ_2) , (r_2, θ_1) , (r_2, θ_2) 有:

$$\sigma_{IJ}(r_1, \theta_1) / \sigma_{IJ}(r_1, \theta_2) - \sigma_{IJ}(r_2, \theta_1) / \sigma_{IJ}(r_2, \theta_2) \ll 1 \quad (3.1)$$

或写成:

$$\sigma_{IJ}(r_1, \theta_1)\sigma_{IJ}(r_2, \theta_2) - \sigma_{IJ}(r_1, \theta_2)\sigma_{IJ}(r_2, \theta_1) \ll 1 \quad (3.2)$$

式中 $I, J = x, y, z$.

表 1, 2 和 3 给出了 $P=3645.82\text{kg}$ ($B=16\text{mm}$ 试样) 时计算的应力值, 此时, 裂尖附近已产生塑性变形且表中列出的点已经屈服. 为了使结果具有一般意义而又避免罗列太多的数字, 这里取了 $z=-2.22$, $z=-4.89$ 和 $z=-6.57$ 三个截面, 第一个截面上给出 σ_{xx} 和 σ_{yy} , 第二个截面上给出 σ_{xx} 和 σ_{zz} , 第三个截面上给出 σ_{yy} 和 σ_{zy} . 由于 σ_{zz} 和 σ_{yz} 的值比其它四个应力分量要小得多 (至少差 10^{-1}), 故这里未予列出. 为了直接反映有限元计算的结果, 表中所列的应力值均为高斯积分点上的应力值.

表 4 给出了前三表所列应力分量按式 (3.1) 左端计算所得的差值大小, 表中 δ 由下式决定:

$$\delta = \left\{ \left[\frac{\sigma(r_1, \theta_1)}{\sigma(r_1, \theta_2)} - \frac{\sigma(r_2, \theta_1)}{\sigma(r_2, \theta_2)} \right] / \frac{1}{4} \sum_1^4 \sigma \right\} \times 100\%$$

从表 4 可以看出, δ 值均小于 5%, 若承认有限元计算会有一些误差, 我们可认为, 在裂尖附近, $z=\text{const}$ 的任意平面上有:

$$\sigma_{IJ}(r_1, \theta_1)/\sigma_{IJ}(r_1, \theta_2) - \sigma_{IJ}(r_2, \theta_1)/\sigma_{IJ}(r_2, \theta_2) = 0 \quad (3.3)$$

成立. ($I, J = x, y, z$)

以下将证明, 若式 (3.3) 成立, 在裂尖附近, 诸应力分量可表示成 r, θ 坐标变量分离的形式, 即:

$$\sigma_{IJ}(r, \theta) = f_{IJ}(r)\tilde{\sigma}_{IJ}(\theta) \quad (3.4)$$

必要性是显然的(略).

充分性:

表 1

$z = -2.22$ 平面上裂尖附近应力分布

θ°	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9
σ_{xx}	6.43	26.57	41.58	48.41	63.43	83.57	96.43	116.57	131.58
σ_{yy}									
r_1	200.40			159.09			179.46		
0.01278	242.39			244.36			207.48		
r_2		198.44			211.59			162.73	
0.01420		245.98			260.50			175.82	
r_3			196.62			218.18			175.72
0.01698			245.01			254.50			162.27
r_4	57.79			29.50			37.46		
0.2516	64.74			70.54			58.89		
r_5		50.09			53.01			28.81	
0.2795		71.84			75.85			37.91	
r_6			35.15			46.26			21.70
0.3342			72.95			72.99			27.65

表 2

$z = -4.89$ 平面上裂尖附近应力分布

θ°	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	
r	σ_{xx}	6.43	26.57	41.58	48.41	63.43	83.57	96.43	116.57	131.58
	σ_{zz}									
r_1	212.25			170.88			171.57			
0.01278	209.02			192.40			178.43			
r_2		234.46			218.10			163.96		
0.01420		232.71			232.76			160.43		
r_3			181.52			211.74				210.59
0.01698			174.34			219.26				188.67
r_4	59.01			28.56			31.01			
0.2516	26.59			22.09			26.58			
r_5		51.51			28.95				26.39	
0.2795		26.59			30.69				24.09	
r_6			32.45			35.99				
0.3342			24.98			28.76				

表 3

$z = -6.57$ 平面上裂尖附近应力分布

θ°	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	
r	σ_{yy}	6.43	26.57	41.58	48.41	63.43	83.57	96.43	116.57	131.58
	σ_{xy}									
r_1	307.52			271.76			159.32			
0.01278	14.24			-7.95			-30.18			
r_2		329.14			347.84			278.52		
0.01420		-10.36			-17.64			-18.33		
r_3			216.96			216.09				187.42
0.01698			-2.18			-15.67				-21.29
r_4	65.10			57.40			40.82			
0.2516	10.30			-7.77			-21.48			
r_5		70.90			71.19				34.48	
0.2795		-5.30			-12.20				-21.59	
r_6			67.71			54.71				32.05
0.3342			-1.63			-15.95				-16.69

已知：在 $z = \text{const}$ 的平面上，对任意 (r_1, θ_1) , (r_1, θ_2) , (r_2, θ_1) , (r_2, θ_2) 有：

$$\sigma_{IJ}(r_1, \theta_1) / \sigma_{IJ}(r_1, \theta_2) = \sigma_{IJ}(r_2, \theta_1) / \sigma_{IJ}(r_2, \theta_2) \quad (3.5)$$

求证：

$$\sigma_{IJ}(r, \theta) = f_{IJ}(r) \tilde{\sigma}_{IJ}(\theta)$$

证明 因为对任意 (r_1, θ_1) , (r_1, θ_2) , (r_2, θ_1) , (r_2, θ_2) 有式(3.5)成立，从而，固定 (r_1, θ_1) ，对任意 (r, θ) 有：

表 4

裂尖附近应力分量的比较

σ_{IJ}	点	$r_1 r_4$	$r_2 r_5$	$r_3 r_6$	$r_1 r_4$	$r_2 r_5$	$r_3 r_6$
		$\theta_1 \theta_4$	$\theta_2 \theta_5$	$\theta_3 \theta_6$	$\theta_4 \theta_7$	$\theta_5 \theta_8$	$\theta_6 \theta_9$
表 1	σ_{xx}	-1.7%	-0.02%	0.7%	0.06%	-1.4%	-2.9%
	σ_{yy}	0.2%	-0.9%	-0.08%	-0.06%	-0.8%	-1.8%
表 2	σ_{xx}	-2.1%	-2.2%	0.2%	0.5%	1.2%	
	σ_{zz}	-0.8%	0.9%	-0.6%	1.9%	0.8%	
表 3	σ_{yy}	0	-0.1%	-0.5%	0.6%	-1.7%	-1.6%
	σ_{xy}	3.6%	4.5%	4%	-2.3%	3.4%	-1.7%

$$\sigma_{IJ}(r_1, \theta_1) / \sigma_{IJ}(r_1, \theta) = \sigma_{IJ}(r, \theta_1) / \sigma_{IJ}(r, \theta)$$

⇒ $\sigma_{IJ}(r, \theta) = \sigma_{IJ}(r, \theta_1) \sigma_{IJ}(r_1, \theta) / \sigma_{IJ}(r_1, \theta_1) = f_{IJ}(r) \tilde{\sigma}_{IJ}(\theta) \cdot \text{const}$
证毕。

因此，我们得出如下结论，对弹塑性状态下的 I 型断裂，在 z 为常数的任意平面上，裂尖附近的应力场可以写成式(3.4)的形式。

众所周知，带裂纹物体的应力场在裂尖具有奇异性，即： $r=0$ 是式(3.4)中 $f_{IJ}(r)$ 的奇点，考虑到表示应力场的函数沿各个方向都是光滑的，因此， $f_{IJ}(r)$ 可以在 $r=0$ 的领域上展开成为罗朗级数^[7]。即：在裂尖附近有：

$$\sigma_{IJ}(r, \theta) = r^{K_{IJ}} \tilde{\sigma}_{IJ}(\theta) \quad (z = \text{const}) \quad (3.6)$$

式(3.6)是应力的主项。

以上所讨论的是 $z = \text{const}$ 时的情况，若在应力的表达式中考虑 z 变量的影响，式(3.6)可写成如下形式：

$$\sigma_{IJ}(r, \theta, z) = r^{K_{IJ}(z)} \tilde{\sigma}_{IJ}(\theta, z) \quad (3.7)$$

式(3.7)是 I 型裂纹在三维变形状态下应力场的一般表达式。

四、I 型裂纹裂尖附近的正应力分析

I 型断裂之所以是三维变形问题，是因为厚度方向 (z 方向) 的应力是不可忽视的。用 ADINA 程序对紧凑拉伸(CT)试样所做的有限元分析结果表明：裂尖附近， σ_{zz} 与 σ_{xx} 和 σ_{yy} 具有相同的数量级(或说 σ_{zz} 的量级不比 σ_{xx} 和 σ_{yy} 低)。因此，在 I 型断裂中，厚度方向的正应力 σ_{zz} 不可忽略，计算结果还表明： z 方向的两个剪应力 σ_{xz} 和 σ_{yz} 与其它四个应力分量相比的确很小，是可忽略的。

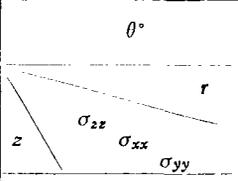
表 5 给出了 $B=32\text{mm}$ 试样在 z 为不同值的平面上，三个正应力值的分布情况，表中的值对应外载 $P=3525\text{kg}$ 。可以看出，在裂尖附近， σ_{zz} 和 σ_{xx} ， σ_{yy} 具有相同的量级，且沿 r 方向的变化率也是相同的。

五、结 论

用 ADINA 有限元程序对紧凑拉伸(CT)试样进行计算所得到的应力应变场，为分析 I 型裂纹裂尖附近解的结构提供了依据，其结果表明：1) 在 $z = \text{const}$ 的任一平面上，裂尖附近

表 5

B=32mm 试样裂尖正应力分布

	11.93		38.26		51.74		78.07	
	0.046	0.636	0.057	0.792	0.046	0.636	0.057	0.792
-1.768	47.96	12.86	59.38	12.06	56.71	10.28	68.59	9.94
	75.78	29.11	60.31	18.90	55.83	12.01	67.14	8.94
	94.75	24.58	103.28	29.89	99.86	30.41	102.17	32.37
-6.598	49.92	12.62	55.19	11.28	59.88	9.50	56.26	9.04
	80.55	26.91	54.75	17.91	56.57	10.76	50.02	7.54
	90.91	23.67	97.84	27.63	101.66	28.44	88.38	30.44
-9.226	45.98	11.95	50.59	11.04	55.52	8.53	62.23	9.15
	82.59	25.18	63.33	17.29	59.16	9.71	56.14	7.83
	95.83	22.76	97.60	29.83	100.60	26.45	92.12	30.14
-11.58	43.46	10.82	48.23	9.63	53.53	7.95	53.51	7.11
	89.33	23.33	60.22	14.88	61.78	9.31	46.12	5.04
	108.15	22.41	99.88	25.93	100.30	25.39	86.01	26.73

的应力分量均可写成 r, θ 坐标变量分离的函数形式, 即有: $\sigma_{IJ}(r, \theta) = f_{IJ}(r) \tilde{\sigma}_{IJ}(\theta)$, 而根据复变函数级数展开的定理, 应力主项又可写成: $\sigma_{IJ}(r, \theta) = r^{K_{IJ}} \tilde{\sigma}_{IJ}(\theta)$. 从而, I 型裂纹在三维变形状态下, 裂尖附近的应力主项的一般表达式为: $\sigma_{IJ}(r, \theta, z) = r^{K_{IJ}} \tilde{\sigma}_{IJ}(\theta, z)$. 2) 在三维变形状态下, I 型裂纹裂尖附近的厚度方向的正应力 σ_{zz} 与 σ_{xx}, σ_{yy} 具有相同的量级, 且三个正应力沿 r 方向的变化率相同, 因此, 沿 z 方向的正应力 σ_{zz} 是不可忽略的. 上述两个结论可为用数学的方法求解三维变形条件下, I 型裂纹裂尖奇异场提供二个假设, 从而简化求解工作.

参 考 文 献

[1] Kikuchi, M. and H. Miyamoto, The thickness effect of side grooved CT specimens, *Int. J. Pres. and Piping*, 16 (1984), 1—16.

[2] Macik, S. N. and L. S. Fu, Elasto-plastic analysis for a finite thickness rectangular plate containing a through-thickness central crack, *Int. J. Fract.*, 18 (1982), 45—63.

[3] Wellman, G. W., et al., Three-dimensional elastic-plastic finite element analysis of three-point bend specimens, *ASTM STP 868* (1985), 214—237.

[4] Ayres, D. J., A numerical procedure for calculating stress and deformation near a slit in a three-dimension elastic-plastic solid, *Eng. Fract. Mech.*, 2 (1970), 87—106.

[5] Bapu Rao, M. N., Three-dimensional stress problem of a finite thick plate with a through crack under tension, *Proceedings of ICF6*, 2 (1984), 963—970.

[6] Bapu Rao, M. N., Three-dimensional analysis of a finite thick plate with a through crack, *Int. J. Fract.*, 17 (1981), 43—46.

[7] 梁昆淼, 《数学物理方法》, 人民教育出版社 (1978), 36—60.

Analysis to the Stress Construction at the Vicinity of Crack Tip for Mode I Fracture in 3-D State Using Finite Element Method

Chen Xiao-ming Guan Zhong-xin

(*Northwestern Polytechnical University, Xi'an*)

Zhuang Jia-lin

(*Hangzhou Steam Turbine Factory, Hangzhou*)

Abstract

The stresses and strains are calculated for CT specimen of power hardening material in 3-D deformation state using ADINA finite element program, and the stress distribution at the vicinity of crack tip for Mode I fracture is analysed according to the results of calculation. It is found that the expression of stress can be written as the form of separation of variables of r and θ , and then the function of r can be expanded in Laurant series. It is still found that the three normal stresses have the same order of magnitude. The conclusions offer two suppositions to obtain the theoretical expression of stress at the vicinity of crack tip for Mode I fracture with good ground, and the procedure of solution will be greatly simplified.