应用数学和力学，第9卷第6期（1988年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

弹性地基上自由边矩形板的弯曲、稳定和振动*

成祥生

（同济大学，1987年2月26日收到）

摘　要

本文讨论了在弹性地基上自由边矩形板的弯曲、稳定和振动的问题．本文选择了一个挠曲函数，它不但能满足自由边的全部边界条件，而且也满足了自由角点的条件，从而得到了较好的近似解，文中使用了能量法．

一、前　言

在弹性地基上的自由边矩形板的弯曲、稳定和振动的问题是一个较复杂的问题，因为要使解答既满足板弯曲面的微分方程又要满足所有的自由边的边界条件及角点条件，是很困难的。最早研究这问题的是B. З. Власов[1]，他使用了弹性半空间的弹性地基理论；同时E. C. Кононенко[2]对这同一个问题也进行了研究，他使用了Б. Г. Галёркин法，并提出了用一个二重三角级数作为挠曲函数，该函数能分离变量，并且每一个函数的本身及其一至三阶导数在边界上都为零；以后张福范[3]使用了迭加法，他令自由边上的综合横向剪力及角点反力为零，并取35阶的联立代数方程，从而得到了解答；但以上各个方法的计算都比较烦复。本文使用了能量法或称Rayleigh-Ritz法对在弹性地基上的自由边矩形板的弯曲、稳定和振动的问题进行研究。我们选择了一个挠曲函数，它既满足自由边上的综合横向剪力及自由角点的反力为零的条件，又使它近似地满足自由边上弯矩为零的条件，计算比较简便。最后，我们将作用于板上的总荷载和地基上的总反力相平衡的结果来检验所得的解答的可靠性。

二、问题的挠曲函数

设有一矩形薄板，取坐标如图1所示，薄板的四边自由，在板中心受有一横向的集中力P作用。在边界上，相应的弯矩和综合横向剪力应为零。在自由角点上，角点反力也应为零。例如，在$x=0$和$x=a$边上，应有[4]

$$w_{xx}+\mu w_{yy}=0 \tag{2.1}$$

* 钱伟长推荐

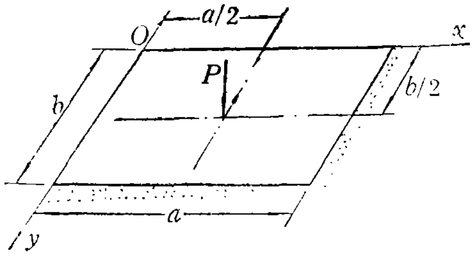

图　1

$$w_{xxx}+(2-\mu)w_{xyy}=0 \tag{2.2}$$

在$y=0$和$y=b$边上，应有

$$w_{yy}+\mu w_{xx}=0 \tag{2.3}$$

$$w_{yyy}+(2-\mu)w_{yxx}=0 \tag{2.4}$$

在四个自由角点上，应有

$$w_{xy}=0 \tag{2.5}$$

据上所述，我们选取如下的挠曲函数

$$w=f_1\cos\frac{2\pi x}{a}+f_2\cos\frac{2\pi y}{b}+f_3\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}+f_4 \tag{2.6}$$

其中a和b分别为薄板沿x-轴和y-轴方向边的长度，而系数$f_1\sim f_4$都是待定的参数。不难验证，函数(2.6)在所有的边界上满足综合横向剪力为零的条件(2.2)和(2.4)以及在四个自由角点上满足角点反力为零的条件(2.5)；但在所有的自由边界上，弯矩为零的条件(2.1)和(2.3)未能满足。如果欲满足它们，可将函数(2.6)代入(2.1)或(2.3)中，便得到

$$f_2=-(\mu+b^2/a^2)f_3/\mu,\quad f_1=-(\mu+a^2/b^2)f_3/\mu \tag{2.7}$$

或写成

$$f_1=\beta_1 f_3,\quad f_2=\beta_2 f_3 \tag{2.8}$$

于是挠曲函数(2.6)可表示如下

$$w=f_3\left(\beta_1\cos\frac{2\pi x}{a}+\beta_2\cos\frac{2\pi y}{b}+\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\right)+f_4 \tag{2.9}$$

现在挠曲函数中的独立的参数只有两个。

对于方板的情形，$b=a$，取$\mu=0.167$，则由(2.7)得

$$\beta_1=\beta_2=\beta=-6.98802 \tag{2.10}$$

这样，在所有的自由边上相应的弯矩可近似地得到满足。

三、弯曲问题

我们首先用能量法来讨论在弹性地基上的自由边矩形板的弯曲问题。若板受到外荷载作用而弯曲，其整个系统的形变势能是[4]

$$U=\frac{D}{2}\iint[w_{xx}^2+w_{yy}^2+2\mu w_{xx}w_{yy}+2(1-\mu)w_{xy}^2]\,dxdy+\frac{K}{2}\iint w^2dxdy \tag{3.1}$$

其中$D=Eh^3/12(1-\mu^2)$是板的弯曲刚度；E，h，μ分别为板材料的弹性模量，厚度和泊松比；K为弹性地基的系数，上式的第二个积分表示弹性地基的形变势能，二重积分是在板的中面区域内进行的。

将(2.9)代入(3.1)进行积分，并考虑到是方板的情形，得到

$$U=\frac{1}{2}[(49.83242A+49.08242B)f_3^2+Bf_4^2] \tag{3.2}$$

其中

$$A=D(2\pi)^4/a^2,\quad B=Ka^2 \tag{3.3}$$

再计算外力的势能。若正方形薄板在中心受集中力P作用，如图1。则外力的势能为[4]

$$W=Pw\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$$

将(2.9)代入上式，并注意到(2.10)，可得

$$W=P(14.97604f_3+f_4) \tag{3.4}$$

于是系统的总势能为

$$\Pi=U-W \tag{3.5}$$

其中U和W分别由(3.2)和(3.4)确定。

根据Rayleigh-Ritz法，系统在稳定平衡时，其总势能为最小，即

$$\delta\Pi=0 \tag{3.6}$$

于是由(3.5)和(3.6)对f_3和f_4两个独立的参数进行变分，可得到包含关于参数f_3和f_4的的两个代数方程的方程组

$$(49.83242A+49.08242B)f_3=14.976604P,\ Bf_4=P \tag{3.7}$$

若注意到(3.3)，并给出$Ka^4/D=10^4$，由此可求得

$$f_3=0.26343\times10^{-4}Pa^2/D,\ f_4=1\times10^{-4}Pa^2/D \tag{3.8}$$

由(2.9)可得板中心的最大挠度

$$w_{\max}=w\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)=4.94514\times10^{-4}Pa^2/D \tag{3.9}$$

继而可计算弯矩和扭矩。

现在试观地基的总反力和全部外荷载的平衡情形，并以此来检验前面计算结果准确的程度。地基的总反力为

$$R_f=K\iint wdxdy=Ka^2f_4=\frac{Ka^4}{D}\times10^{-4}P=P \tag{3.10}$$

上式已应用了(2.9)，(3.8)及$Ka^4/D=10^4$。这说明了地基总反力正好和全部外荷载保持平衡，其误差为零，因此上面所得解答的可靠性是无可怀疑的。

四、稳定性问题

若弹性地基上的自由边矩形板在边界上沿x和y方向分别受有均匀分布的压力P_x和P_y，则外力的势能为

$$W=\frac{1}{2}\iint(P_xw_x^2+P_yw_y^2)dxdy \tag{4.1}$$

在上式中，若设$P_y=\gamma^\circ P_x$，γ°称为临界力参数，并将(2.9)代入(4.1)进行积分，可得

$$W=\frac{1}{4}P_x\left[\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\left(\beta_1^2+\frac{1}{2}\right)+\gamma^\circ\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2\left(\beta_2^2+\frac{1}{2}\right)\right]abf_3^2 \tag{4.2}$$

若为方板，并注意到(2.10)得到

$$W=486.89076(1+\gamma^\circ)P_xf_3^2 \tag{4.3}$$

若方形薄板双向受均布且相等的压力，则$P_x=P_y$，$\gamma^\circ=1$，于是由(4.3)得

$$W=973.78152P_xf_3^2 \tag{4.4}$$

整个系统的形变势能仍由(3.2)表示，于是由总势能(3.5)及其一阶变分(3.6)求参数f_3和f_4的非零解，可得方板情形下的稳定性方程如下

$$49.83242A+49.08242B-1947.56304P_x=0 \tag{4.5}$$

注意到(3.3)，从而可求得最小的临界荷载

$$(P_{cr})_{\min}=291.89865D/a^2=29.57556\pi^2D/a^2 \tag{4.6}$$

若方形薄板只受单向均匀压力，例如只有P_x，而$P_y=0$．从而$\gamma^\circ=0$，于是由(4.3)得

$$W=486.89076P_xf_3^2 \tag{4.7}$$

从而得到对应的稳定性方程如下

$$49.83242A+49.08242B-977.78152P_x=0 \tag{4.8}$$

由此可得最小的临界荷载

$$(P_{cr})_{\min}=583.79729D/a^2=59.15112\pi^2D/a^2 \tag{4.9}$$

五、振 动 问 题

若设薄板的自由振动的固有频率为ω，因薄板具有分布质量，所以它的动能是

$$W_K=\frac{1}{2}\omega^2\frac{\gamma h}{g}\iint w^2dxdy \tag{5.1}$$

其中γ和g分别为板材料的比重及重力加速度．将(2.9)代入(5.1)并进行积分，可得到在弹性地基上的自由边矩形板的动能

$$W_K=\frac{1}{2}\omega^2\frac{\gamma h}{g}ab\left[\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\frac{\beta_2^2}{2}+\frac{1}{4}\right)f_3^2+f_4^2\right] \tag{5.2}$$

若为方板，$b=a$，$\beta_1=\beta_2=\beta$，并注意到(2.10)，于是有

$$W_K=\frac{1}{2}\omega^2\frac{\gamma h}{g}a^2(49.08242f_3^2+f_4^2) \tag{5.3}$$

整个系统的总能量的形式仍和(3.5)相同，其中整个系统的形变势能仍由(3.2)表示，但外力的势能应换成系统的动能W_K，于是由总能量(3.5)及其一阶变分式(3.6)，求参数f_3和f_4的非零解，可得方板情形下的频率方程如下：

$$\begin{vmatrix} 49.83242A+49.08242B-49.08242C\omega^2 & 0 \\ 0 & B-C\omega^2 \end{vmatrix}=0 \tag{5.4}$$

其中A和B仍由(3.3)表示，而

$$C=\gamma ha^2/g \tag{5.5}$$

由(5.4)可得薄板自由振动的最小的固有频率

$$\omega_{\min}=\frac{100}{a^2}\sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}}=10.13213\frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}} \tag{5.6}$$

六、结 束 语

本文用能量法研究了弹性地基上自由边矩形板的弯曲、稳定和振动的问题，得到了近似解．其中所选用的挠曲函数同时满足了全部自由边上的综合横向剪力及四个自由角点的角点反力为零的边界条件，而在所有自由边上的弯矩为零的条件只能近似地得到满足．从变分法的观点来看，这些条件都属于自然边界条件，若通过变分它们也会近似地得到满足．

参 考 文 献

[1] Власов В. З. и Н. Н. Леонтьев, *Балки, Плиты и Оболочки на Упругом Основании* (1960).

[2] Кононенко Е. С., О приближенном расчете прямоугольных плит на упругом основании, *Исследования по Теории Сооружений*, Сборник Статей, **9**, 11 (1960).

[3] 张福范，《弹性薄板》(第二版)，科学出版社 (1984), 237—249.

[4] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, second edition, McGraw-Hill Book Comp. Inc. (1959).

The Bending, Stability and Vibrations of Rectangular Plates with Free Edges on Elastic Foundations

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

This paper discusses the problems of the bending, stability and vibrations of the rectangular plates with free boundaries on elastic foundations. In the present paper we select a flexural function, which satisfies not only all the boundary conditions on free edges but also the conditions at free corner points, and consequently we obtain a better approximate solution. The energy method is used in this paper.