

含有直线状裂纹正交异性板的平面 问题的应力函数

段树金 中川建治

(华北水利水电学院) (日本岐阜大学工学部)
(钱伟长推荐, 1987年1月12日收到)

摘 要

本文的解析对象为含有一与主轴呈任意角度直线状裂纹的无限大正交异性板的平面问题。采用加权积分法导出了能够表现裂纹尖端附近有限应力集中特征的应力函数。这样的计算模型消除了裂纹尖端的奇异性, 可以比较真实地反映非金属材料微裂区的力学行为。

一、前 言

二十多年来, 岩石、混凝土等非金属材料的断裂力学得到了发展。Kaplan 首先把断裂力学引入了混凝土的断裂研究, 并进行了断裂韧度试验^[1]。国内外大量研究表明, 混凝土等非金属材料与金属材料在断裂特性方面有很大的不同^[2~10]。混凝土材料断裂韧度测试中的尺寸效应问题给断裂分析带来了极大的困难, 目前解释尚不一致。由于混凝土材料本身的力学特性, 在裂纹尖端附近存在一微裂纹区, 其应力应变场并不表现为奇异性。

七十年代后期, Hillerborg, Petersson 等根据在拉伸荷载作用下混凝土的应变软化特性, 建立了全应力-应变关系, 提出了虚裂纹模型(FCM)并对之进行了研究^[2, 11]。这个模型是将裂纹尖端存在的微裂区用一个能够传递应力的假想裂纹来代替, 当裂纹开口时其裂纹尖端的应力不马上变为零, 而是随着裂纹宽度的增加而减小; 当虚裂纹尖端的应力达到拉伸极限时裂纹才扩展。它是B-D模型^[12, 13]的继承和发展。Reinhardt 提出了用幂函数来表示虚裂区的应力分布^[14, 15]。

作者曾用加权积分法导出了反映含有直线状裂纹的各向同性板和含有圆形状裂纹的三维问题的裂纹尖端附近有限应力集中的应力函数和位移函数^[16, 17]。本文进一步把这一手法应用于含有直线状裂纹的正交异性板的平面问题。

二、相 容 方 程

如图1所示, 为一以 x, y 轴为主轴的无限大正交异性板, 在中心有一长为 $2a$ 的穿透裂纹, 其裂纹轴线 ζ 与 x 轴构成的角度 ω 任意, 在裂纹面和无限远处作用有均匀的拉(压)力和剪力。

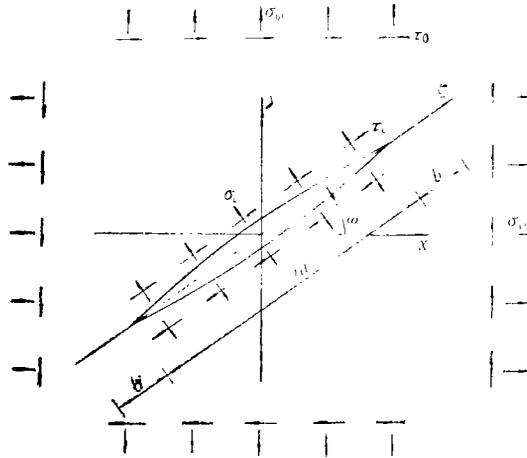


图 1 正交异性板中的 I、II 型裂纹

首先定义如下的参数:

$B_x = \beta_x^4 B$, $B_y = \beta_y^4 B$ 为主轴断面的刚度; μ_x , μ_y 为泊松比, $\mu_x/\beta_x = \mu_y/\beta_y = \mu/B$; G_{xy} 为剪切刚度; κ 为反映扭转刚度的常数, $2\kappa = \sqrt{B_x B_y} (1/G_{xy} - 2\mu/B)$.

可以导出位移 u , v , 应力函数 $\phi(x, y)$ 和应变 ε_x , ε_y , γ_{xy} 之间具有如下关系

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{B_x} - \mu_y \frac{\sigma_y}{B_y}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma_y}{B_y} - \mu_x \frac{\sigma_x}{B_x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad (2.1)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.2)$$

最终可以导出相容方程为^[18]

$$B_x \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\kappa \sqrt{B_x B_y} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.3)$$

三、坐标变换

首先把 x , y 坐标由参数 β_x , β_y 变换为 X , Y 坐标, 即

$$X = x/\beta_x, \quad Y = y/\beta_y \quad (3.1)$$

且定义

$$\alpha^2 - 2\kappa\alpha + 1 = 0, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\kappa}{2}} \quad (3.2)$$

式中 i 为虚数 $i = \sqrt{-1}$, 则微分方程 (2.3) 可以表示为

$$\left(\frac{\partial}{\partial X} + i\sqrt{\alpha} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} - i\sqrt{\alpha} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial Y} + i\sqrt{\alpha} \frac{\partial}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial}{\partial Y} - i\sqrt{\alpha} \frac{\partial}{\partial X} \right) \phi = 0 \quad (3.3)$$

此微分方程的解可由复变函数 Z_j ($j=1, 2, 3, 4$) 的任意可微函数 $f_j(Z_j)$ 表示如下

$$\phi(Z_j) = f_1(Z_1) + f_2(Z_2) + f_3(Z_3) + f_4(Z_4) \quad (3.4)$$

其中

$$Z_1 = \sqrt{\alpha} X + iY = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta_x}} x + \frac{i}{\beta_y} y, \quad Z_2 = \sqrt{\alpha} X - iY = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta_x}} x - \frac{i}{\beta_y} y$$

$$Z_3 = \sqrt{\alpha} Y + iX = i\sqrt{\alpha} \bar{Z}_1, \quad Z_4 = \sqrt{\alpha} Y - iX = -i\sqrt{\alpha} \bar{Z}_2$$

但是裂纹是沿着与 x 轴呈 ω 角度的方向, 故取裂纹轴线的方向为 ζ 轴, 与 ζ 轴相垂直的方向为 η 轴, 坐标变换如下

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta \\ \eta \end{Bmatrix} = [M_1] \begin{Bmatrix} \zeta \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

式中, $c = \cos\omega$, $s = \sin\omega$.

式(3.4)所定义的函数 Z_1, Z_2 可以转换为用坐标 ζ, η 所表示的函数

$$\begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & -d_{12} \\ d_{21} & -d_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta \\ \eta \end{Bmatrix} = [M_2] \begin{Bmatrix} \zeta \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

式中

$$d_{21,1} = \frac{c}{\beta_x} \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} + i \left\{ \frac{c}{\beta_x} \sqrt{\frac{1-\kappa}{2}} \pm \frac{s}{\beta_y} \right\}$$

$$d_{21,2} = \frac{s}{\beta_x} \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} + i \left\{ \frac{s}{\beta_x} \sqrt{\frac{1-\kappa}{2}} \mp \frac{c}{\beta_y} \right\}$$

两种坐标系之间的应力变换为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\zeta \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\zeta\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [M_3] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_\zeta \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\zeta\eta} \end{Bmatrix} = [M_4] \begin{Bmatrix} \sigma_\zeta \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\zeta\eta} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

四、Westergaard型应力函数

1. 外力均匀分布的应力函数 $\phi_0(x, y)$

为了表示裂纹面上和无限远处作用的均匀外力所构成的应力状态, 定义如下的应力函数 $\phi_0(x, y)$

$$\phi_0(x, y) = (\varepsilon_3 + i\varepsilon_1) Z_1^2 + (\varepsilon_3 + i\varepsilon_2) Z_2^2 \quad (4.1)$$

这里的 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_3$ 是待定系数, 由全体的边界条件确定. 相应的应力表示为

$$\begin{Bmatrix} S_\zeta \\ S_\eta \\ T_{\zeta\eta} \end{Bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} id_{12}^2 & id_{22}^2 & d_{12}^2 + d_{22}^2 \\ id_{11}^2 & id_{21}^2 & d_{11}^2 + d_{21}^2 \\ id_{11}d_{12} & id_{21}d_{22} & d_{11}d_{12} + d_{21}d_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = [M_5] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = [M_4][M_5] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = [M_6] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

式中的 $S_\zeta, S_\eta, T_{\zeta\eta}, S_x, S_y, T_{xy}$ 是与 $\sigma_\zeta, \sigma_\eta, \tau_{\zeta\eta}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 相对应的复数应力.

2. 裂纹的应力函数 $\phi_1(x, y)$

正交异性板平面问题裂纹的应力函数可以参照各向同性板情况下的应力函数得到^[10]. 这

里 A 是相当于裂纹长度的参数.

$$\phi_{11}(Z, A) = \frac{1}{2} [Z\sqrt{Z^2 - A^2} - A^2 \ln(Z + \sqrt{Z^2 - A^2})] \quad (4.4)$$

$$\phi_{11}''(Z, A) = Z/\sqrt{Z^2 - A^2} \quad (4.5)$$

同时考虑裂纹面内拉(压)和剪切两种状态(即 I, II 复合型), 应力函数 $\phi_1(x, y)$ 可以表述为如下的形式

$$\phi_1(x, y) = \phi_{11}(Z_1, d_{11}a)(\varepsilon_4 + i\varepsilon_6) + \phi_{11}(Z_2, d_{21}a)(\varepsilon_6 + i\varepsilon_7) \quad (4.6)$$

其中 $\varepsilon_4 \sim \varepsilon_7$ 是待定系数. 应力可由下式求得

$$\begin{Bmatrix} S_\zeta \\ S_\eta \\ T_{\zeta\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12}^2 & id_{12}^2 & d_{22}^2 & id_{22}^2 \\ d_{11}^2 & id_{11}^2 & d_{21}^2 & id_{21}^2 \\ d_{11}d_{12} & id_{11}d_{12} & d_{21}d_{22} & id_{21}d_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11}''(Z_1, d_{11}a)\varepsilon_4 \\ \phi_{11}''(Z_1, d_{11}a)\varepsilon_6 \\ \phi_{11}''(Z_2, d_{21}a)\varepsilon_6 \\ \phi_{11}''(Z_2, d_{21}a)\varepsilon_7 \end{Bmatrix} = [M_7] \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

五、边界条件

为了确定应力函数 $\phi_0(x, y)$ 中的待定系数 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_3$ 和 $\phi_1(x, y)$ 中的待定系数 $\varepsilon_4 \sim \varepsilon_7$, 现在来考虑边界条件

1) 裂纹面上 $\sigma_\eta = \sigma_0, \tau_{\zeta\eta} = \tau_0$

2) $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $\sigma_x = \sigma_{x0}, \tau_{xy} = \tau_0$; $y \rightarrow \pm\infty$ 时, $\sigma_y = \sigma_{y0}, \tau_{xy} = \tau_0$

3) 裂纹面上由于函数 $\phi_1(x, y)$ 产生的应力分量 $\sigma_\eta = 0, \tau_{\zeta\eta} = 0$

进行整理可以得到关于系数 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_7$ 的7元连立方程组

$$\begin{array}{|l|l|} \hline M_6 \text{ 的第2行} & 0 \\ \hline M_6 \text{ 的第3行} & 0 \\ \hline M_6 \text{ 的第1行} & \\ \hline M_6 \text{ 的第2行} & M_4 \times M_7 \\ \hline M_6 \text{ 的第3行} & \\ \hline 0 & M_7 \text{ 的第2行} \\ & M_7 \text{ 的第3行} \\ \hline \end{array} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_0 \\ \tau_0 \\ \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \tau_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

由此可确定出系数 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_7$.

六、构成裂纹尖端有限应力集中的加权积分法

显然由式(4.7)所求得的应力在裂纹尖端是发散的, 即与材料各向同性的情况下一样, 应力在裂纹尖端附近表现为 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的奇异性^[20]. 为了消除应力奇点, 定义如下的应力函数 $\phi_k(Z, t)$

$$\phi_k(Z, a, b) = \int_a^{a+b} \rho_j(t) \phi_1(Z, t) dt \quad (6.1)$$

这里变量 t 代替了裂纹长度 a , $\rho_j(t)$ 是面积为1的加权函数。本文中取($j=1, 2, 3$; $k=2, 3, 4$)。显然 $\phi_k(Z, a, b)$ 仍是重调和函数, 且能够满足上节所示的边界条件。定义的加权函数 $\rho_j(t)$ 不同, 应力函数 $\phi_k(Z, a, b)$ 就不同, 裂纹尖端附近的应力分布也就不同。这样就在区间 $[a, a+b]$ 构成了一既有张开位移又存在有限应力的过渡区间, 相当于虚裂纹模型中的虚裂纹区。作者把这一方法称为加权积分法, 更详细的表述参见文献[16, 17]。

下面导出几种简单的加权函数 $\rho_j(t)$ 情况下裂纹的应力函数 $\phi_{k1}(x, y)$ 。计算应力时, 用 $\phi_{k1}''(Z, d, a, b)$ 代替式(4.7)中的 $\phi_{k1}''(Z, t)$ 即可。

1) 长方形函数 $\rho_1(t)$

$$\rho_1(t) = 1/b \quad [a, a+b] \quad (6.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{21}(Z, d, a, b) &= \{f_{21}(Z, d, a+b) - f_{21}(Z, d, a)\}/b \\ \phi_{21}''(Z, d, a, b) &= \{f_{22}(Z, d, a+b) - f_{22}(Z, d, a)\}/b \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

式中

$$\begin{aligned} f_{21}(Z, d, t) &= \frac{t}{18} \{t^2 d^2 + 6Z\sqrt{Z^2 - t^2 d^2}\} - \frac{t^3 d^3}{6} \ln \{Z + \sqrt{Z^2 - t^2 d^2}\} \\ &\quad - \frac{iZ^3}{6d} \ln \{td + \sqrt{t^2 d^2 - Z^2}\} \end{aligned}$$

$$f_{22}(Z, d, t) = i \frac{Z}{d} \ln \{td + \sqrt{t^2 d^2 - Z^2}\}$$

2) 1次式(1) $\rho_2(t)$

$$\rho_2(t) = 2(a+b-t)/b^2 \quad [a, a+b] \quad (6.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{31}(Z, d, a, b) &= -\frac{2}{b^2} \{f_{31}(Z, d, a+b) - f_{31}(Z, d, a)\} \\ &\quad + \frac{2}{b^2} (a+b) \{f_{21}(Z, d, a+b) - f_{21}(Z, d, a)\} \\ \phi_{31}''(Z, d, a, b) &= -\frac{2}{b^2} \{f_{32}(Z, d, a+b) - f_{32}(Z, d, a)\} \\ &\quad + \frac{2}{b^2} (a+b) \{f_{22}(Z, d, a+b) - f_{22}(Z, d, a)\} \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

式中

$$\begin{aligned} f_{31}(Z, d, t) &= -\frac{1}{32d^2} [t^4 d^4 + 4t^4 d^4 \ln \{Z + \sqrt{Z^2 - t^2 d^2}\} \\ &\quad + 4Z(Z^2 - t^2 d^2)^{\frac{1}{2}} (2Z^2 - t^2 d^2)] \end{aligned}$$

$$f_{32}(Z, d, t) = \frac{Z^2}{d^2} \sqrt{Z^2 - t^2 d^2}$$

3) 1次式(2) $\rho_3(t)$

$$\rho_3(t) = 2(t-a)/b^2 \quad [a, a+b] \quad (6.6)$$

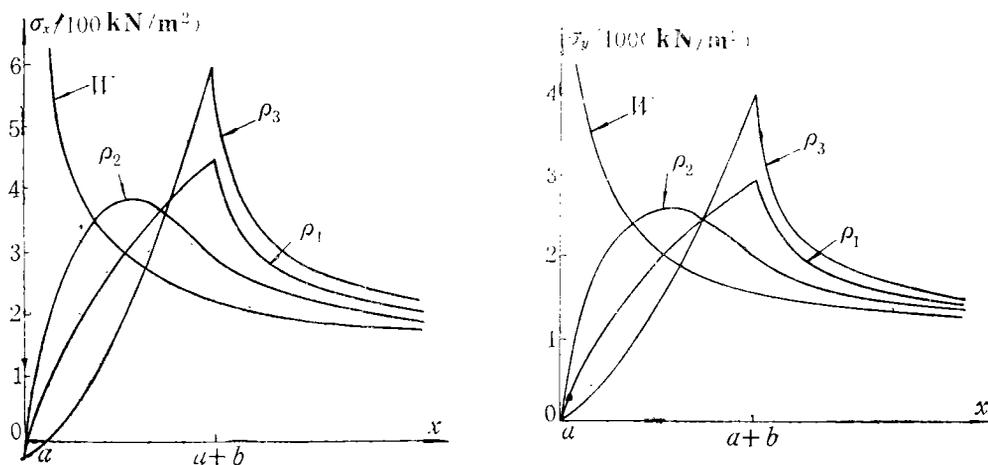
$$\left. \begin{aligned}
 \phi_{41}(Z, d, a, b) &= \frac{2}{b^2} \{f_{31}(Z, d, a+b) - f_{31}(Z, d, a)\} \\
 &\quad - \frac{2}{b^2} a \{f_{21}(Z, d, a+b) - f_{21}(Z, d, a)\} \\
 \phi''_{41}(Z, d, a, b) &= \frac{2}{b^2} \{f_{32}(Z, d, a+b) - f_{32}(Z, d, a)\} \\
 &\quad - \frac{2}{b^2} a \{f_{22}(Z, d, a+b) - f_{22}(Z, d, a)\}
 \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

七、计 算 例

1. 不同加权函数下应力集中形状的差异

设 $B_x=3$, $B_y=1$, $\kappa=0.3$, $\mu_x=0.1$, $b/a=0.3$, $\omega=0^\circ$; $\sigma_{x0}=\sigma_{y0}=100\text{kN/m}^2$, $\tau_0=0$; $\tau_c=0$, $\sigma_c=0$. 求得不同加权函数下 x 轴上的应力 σ_x 和 σ_y 的分布如图 2 所示.

图中曲线 W 代表 Westergaard 型的应力函数解, 其应力在裂纹尖端 ($x=a$) 为无穷大. 其余曲线为加权积分法所给出的计算结果, 加权函数 $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$ 所对应的裂纹尖端的应力梯度为无穷大; 而 $\rho_3(t)$ 所对应的裂纹尖端的应力梯度则为有限值.



(a) σ_x 的分布

(b) σ_y 的分布

图 2 不同加权函数对应的应力集中分布

2. 裂纹倾角 ω 不同时裂纹尖端附近的应力集中形状

以长方形加权函数 $\rho_1(t)$ 为例. 设 $B_x=3$, $B_y=1$, $\kappa=0.3$, $\mu_x=0.1$, $a=1.00\text{m}$, $b=0.30\text{m}$; $\sigma_{x0}=\sigma_{y0}=100\text{kN/m}^2$, $\tau_0=0$; $\sigma_c=\tau_c=0$; $\omega=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. 如图 3 所示取一以 $R=0.01\text{m}$ 为半径并通过点 $\zeta=a+b$ 的圆周, θ 从点 $\zeta=a+b-2R$ 算起以顺时针转一周. 图 4 给出了沿着圆周上的应力 σ_θ 的分布. 从图上可以看出, 不管裂纹方向如何, 裂纹延长线上 ($\theta=0, \pi, 2\pi$) 的应力 σ_θ 都相同, 当然这只有在 $\sigma_{x0}=\sigma_{y0}$, $\tau_0=0$ 时才成立.

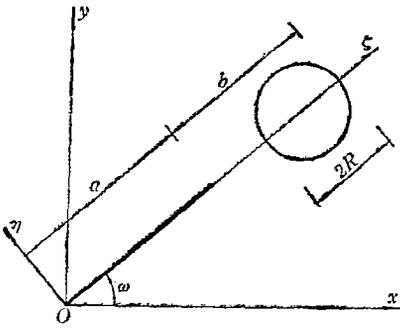
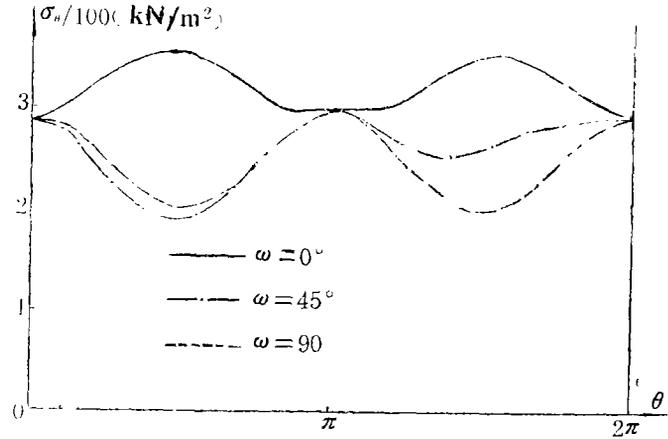


图3 位于裂纹尖端附近的圆周

图4 圆周上的应力 σ_θ 的分布(加权函数为 $\rho_1(t)$)

八、结 语

1) 本文导出了构成裂纹尖端附近有限应力集中的应力函数。作为线弹性模型,比较 Westergaard 的应力函数和 Dugdale 模型,可以较客观地反映混凝土等非金属材料的破坏特性。

2) 所讨论的对象可以近似地表示双向配筋率不同的钢筋混凝土板中含有较大裂纹时,裂纹部分的应力 σ_n , τ_n 不为零但低于其余部分的情形,也就是说可以近似地表示裂纹开展部分钢筋的强度。

3) 若取 $B_x=B_y=E$, $\kappa=1$, 则问题归结为各向同性板的平面问题, 本文所得结果仍然成立。

4) 区间 $(a, a+b)$ 上既有开口变位又存在有限应力。作者把这一区间称为过渡区间(相当于虚裂纹区)。之所以能形成这样的区间,从数学上来说,是由于本应力函数是由对数分支和有理函数的积所构成;而 Westergaard 的应力函数采用的是代数分支。

5) 加权函数不同,过渡区间的应力分布就不同;另外过渡区间的长度 b 也为一假定值。虚裂纹区真实的应力分布依赖于材料本身的性质,在此不予讨论。

参 考 文 献

- [1] Kaplan, M. F., Crack propagation and the fracture of concrete, *Journal of ACI*, **58**, 5 (1961), 591—610.
- [2] Hillerborg, A., et al., Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cement and Concrete Research*, **6** (1976), 773—782.
- [3] Bear, T. J. and B. Barr, Fracture toughness tests of concrete, *Inter. J. of Fracture*, **13** (1977), 92—96.
- [4] Brown, J. H. and C. D. Pomeroy, Fracture toughness of cement paste and mortars, *Cement and Concrete Research*, **3** (1973), 475—480.
- [5] Bazant, Z. P. and C. Cedolin, Blunt crack band propagation in finite element analysis, *J. of the Eng. Mech. Div.*, ASCE, **105**, EM2 (1979), 297—315.
- [6] Carpinteri, A., Application of fracture mechanics to concrete structures, *J. of*

- the Structural Divi.*, ASCE, 108, ST4 (1982), 833—848.
- [7] Cho, K. Z., et al., Fracture process zone of concrete cracks, *J. of Eng. Mech.*, ASCE, 110, 8 (1984), 1174—1184.
- [8] Wium, D. J. W., et al., Hybrid model for discrete cracks in concrete, *J. of Eng. Mech.*, ASCE, 110, 8 (1984), 1211—1229.
- [9] Visalvanich, K. and A. E. Naaman, Fracture model for fiber reinforced concrete, *ACI Journal*, Title No. 80—14 (1983), 128—138.
- [10] 于晓中等, 岩石、混凝土断裂力学在国内的进展, *水利学报*, 9 (1984), 1—10.
- [11] Hillerborg, A., Analysis of fracture by means of the fictitious crack model, particularly for fiber reinforced concrete, *Inter. J. of Cement Composites*, 2, 4 (1980), 177—184.
- [12] Barenblatt, G. I., The formation of equilibrium cracks during brittle fracture, general ideas and hypotheses, axially-symmetric cracks, *PMM*, 23, 3 (1959), 434—444.
- [13] Dugdale, D. S., Yielding of steel sheets containing slits, *J. of Mech. and Physics of Solids*, 8 (1960), 100—104.
- [14] Reinhardt, H. W., Crack softening zone in plain concrete under static loading, *Cement and Concrete Research*, 15 (1985), 42—52.
- [15] Reinhardt, H. W., Plain concrete modeled as an elastic strain-softening material at fracture, *Eng. Fracture Mech.*, 22, 5 (1985), 787—796.
- [16] 段树金、兒嶋弘行、中川建治, き裂先端で有限な応力集中を与える応力関数, *土木学会論文集*, 374 (1986), 399—407.
- [17] 段树金、中川建治, 引張りを受ける丹盤状亀裂の周辺で有限な応力集中を与える弾性解, 《土质工学論文集》。(待发表).
- [18] 徐芝纶, 《弹性力学》下册, 第十七章, 人民教育出版社 (1979).
- [19] Westergaard, H. M., Bearing pressures and cracks, *J. of Applied Mechanics Transactions of the ASME* (1939), A-49—A-53.
- [20] Wang, S. S., et al., A mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity, *Inter. J. of Fracture*, 16, 3 (1980), 247—259.

Stress Functions for Central Straight Cracked Anisotropic Plates

Duan Shu-jin

(North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Handan, Hebei)

Nakagawa Kenji

(Faculty of Engineering, Gifu University, Gifu, Japan)

Abstract

In this paper, the plane problem for an anisotropic plate with a central straight crack in any direction is solved. The stress functions are given to represent the finite stress concentrations near the crack tips by the weight integral method. It shows that there is no stress singularity at the crack tip. The model can be used to appropriate to fracture mechanics for non-metallic materials.