

# 包含一受扭迴转轴的半空间的性质\*

云天铨

(华南工学院, 1987年2月28日收到)

## 摘 要

本文研究包含有一根部份嵌入的迴转轴的半空间的性质, 不用知道一给定的嵌入的轴的扭转问题的精确解, 这些性质能指出此半空间的位移或应力场的某些特点并且有时可以用来检查数值解. 文中给出嵌入半空间的受扭的刚性圆柱的轴的表面上的正确的应力分布的检查的例子.

## 一、概 述

关于由一嵌入的扭转轴引起的受扭半空间的个别问题或类似问题已有许多作者作过很好的研究. Freeman和Keer<sup>[1]</sup>解了一弹性杆焊在一个均质的半空间自由表面问题. Luco<sup>[2]</sup>解了嵌入弹性半空间的刚性圆柱的扭转问题. Karasudi, Rajapakse和Hwang<sup>[3]</sup>解了嵌入一层状的弹性半空间的长的圆柱形弹性杆的扭转问题. 作者<sup>[4]</sup>用线载荷积分方程法研究过刚性变直径圆轴嵌入弹性半空间的扭转问题. 但是, 对包含一母线为任意形状的光滑曲线的受扭的嵌入迴转轴的均质的弹性半空间的性质的一般性的研究则是缺乏的. 这种研究是有价值的. 它能指出半空间的位移或应力场的某些特点并且有时可用来检查数值解. 当一个问题的精确解或实验很难作出时, 判断一数值解的正确性如何是很困难的. 例如, 在Luco<sup>[2]</sup>的文章中嵌入半空间的受扭刚性圆轴的侧表面 $r=r_0$ 上应力 $\tau_{r\theta}(r_0, z)$ 的分布图是一条曲线, 它在 $0 \leq z/L < 0.6$ 时 $\tau_{r\theta}(r_0, z)$ 近似地保持常数值, 但当 $0.6 \leq z/L < 1$ 时则急增( $L$ 为嵌入长度); 而在作者的文[4]中,  $\tau_{r\theta}(r_0, z)$ 在 $0 \leq z/L < 1$ 范围内精确地保持同样值. 要判断上述两数值解那一个是正确的如缺乏理论分析就很难. 在本文的第二节中, 不用知道母线为某一给定曲线的嵌入轴的扭转问题的精确解, 便可对某些有意义的一般性质作分析. 这些性质的应用示于第三节中, 在那里, 理论分析的结果表明作者在文[4]中所示的嵌在半空间中的受扭的刚性圆柱表面上的应力分布是正确的, 而Luco<sup>[2]</sup>的结果是不正确的.

## 二、包含一受扭迴转轴的半空间的性质

令 $r, \theta, z$ 为圆柱坐标轴且 $z$ 为对称轴. 因问题与 $\theta$ 无关, 半空间中一点的位置简记为

\* 国家自然科学基金资助项目.

$(r, z)$ 。令  $v, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$  分别表示非零的位移和应力分量。

$$\tau_{r\theta} = G(\partial v / \partial r - v/r), \tau_{\theta z} = G(\partial v / \partial z) \quad (2.1)$$

式中  $G$  为半空间的剪切模量。

半空间中的一点若它的应力是单值的则称之为非奇异点。在下文中，除特别声明外，一点表示半空间中一非奇异点。

**性质1** 在任一点  $(r, z)$  的圆柱状单元中，必存在有唯一的平面，其上的应力为零。令  $n$  表示此单元的零应力面的外法向， $\alpha_0$  表示  $n$  与  $r$  轴的夹角（图1），则有：

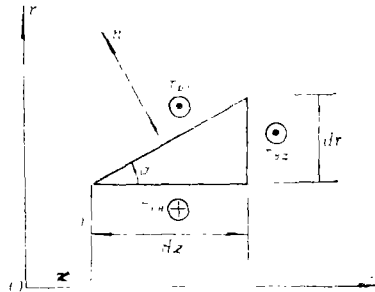


图 1

$$\tau_{\theta n}(r, z, \alpha_0) = 0 \quad (2.2)$$

其中 
$$\tan \alpha_0 = \tau_{r\theta}(r, z) / \tau_{\theta z}(r, z) \quad (2.3)$$

**证明** 图1表示面上作用有正的剪应力的圆柱形单元的三角形楔块。由三角形单元的平衡得：

$$\tau_{\theta n}(r, z, \alpha) = \tau_{r\theta}(r, z) \cos \alpha - \tau_{\theta z}(r, z) \sin \alpha \quad (2.4)$$

令  $\tau_{\theta n}(r, z, \alpha_0) = 0$ ，我们得(2.2)和(2.3)。因  $(r, z)$  是非奇异的，所以(2.3)的  $\alpha_0 \in [0, \pi/2]$  是唯一的。(无应力点例外)  $\nabla \nabla$

根据性质1，若将  $(r, z)$  的零应力面光滑地从一点到另一点延伸，则形成一过  $(r, z)$  的零应力迴转面，其母线在此称为**零应力迹线**。令  $p = p(z)$  是一零应力迹线，则我们有：

$$\tan \alpha_0 = dp/dz = p'(z) = \tau_{r\theta} / \tau_{\theta z} \quad (2.5)$$

**性质2** 在任一点  $(r, z)$  的圆柱状单元中，和零应力面垂直的平面上作用的剪应力达其极大值。

**证明** 令(2.4)的  $\partial \tau_{\theta n}(r, z, \alpha) / \partial \alpha = 0$ ，得：

$$\tan \alpha_1 = -\tau_{\theta z}(r, z) / \tau_{r\theta}(r, z) \quad (2.6)$$

(2.6)代入(2.4)，得：

$$\tau_{\theta n}(r, z, \alpha_1) = [\tau_{r\theta}^2(r, z) + \tau_{\theta z}^2(r, z)]^{1/2} = \max_{\alpha} \tau_{\theta n}(r, z, \alpha) \quad (2.7)$$

因  $\partial^2 \tau_{\theta n}(r, z, \alpha) / \partial \alpha^2 |_{\alpha=\alpha_1} = -\tau_{r\theta}(r, z) \cos \alpha_1 + \tau_{\theta z}(r, z) \sin \alpha_1 < 0$

又由于  $\tan \alpha_0 \cdot \tan \alpha_1 = -1$ ，因此最大剪应力作用面和零应力面垂直。  $\nabla \nabla$

根据性质2，若将  $(r, z)$  的最大剪应力面光滑地从一点到另一点延伸，则形成一光滑的迴转面，其上的点  $(r, z)$  的切平面上作用着最大剪应力，其母线在此称为**最大剪应力迹线**。应当注意的是：在最大剪应力迹线上的点的最大剪应力通常是点点都不同的，但一零应力迹线上任一点沿其切平面上作用的应力却总是等于零。应用零应力迹线的这一性质到此零应力迹线上一点的邻域，我们得：

**性质3** 令  $t$  为零应力迹线上一点  $(r, z)$  的切向, 则有:

$$\partial\tau_{\theta n}(r, z, \alpha_0)/\partial t = 0 \quad (2.8)$$

**证明** 因为过  $(r, z)$  的零应力迹线是从一点沿其零应力平面, 也就是切向  $t$ , 延伸到其邻点而形成的, 所以作用在  $(r, z)$  的邻点的切面上的应力没有变化, 亦即(2.8)成立。或者我们数学地阐明如下。令  $s_2=(r+dr, z+dz)$  和  $s_0=(r, z)$  是一零应力迹线  $T$  上的两点, 则我们有:

$$\tau_{\theta n}(s_2, \alpha_2) = 0, \quad \tau_{\theta n}(s_0, \alpha_0) = 0, \quad \text{对所有 } s_2 \in T$$

于是  $[\tau_{\theta n}(s_2, \alpha_2) - \tau_{\theta n}(s_0, \alpha_0)]/(s_2 - s_0) = 0$  对所有  $s_2 \in T$  包括  $(s_2 - s_0) \rightarrow 0$  均成立。因此:

$$\partial\tau_{\theta n}(r, z, \alpha_0)/\partial t = \lim_{(s_2 - s_0) \rightarrow 0} [\tau_{\theta n}(s_2, \alpha_2) - \tau_{\theta n}(s_0, \alpha_0)]/(s_2 - s_0) = 0 \quad \nabla\nabla$$

**定义** 称  $\phi(s) = v(s)/r$  为点  $s = (r, z)$  的**扭转角**。一光滑母线  $S$ , 若有  $\phi(s) = B = \text{常数}$  对所有  $s \in S$  成立, 则称为**等扭角曲线**。

**性质4** 令  $t_s$  为等扭角曲线  $S$  上一点  $s = (r, z)$  的切向, 则有:

$$\partial\phi(s)/\partial t_s = 0 \quad (2.9)$$

**证明** 因  $\Delta\phi(s) = \phi(s_1) - \phi(s) = 0$  对所有  $s_1, s \in S$  包括  $(s_1 - s) \rightarrow 0$  均成立, 所以

$$\partial\phi(s)/\partial t_s = \lim_{s_1 - s \rightarrow 0} \Delta\phi(s)/(s_1 - s) = 0 \quad \nabla\nabla$$

**性质5** 令  $t$  和  $t_s$  分别代表一零应力迹线  $T$  和一等扭角曲线  $S$  在点  $s = (r, z)$  的切向, 则有  $t \perp t_s$ , 亦即零应力迹线与等扭角曲线正交。

**证明** 令  $\alpha_0$  和  $\beta$  分别代表  $z$  轴和  $t$  以及  $z$  轴和  $t_s$  之间的夹角。由(2.9), 我们有:

$$\partial\phi(s)/\partial t_s = \partial(v/r)/\partial t_s = [\partial(v/r)/\partial r] \sin\beta + [\partial(v/r)/\partial z] \cos\beta = 0$$

$$\text{即得: } \tan\beta = -\tau_{\theta z}(r, z)/\tau_{r\theta}(r, z) = -1/\tan\alpha_0 \quad (2.10)$$

(应用(2.1)和(2.3))。现在, (2.10)表明了  $t \perp t_s$ 。

**性质6** 过一点的等扭角曲线与过同一点的最大剪应力迹线重合。

**证明** 作为性质2和性质5的结果的本性质是显而易见的。

**性质7** 对一点  $(r, z)$  而言, 若  $\partial\tau_{\theta z}/\partial r = 0$  且  $\tau_{\theta z} = 0$ , 则  $\partial\tau_{r\theta}/\partial z = 0$

**性质8** 对一点  $(r, z)$  而言, 若  $\partial\tau_{r\theta}/\partial z = 0$ , 则  $\partial\tau_{\theta z}/\partial r = \tau_{\theta z}/r$ 。

上述两性质由(2.1)立即可得。

上述诸性质适用于(2.1)式成立的情形。

### 三、应用例子

作为这些性质的应用的例子, 让我们考虑一半径为  $r_0$ , 长为  $L$  的刚性受扭圆柱嵌入一弹性半空间中的例子。我们想知道应力沿圆柱的侧表面和端表面的正确的分布。

因圆柱是刚性的且与半空间完全地粘连在一起, 所以圆柱侧表面上任一点  $(r_0, z)$  ( $0 \leq z < L$ ) 的扭角  $\phi = v/r_0$  保持同样值, 也就是  $r = r_0$  ( $0 \leq z < L$ ) 是一等扭角线  $S$ 。  $S$  在点  $(r_0, z)$  的切向与  $S$  重合, 即  $\beta = 0$ 。由性质5知  $\alpha_0 = \pi/2$ 。且由(2.4), 有:

$$\tau_{\theta z}(r_0, z) = 0, \quad \text{对 } 0 \leq z < L \quad (3.1)$$

由(2.8), 我们有:

$$\partial\tau_{\theta z}(r_0, z)/\partial r = \partial\tau_{\theta n}(r_0, z, \alpha_0)/\partial t = 0, \quad \text{对 } 0 \leq z < L \quad (3.2)$$

根据性质7, 我们得:

$$\partial\tau_{r\theta}/\partial z=0, \quad \text{对所有}(r_0, z), 0 \leq z < L \quad (3.3)$$

(3.3)表明了侧表面上  $0 \leq z < L$  内剪应力  $\tau_{r\theta}(r_0, z)$  精确地保持同样的值。这一理论分析的结果与作者在文[4]中的数值结果精确地相一致, 而它也包含着示于 Luco 的文[2]中的图 3 所示的应力分布是不正确的。

至于端表面, 其上的点的扭角  $\phi=v/r$  皆保持同样值。因此  $z=L(0 \leq r < r_0)$  是一等扭角线, 其  $\beta=\pi/2$ , 因而  $\alpha_0=0$ 。由(2.8)及(2.4), 我们有:

$$\partial\tau_{r\theta}/\partial z=\partial\tau_{\theta n}(r, L, \alpha_0)/\partial t=0, \quad \text{对}(r, L), 0 \leq r < r_0 \quad (3.4)$$

根据性质8, 我们有:

$$\partial\tau_{\theta z}/\tau_{\theta z}=\partial r/r, \quad \text{对}(r, L), 0 \leq r < r_0 \quad (3.5)$$

(3.5)的解是:

$$\tau_{\theta z}(r, L)=Kr, \quad K=\text{const}, 0 \leq r < r_0 \quad (3.6)$$

(3.6)表明了端表面上的剪应力  $\tau_{\theta z}(r, L)$  与  $r$  成线性地变化。这一结论也精确地与文[4]的数值结果相一致而与 Luco 的结果([2]的图4)相矛盾, 因此[2]的数值结果是不正确的。

### 参 考 文 献

- [1] Freeman, N. J. and L. M. Keer, Torsion of a cylinder welded to an elastic half space, *J. Appl. Mech., ASME*, **34** (1967), 687—692.
- [2] Luco, J. E., Torsion of a rigid cylinder embedded in an elastic half space, *J. Appl. Mech., ASME*, **43** (1976), 419—423.
- [3] Karasudhi, P., R. K. N. D. Rajapakse and B. Y. Hwang, Torsion of a long cylindrical elastic bar partially embedded in a layered elastic half space, *Int. J. Solids Structures*, **20**, 1 (1984), 1—11.
- [4] 云天铨, 嵌在弹性半空间的刚性变直径圆轴的扭转, *应用数学和力学*, **9**, 5 (1988).

## Properties of a Half Space Including a Twisted Shaft of Revolution

Yun Tian-quan

(Department of Mathematics and Mechanics, South China Institute of  
Technology, Guangzhou)

### Abstract

The properties of an elastic half space including a partly embedded twisting shaft of revolution are studied. Without knowing the exact solution of the torsion problem of a given embedded shaft, these properties can indicate some features of the displacement or stress field of the half space and can sometimes be used for checking a numerical solution. An example for checking the correct stress distribution on surfaces of twisted rigid cylindrical shaft embedded in a half space is given.