应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

同心圆管间无粘可压缩旋转流动的稳定性研究*

夏 南 尹协远

(中国科技大学力学系，1987年 1 月 7 日收到)

摘 要

本文主要研究了两个同心圆管之间无粘可压缩旋转流动的稳定性问题．首先推导出了关于径向扰动速度分量的可压缩线化微分方程．利用类似于 Ludwieg 的分析方法，推导了可压缩旋转流的两个稳定性准则．然后用有限差分方法数值求解了本征值问题，给出了时间增长率，并验证了稳定性准则的正确性．最后讨论了压缩性对稳定性的影响．

一、引 言

无粘旋转流动的稳定性问题是一个应用性很强的理论问题．多年来一些作者在这方面作出了很多有价值的研究，给出过一些有用的稳定性判据．本文所研究的流动，其基本流都是定常轴对称的，即只有轴向速度分量 $U=U(r)$ 和周向速度分量 $W=W(r)$．早在1916年 Rayleigh[1]首先提出了一个稳定性准则．他所研究的是轴向速度分量等于常数或零的流动，即只有轴对称的旋转基本流．认为对于轴对称扰动($n=0$)，稳定的一个充分必要条件是其环量的平方，$(rW)^2$，在两个同心圆筒间的任何位置上不随半径的增加而减少．他定义 $\Phi(r)=\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}(rW)^2$，则应有

$$\Phi(r)\geqslant 0 \qquad (\text{对于任意 } r) \tag{1.1}$$

60年代，若干作者进一步研究了有任意轴向速度分布$U(r)$和非轴对称扰动($n\neq 0$)的旋转流稳定性问题．如 Howard 和 Gupta[2] 采用对线化扰动方程进行积分的方法研究了这一问题，给出了一个对稳定性的充分条件，即若在流场中任何位置上满足下式

$$\alpha^2\Phi-\frac{2\alpha n}{r^2}WU'-\frac{1}{4}\left[\alpha U'+n\left(\frac{W}{r}\right)'\right]^2\geqslant 0 \tag{1.2}$$

则流动一定稳定．注意这不是一个必要条件，即不满足这一准则的流动也可能是稳定的．式中角标‘ ′ ’代表对 r 的微商 d/dr，下同．此式又可写成

* 蔡树棠推荐．

$$\frac{2\alpha W}{r^2}[\alpha(rW)'-nU']-\frac{\gamma'^2}{4}\geqslant 0 \tag{1.3}$$

这里α是轴向波数，n是周向波数，γ是多普勒频率，β是时间频率因子

$$\gamma=\alpha U-\beta+\frac{nW}{r} \tag{1.4}$$

Ludwieg[3][4][5]曾对同心圆筒间流动的稳定性进行过详细的理论和实验研究。先后给出过二个稳定性准则。他在窄缝情况下（$\Delta r=r_1-r_2\ll 1$）对线化扰动方程进行简化。从这一简化方程出发，首先导出对$\gamma'=0$情形下，若满足

$$(1-\bar{C}_\theta)(1-\bar{C}_x^2-\bar{C}_\theta^2)\geqslant 0 \tag{1.5}$$

则流动一定稳定，否则不稳定。$\gamma'=0$的条件实际上相当于沿着基本流方向应用 Rayleigh 准则，也即扰动波传播方向垂直于基本流。式中$\bar{C}_x$和$\bar{C}_\theta$为无量纲速度梯度，即$\bar{C}_x=C_x\cdot r_0/W_0$ $\bar{C}_\theta=C_\theta\cdot r_0/W_0$，$C_x=dU/dr$，$C_\theta=dW/dr$。接着他又导出对$\gamma=\gamma(r)$时的任意情况下的稳定性准则，即对稳定的一个充分必要条件

$$(1-\bar{C}_\theta)(1-\bar{C}_\theta^2)-\left(\frac{5}{3}-\bar{C}_\theta\right)\bar{C}_x^2\geqslant 0 \tag{1.6}$$

Schlichting 在其名著《边界层理论》[6]一书中把上式作为无粘流稳定性的一个重要准则。Leibovich 和 Stewartson[7](1983)给出的流动不稳定的一个充分条件实质上是（1.5）式的不等号改变方向。

以上都是对于不可压缩流的。70年代以后一些作者开始着手可压缩流的研究。Howard[8](1973)首先扩展了它原先的工作，对轴对称扰动导出了一个稳定的充分条件，对$n=0$时，对所有的半径位置若满足下式，流动一定稳定。

$$\frac{1}{4}U'^2-\Phi-N^2\leqslant 0 \tag{1.7}$$

$$N^2=\frac{W^2}{r}\left(\frac{\rho'}{\rho}-\frac{W^2}{ra^2}\right) \tag{1.8}$$

这里N称为 Brunt-Väisäla 数。它是表明压缩性影响的量，ρ是当地密度，a当地音速。对于非轴对称扰动，这样的工作就困难得多，Lalas[9]（1975）利用了一定技巧，对方程的积分形式进行了复杂的运算，最终得到了在这一情况下稳定的充分条件，即

$$N^2+\Phi-\frac{\left[\alpha U'+\frac{n}{r}\left(W'+\frac{3W}{r}\right)\right]^2}{4\left(\frac{n^2}{r^2}+\alpha^2\right)}\geqslant 0 \tag{1.9}$$

上式又可写成

$$N^2+\Phi-\frac{\left(\frac{\gamma'}{2}+\frac{2nW}{r^2}\right)^2}{\frac{n^2}{r^2}+\alpha^2}\geqslant 0 \tag{1.10}$$

然而 Ludwieg 关于不可压流对稳定性准则(1.5)和(1.6)迄今未有人推广至可压缩流。本文主要目的就是将 Ludwieg 工作推广至可压缩流，推导出相应的二个稳定性准则。并用数值方法检验了所得准则的正确性。最后讨论了压缩性对稳定性的影响。

二、基 本 方 程

无粘可压缩流的基本方程是

$$\frac{D\vec{V}^*}{Dt}+\frac{1}{\rho^*}\nabla p^*=0 \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial\rho^*}{\partial t}+\vec{V}^*\cdot\nabla\rho^*+\rho^*\nabla\cdot\vec{V}^*=0 \tag{2.1b}$$

$$Ds^*/Dt=0 \tag{2.1c}$$

$$p^*=p^*(\rho^*,s^*) \tag{2.1d}$$

其中 s 是熵，p 是压力，角标 * 表示基本流加上扰动量的总量．利用热力学关系和连续性方程，有

$$Dp^*/Dt=-a^{*2}\rho^*\nabla\cdot\vec{V}^* \tag{2.1e}$$

取(u^*, v^*, w^*)分别为轴向 x，径向 r 和周向 θ 的速度分量． 每一物理量分解为基本流和小扰动量的迭加．基本流是定常轴对称的，扰动量是非定常非轴对称的．即

$$u^*=U(r)+F(r)\exp[i(\alpha x+n\theta-\beta t)] \tag{2.2a}$$

$$v^*=iG(r)\exp[i(\alpha x+n\theta-\beta t)] \tag{2.2b}$$

$$w^*=W(r)+H(r)\exp[i(\alpha x+n\theta-\beta t)] \tag{2.2c}$$

$$p^*=P_b(r)+P(r)\exp[i(\alpha x+n\theta-\beta t)] \tag{2.2d}$$

$$\rho^*=\rho(r)+Q(r)\exp[i(\alpha x+n\theta-\beta t)] \tag{2.2e}$$

将(2.2)式代入(2.1)式，减去定常基本流满足的方程组，得到线化小扰动方程组

$$\gamma Q+\rho' G+\rho m=0 \tag{2.3a}$$

$$\gamma F+U'G+\rho^{-1}\alpha P=0 \tag{2.3b}$$

$$\gamma G+\frac{2W}{r}H+\frac{W^2}{r\rho}Q-\frac{1}{\rho}P'=0 \tag{2.3c}$$

$$\gamma H+\left(W'+\frac{W}{r}\right)G+\frac{n}{r\rho}P=0 \tag{2.3d}$$

$$\gamma P+\frac{\rho W^2}{r}G+a^2\rho m=0 \tag{2.3e}$$

其中
$$m=\alpha F+G'+\frac{G}{r}+\frac{n}{r}H \tag{2.4}$$

对于不可压流动，显然$m=0$。将方程组(2.3)消去F，H，P，Q，可以得到一个关于扰动模G的二阶常微分方程

$$\begin{aligned}&\gamma^2(\rho sG^*)'-\left\{\gamma r\left[\rho s\left(\frac{\gamma'}{r}+\frac{2nW}{r^3}\right)\right]'+\frac{2nW\rho s}{r^2}\left(\alpha U'+\frac{n}{r}W^*\right)\right.\\&\quad-\gamma^2\left(\frac{M^2s\rho}{r}\right)'+\left(\frac{\gamma}{r}\right)^2M^2s\rho+\left(\frac{\gamma}{r}\right)^2M^4s\rho\\&\quad\left.-\frac{2\gamma}{r}M^2s\rho\left(\gamma'+\frac{2nW}{r^2}\right)+(\gamma^2-\Phi-N^2)\rho\right\}G=0\end{aligned} \tag{2.5}$$

边界条件为

$$G(r_1)=G(r_2)=0 \qquad (r_1\leqslant r\leqslant r_2) \tag{2.6}$$

式中

$$G^*=G'+G/r,\ W^*=W'+W/r,\ M=W/a,\ s=\frac{r^2}{n^2+\alpha^2r^2-r^2\gamma^2/a^2} \tag{2.7}$$

(2.5)式就是研究可压缩旋转流稳定性的控制微分方程。(2.5)式又可写成

$$\gamma^2(\rho sG^*)'-\Big\{\gamma^2\rho+\gamma r\Big[\rho s\Big(\frac{\gamma'}{r}+\frac{2nW}{r^3}\Big)\Big]'-\gamma^2\Big(\frac{M^2}{r}s\rho\Big)'+\Big(\frac{\gamma}{r}M\Big)^2s\rho$$
$$+\Big(\frac{\gamma}{r}M\Big)^2M^2s\rho+\frac{2WW^*\rho\gamma^2s}{ra^2}-\frac{2\gamma}{r}M^2s\rho\Big(\gamma'+\frac{2nW}{r^2}\Big)$$
$$-\rho N^2-\frac{2\alpha Ws\rho}{r^2}(\alpha rW^*-nU')\Big\}G=0 \tag{2.8}$$

对于不可压缩流，$a=\infty$，$M=0$，$\rho=\text{const.}$，$s=r^2(n^2+\alpha^2r^2)^{-1}$，$N^2=0$，上式蜕化为Howard和Gupta[2]不可压流的式(18)

$$\gamma^2(sG^*)'-\Big\{\gamma^2+\gamma r\Big[s\Big(\frac{\gamma'}{r}+\frac{2nW}{r^3}\Big)\Big]'-\frac{2\alpha Ws}{r^2}(\alpha rW^*-nU')\Big\}G=0 \tag{2.9}$$

三、稳定性准则

类似于Ludwieg在不可压流中采用的方法，在窄缝假设下($\Delta r/r\ll1$)，取基本流速度分布为线性分布

$$U=U_0+C_z(r-r_0) \tag{3.1a}$$

$$W=W_0+C_\theta(r-r_0) \tag{3.1b}$$

在(2.4)式中，与其它量相比G/r项可忽略，在(2.3)式中近似地取

$$W\cong W_0,\ \rho\cong\rho_0,\ r\cong r_0,\ U'=dU/dr=C_z,\ W'=dW/dr=C_\theta \tag{3.2}$$

这里下标“0”表示参考点的值，一般取中点或外半径。简化后的(2.3)式为

$$\gamma Q+\rho_0'G+\rho_0m=0 \tag{3.3a}$$

$$\gamma F+C_zG+\frac{\alpha}{\rho_0}P=0 \tag{3.3b}$$

$$\gamma G+\frac{2W_0}{\rho_0}H+\frac{W_0^2}{\rho_0r_0}Q-\frac{1}{\rho_0}P'=0 \tag{3.3c}$$

$$\gamma H+\Big(C_\theta+\frac{W_0}{r_0}\Big)G+\frac{n}{r_0\rho_0}P=0 \tag{3.3d}$$

$$\gamma P+\frac{\rho_0W_0^2}{r_0}G+a_0^2\rho_0m=0 \tag{3.3e}$$

$$m=\alpha F+G'+\frac{n}{r_0}H \tag{3.3f}$$

由上式方程组中消去F，H，Q，P和m，并经量级比较忽略小量，我们可得到对于G的二阶常微分方程

$$G''-\alpha^2\left\{1+\left(\frac{n}{\alpha r_0}\right)^2+\frac{A}{\alpha^2}-\frac{2W_0^2/r_0^2}{\gamma^2}\left[\bar{C}_\theta+1\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{n}{\alpha r_0}\right)\bar{C}_z+0.5\bar{N}_0^2\left(1+\frac{n^2}{\alpha^2 r_0^2}\right)\right]\right\}G=0 \tag{3.4}$$

边界条件

$$G(r_1)=G(r_2)=0 \qquad (r_1\leqslant r\leqslant r_2) \tag{3.5}$$

式中无量纲量 $\bar{C}_z=\frac{r_0}{W_0}C_z$, $\bar{C}_\theta=\frac{r_0}{W_0}C_\theta$, $\bar{N}_0^2=\frac{r_0^2}{W_0^2}N^2$, 及

$$A=\frac{2}{a_0^2}\left[\frac{W_0^4}{r_0^2 a_0^2}+N_0^2+\frac{2W_0^2}{r_0^2}(1+\bar{C}_\theta)\right]$$

(3.4)式与Ludwieg[4]相应的公式比较，只多出了含A和$\bar{N}_0^2$的两项， 它们反映了压缩性的影响。实际上由分析可知，由于两筒间缝隙很窄，这一扰动波的相速度为

$$C_r=\beta_r/\alpha=U+\frac{nW}{\alpha r} \tag{3.6}$$

这也就是说 $\beta_r\cong 0$，而 $\beta_0\ll 1$，所以$|\gamma|\ll 1$。所以由 (2.8) 式经量级比较也是可以得到此式。我们可以近似认为

$$\gamma=\alpha U-\beta+\frac{nW}{r}\cong\left(\alpha U_0-\beta_r+\frac{nW_0}{r_0}\right)$$

$$+\left(\alpha C_z+\frac{n}{r_0}C_\theta-\frac{nW_0}{r_0^2}\right)(r-r_0)-i\beta_i \tag{3.7}$$

若令

$$\alpha U_0-\beta_r+\frac{nW_0}{r_0}=0 \tag{3.8a}$$

$$\alpha C_z+\frac{n}{r_0}C_\theta-\frac{nW_0}{r_0^2}=0 \tag{3.8b}$$

这后一式子也即$\gamma'=0$。这一定常的γ表示一个特殊的扰动波条件，即扰动波的方向垂直于基本流方向。(3.8)式又可写成

$$\frac{n}{\alpha r_0}=\frac{\bar{C}_z}{1-\bar{C}_\theta} \tag{3.9}$$

我们知道对于定常的γ，方程(3.4)有正弦函数形式的解，要想稳定， γ^2应为实数， 且方括号内的量必须为正，否则不稳定。因此有

$$\bar{C}_\theta+1-\left(\frac{n}{\alpha r_0}\right)\bar{C}_z+0.5\bar{N}_0^2\left(1+\frac{n^2}{\alpha r_0^2}\right)\geqslant 0 \tag{3.10}$$

将(3.9)式代入(3.10)式，我们即可得到在$\gamma'=0$时的一个特定扰动方向的稳定性准则

$$(\bar{C}_\theta-1)(\bar{C}_z^2+\bar{C}_\theta^2-1)+0.5\bar{N}_0^2[\bar{C}_z^2+(\bar{C}_\theta-1)^2]\geqslant 0 \qquad \blacktriangleright(3.11)$$

上式左侧第二项表示了压缩性影响。图 1 表示这个稳定性准则随 N^2 的变化。 可以看出，随N^2增加，稳定性增加。上式中令 $N_0^2=0$，即为不可压缩流的 Ludwieg 第一稳定性准则式(1.5)。

对于完全气体

$$P_b=\rho RT \tag{3.12}$$

及

$$a^2=\gamma_1 RT \tag{3.13}$$

式中 R 为气体常数，γ_1为比热比，定常基本流满足

$$P_b'=\frac{\rho W^2}{r} \tag{3.14}$$

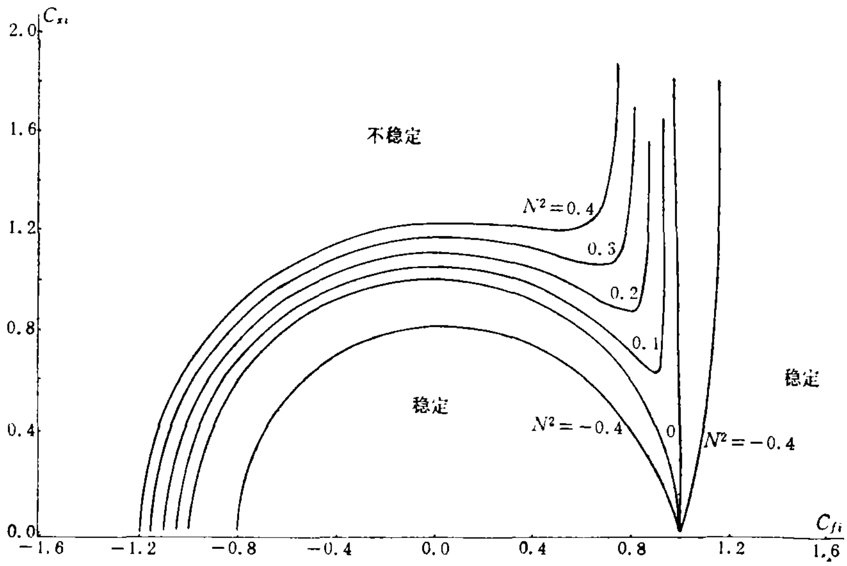

图 1

所以可以得到

$$\frac{\rho'}{\rho}=\frac{\gamma_1 M^2}{r}-\frac{T'}{T} \tag{3.15}$$

代(3.15)式入(1.8)式，得到N^2的另一表达式

$$N^2=\frac{W^2}{r}\left[(\bar{\gamma}_1-1)\frac{M^2}{r}-\frac{T'}{T}\right] \tag{3.16}$$

从中可以看出，若温度梯度为零$T'=0$，旋转马赫数越大，外层密度越大，N^2增加，稳定性亦增加。

我们再分析一下 Lalas 对稳定性的充分条件(1.9)式，它之所以仅是充分条件，是因为对于足够小的$\alpha r/n$虽然不等式有可能不成立，但不意味着一定不稳定。若我们对于固定的$\alpha r/n$，即利用 $\gamma'=0$ 的条件(3.9)代入上式，(1.9)式就化为(3.11)式，也就变成在这种条件下的稳定性边界。

以上仅是对一个特定扰动方向($\gamma'=0$)得到的稳定性准则。对于一般情形，正如Ludwieg在文[4]中分析的那样，可引入一个变换

$$\xi=\frac{r-r_0}{\Delta r}\qquad(-1\leqslant\xi\leqslant1) \tag{3.17}$$

其中 $r_0=(r_2+r_1)/2,\ \Delta r=(r_2-r_1)/2$

由此，(3.4)式可写成

$$G''(\xi)-\alpha^2(\Delta r)^2\left\{1+\left(\frac{n}{\alpha r_0}\right)^2+\frac{A}{\alpha^2}-\frac{2W_0^2/r_0^2}{\gamma^2}\left[\bar{C}_\theta+1\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{n}{\alpha r_0}\bar{C}_x+0.5\bar{N}_0^2\left(1+\left(\frac{n}{\alpha r_0}\right)^2\right)\right]\right\}G(\xi)=0 \tag{3.18}$$

若记

$$L^2=\left[1+\left(\frac{n}{\alpha r_0}\right)^2+\frac{A}{\alpha^2}\right]\alpha^2(\Delta r)^2 \tag{3.19a}$$

$$\Gamma=\frac{n}{\alpha r_0} \tag{3.19b}$$

$$P_1=(1-\bar{C}_\theta)\Gamma-\bar{C}_x \tag{3.19c}$$

$$M_1=\bar{C}_\theta+1-\Gamma\bar{C}_x+0.5\bar{N}_0^2(1+\Gamma^2) \tag{3.19d}$$

$$N_1=-\Gamma-\frac{U_0}{W_0}+\frac{\beta_r}{\alpha W_0} \tag{3.19e}$$

$$K=\frac{M_1}{P_1^2} \tag{3.19f}$$

$$E=E_r+iE_i=\frac{N_1+i\dfrac{\beta_i}{\alpha W_0}}{P_1(\Delta r)}r_0 \tag{3.19g}$$

于是(3.7)式可写为

$$\gamma=-\alpha W_0N_1-\alpha P_1W_0(\bar{r}-1)-i\beta_i \tag{3.20}$$

将上述方程代入(3.18)式，得到

$$G''(\xi)-\left[L^2-\frac{2K}{(E+\xi)^2}\right]G(\xi)=0 \tag{3.21}$$

边界条件

$$G(-1)=G(0)=0 \tag{3.22}$$

方程(3.21)是(Sturm-Licuville 型方程，L, K 实数，E 为复数。现在的问题是要求出在什么样的K值下，E为实数。这是一个本征值问题。Ludwieg[4]已经导出这一结果的答案。也就是在下列条件下没有$E_i\neq0$的本征值存在

$$K\geqslant-\frac{3}{8} \tag{3.23}$$

将K的表达式(3.19f)代入，得到

$$\frac{\bar{C}_\theta+1-\Gamma\bar{C}_x+0.5\bar{N}_0^2(1+\Gamma^2)}{[(\bar{C}_\theta-1)\Gamma+\bar{C}_x]^2}\geqslant-\frac{3}{8} \tag{3.24}$$

当给定$\bar{C}_x$，$\bar{C}_\theta$和$\bar{N}_0^2$时，能使左边取最小值的Γ为

$$\Gamma=\frac{\bar{C}_x(7-3\bar{C}_\theta)}{3(\bar{C}_\theta-1)^2+4\bar{N}_0^2} \tag{3.25}$$

将(3.25)式代入(3.24)式，经过必要的整理，我们得到可压缩旋转流动稳定性的一个充分必要条件

$$[3(\bar{C}_\theta-1)^2+8\bar{N}_0^2]\left[(\bar{C}_\theta-1)(\bar{C}_\theta^2-1)-\left(\frac{5}{3}-\bar{C}_\theta\right)\bar{C}_x^2\right]+1.5\bar{N}_0^2\left[(\bar{C}_\theta-1)^4\right.$$

$$\left.+\left(\frac{7}{3}-\bar{C}_\theta\right)^2\bar{C}_x^2\right]+4\bar{N}_0^4\left[\bar{C}_\theta^2-\frac{2}{3}\bar{C}_\theta+\frac{7}{3}+0.5\bar{C}_x^2\right]+\frac{8}{3}\bar{N}_0^6\geqslant0$$

▶(3.26)

对于不可压缩$\bar{N}_0^2=0$，(3.26)式简化为 Ludwieg 的稳定性准则(1.6)式。图 2 表示稳定性边界随$\bar{N}_0^2$的变化的情形。同样可以看出当$\bar{N}^2$增加，稳定性增加。

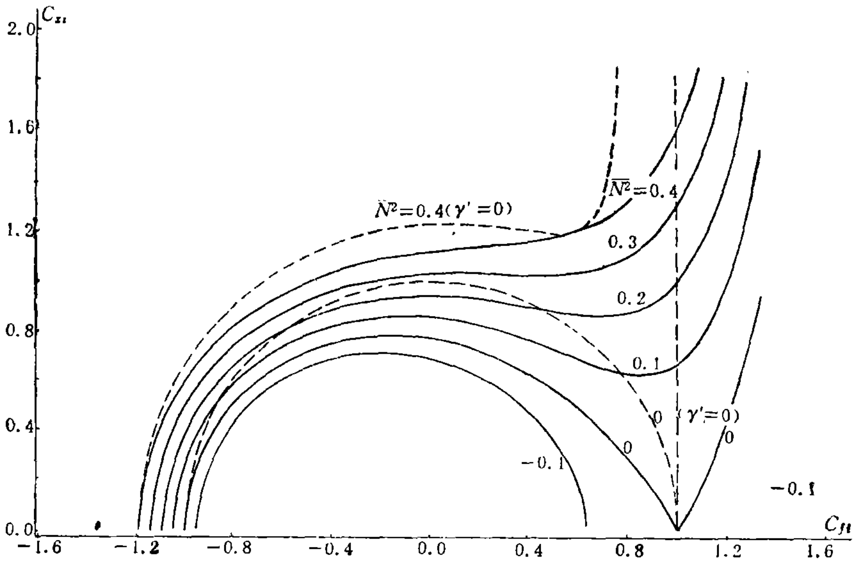

图 2

四、数 值 方 法

我们采用类似于 Duck[10](1980) 的有限差分法对(2.5)式求其数值解，以验证分析方法所得结果的正确性。(2.5)式可写为

$$G''+BG'+CG=0 \tag{4.1}$$

其差分方程为

$$a_{1i}G_{i+1}+a_{2i}G_i+a_{3i}G_{i-1}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,k) \tag{4.2}$$

其中

$$a_{1i}=1+\frac{B_i}{2}\Delta r \tag{4.3a}$$

$$a_{2i}=-2+C_i(\Delta r)^2 \tag{4.3b}$$

$$a_{3i}=1-\frac{B_0}{2}\Delta r \tag{4.3c}$$

边界条件为

$$G_0=G_{k+1}=0 \tag{4.4}$$

对这一齐次代数方程组有非平凡解的条件是系数行列式必须等于零。由此可以得到一个联系α，β和 n 的方程

$$f(\alpha,\beta,n)=0 \tag{4.5}$$

其中α轴向波数，为实数，n 周向波数，为整数，$\beta=\beta_r+i\beta_i$ 复数。给定α，n，求解β。只有当β为实数时，流动才是稳定的，否则流动是不稳定的。对复代数方程(4.5)可采用Nuller 法求根。具体求解时，我们取内半径$r_1=0.995$，外半径$r_2=1.005$，$\Delta r=r_2-r_1=0.01$。$T'=0$，$\gamma_1=1.4$，速度分布按(3.1)式线性分布。旋转流马赫数为$M=0$，0.5，0.7071，0.866 和 1.0，分别相应于$N^2=0$，0.1，0.2，0.3 和 0.4。图 3 表明当$n=2$，$\bar{C}_\theta=0$，$\gamma'=0$时时间增长率随C_z的变化。可以发现曲线与横坐标轴的交点分别为1.0，1.105，1.225(N^2

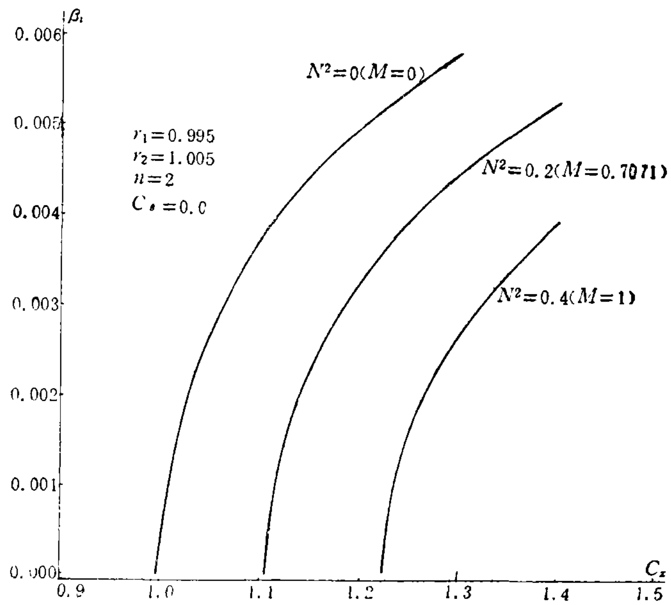

图 3

$=0$, 0.2, 0.4)，这些点为中性稳定边界点。由解析式(3.11)给出的中性稳定点分别为1.0 1.1055，1.2247。可见两者结果是非常符合的。图4表示在$N^2=0.4$，$\bar{C}_\theta=0$，$n=2$时时间增长率β_i随α的变化。图5表明最大时间增长率随C_z的变化。我们可以得到中性稳定点为C_z

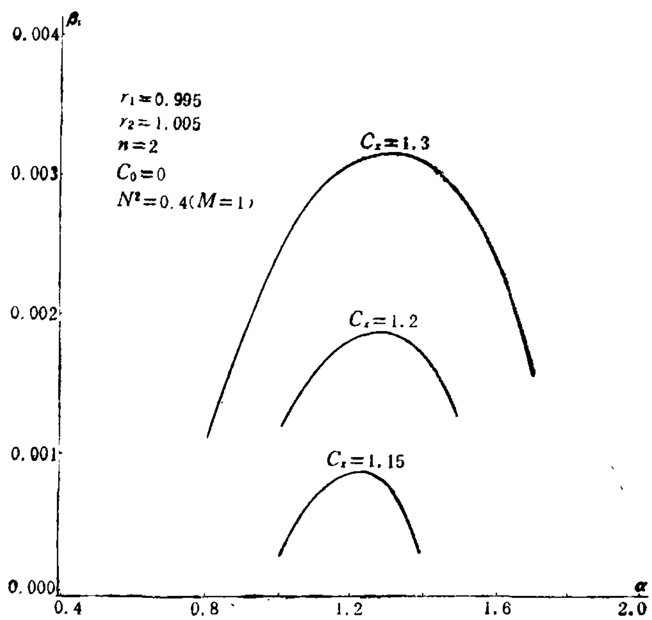

图 4

$=1.12(N^2=0.4)$。从稳定性准则(3.26)式得到的相应的中性稳定点为$C_z=1.12006$。两者相符极好。图6表明N^2对稳定性的影响，N^2越大，流动越稳定，图7表明在不同流动基本流速度时的中性稳定点数值结果与分析解的比较，两者也是符合很好的。

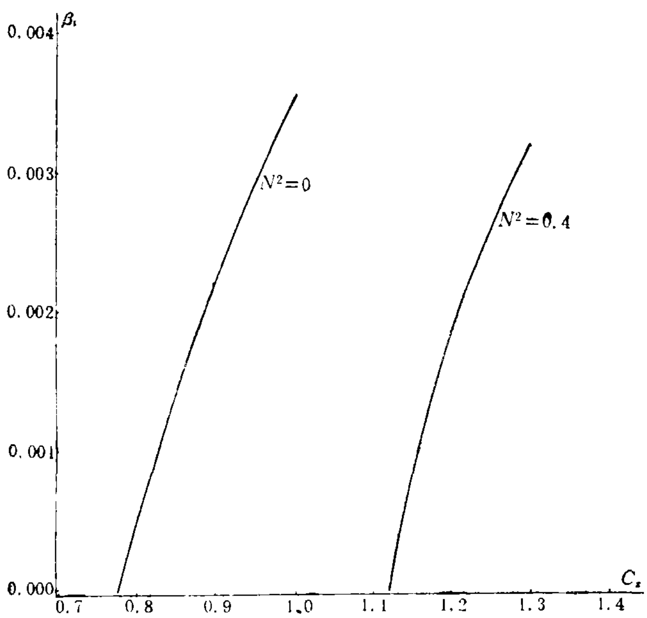

图 5

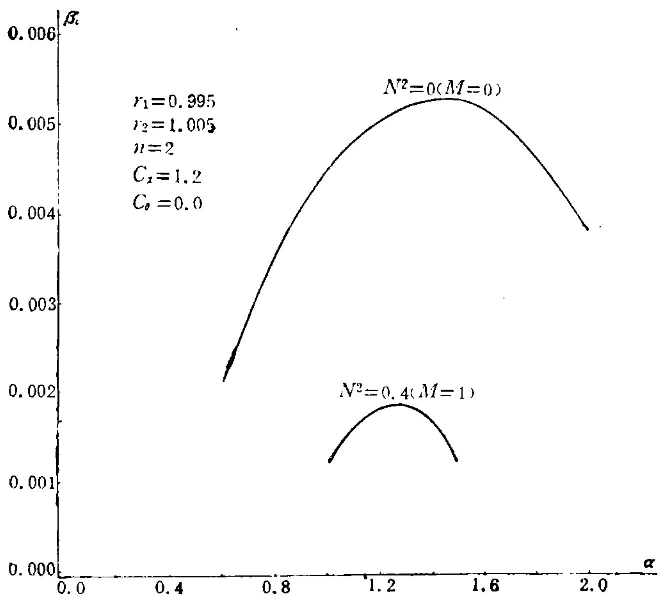

图 6

以上结果全都是对 $n=2$ 的数值结果．从稳定性准则可以看出，稳定性准则与 n 无关．为了验证这一结果，取不同 $n=1,2,3,4,8$ 进行了数值计算，如果以 β_r/n 或 β_i/n 对 α/n 作图，可以发现对不同 n 这些曲线几乎是重合的(见图 8)，所以数值计算同样证实了稳定性准则与 n 无关的结论．

上述分析结果是对窄缝进行的，数值计算也同样取这一条件．对于宽缝的情形Ludwieg 和 Schlichting 都认为可以取当地量的形式，在流场中所有点都满足此准则，流动即稳定，

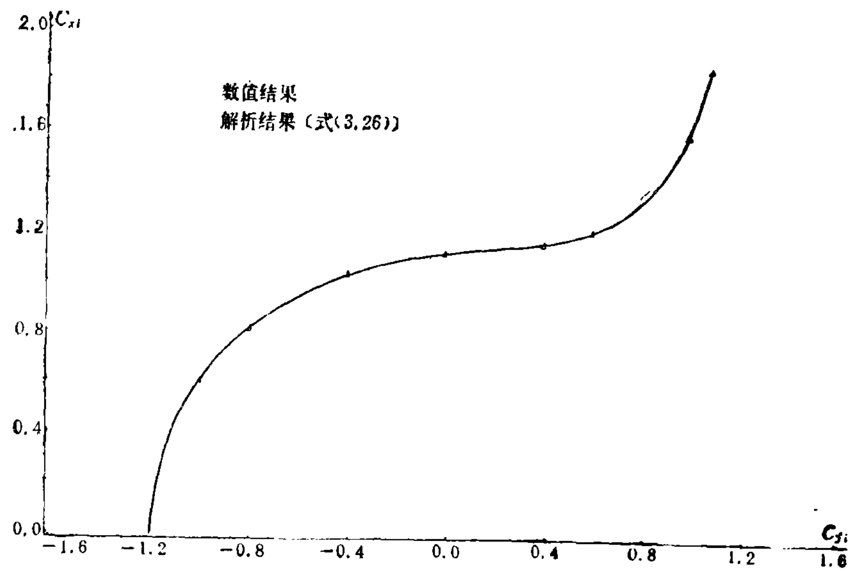

图 7

我们认为这一推广并不严格。宽度的变化将影响稳定性标准。这种影响将另文讨论。尽管如此，上述稳定性准则对缝隙不是极宽的情况，此稳定性判据仍是很有价值的。

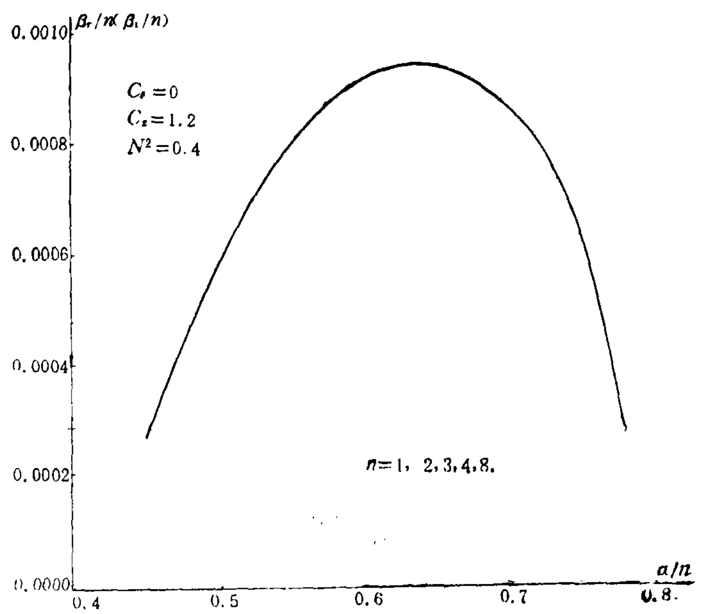

图 8

五、结　　论

本文在线性稳定性理论的框架内，成功地推导出了研究可压缩旋转流稳定性的控制方程(2.5)。并在窄缝假设下，推导出了同心圆管间旋转流稳定性的两个充分必要条件(3.11)和(3.26)。对于不可压缩流，(2.5)式蜕化为Howard和Gupta署名方程(2.9)，(3.11)和

(3.26)分别蜕化为Ludwieg著名稳定性准则(1.5)和(1.6)。数值计算的结果验证了这两个可压缩性准则的正确性。

致谢 作者对美国 Connecticut 大学 J. D. LIN 教授及美联合技术公司(Unite Technology Co.)研究中心 B. V. Johnson 博士的指导和帮助表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] Rayleigh, L., On the dynamics of revolving fluids, *Proc. Roy. Soc. London*, **A93**, S.148—154 (1961).

[2] Howard, L. N. and A. S. Gupta, On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of Swirling flow, *J. Fluid Mech.*, **14** (1962), 463—476.

[3] Ludwieg, H., Stabilitat der Sromung in einem Zylirdrischen Ringraum, *ZFW.*, **8** (1960), 135—140.

[4] Ludwieg, H., Erganzung zu der Arbeit "Stabilitat der Stromung in einem Zylindrischen Ringraum", *ZFW*, **9** (1961), 350—361.

[5] Ludwieg, H., Experimentalle Nachprufung der Stabilitatstheorien fur reibungsfreie Stromungen mit Schraubenlinienformigen Stromlinien, *ZFW*, **12** (1964), 304—309.

[6] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*. *6th ed.*, New York, McGraw-Hill (1968).

[7] Leibovich, S. and Stewartson, K., A sufficient condition for instability of columnar vortices, *J. Fluid Mech.*, **126** (1983), 335—356.

[8] Howard, L. N., On the stability of compressible swirling flow, *Studies in Applied Mathematics*, **52**, 1 (1973), 39—43.

[9] Lalas, D. P., The Richardson criterion for compressible swirling flows, *J. Fluid Mech.*, **69** (1975), 65—72.

[10] Duck, P. W. and M. R. Foster, The inviscid stability of a trailing line vortex, *ZAMP.*, **31** (1980), 524—532.

Investigation of the Stability for Inviscid Compressible Swirling Flow Between Concentric Cylinders

Xia Nan Yin Xie-yuan

(*Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology, Hefei*)

Abstract

The temporal stability on inviscid compressible swirling flow between two concentric cylinders is investigated. First, a linearized differential equation is derived. Two stability criteria are derived for compressible swirling flow by an analytic method analogous to Ludwieg's method. A finite-difference numerical method is then used to solve the eigenvalue problem of this differential equation, to get temporal growth rate and to check these stability criteria derived. Finally, the effect of compressibility for stability is disscused.