

打靶法在常微分方程边界层型奇异 摄动问题中的应用*

凌复华 李继跃

(上海交通大学工程力学系, 1987年3月21日收到)

摘 要

用自适应步长积分格式结合打靶技巧, 可以有效地求解比较困难的常微分方程边界层型奇异摄动问题. 本文给出了若干计算实例, 说明了这种方法应用于线性问题的一次收敛性, 以及应用于单端、双端边界层、转向点和多个边界层时的效果, 特别是能方便地求出多解. 最后并与习用的差分方法作了比较.

一、边界层型奇异摄动问题

许多来自工程实际的常微分方程含有小参数 ε , 这类问题统称为摄动问题. 若在极限情况 $\varepsilon=0$ 时问题的解已知, 就可以用摄动方法处理, 即把问题的解展开为 ε 的渐近级数, 代入原方程后逐步求解级数的诸系数. 若这个渐近级数当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时关于自变量一致收敛, 就称为正则摄动问题, 否则称为奇异摄动问题. 小参数 ε 出现在最高阶导数项时通常为奇异摄动问题, 因为当 $\varepsilon=0$ 时, 原方程降阶, 不可能全部满足原先的边界条件. 从而对这类问题, 在边界点或内点的一个领域内, 解的数值迅速变化, 一般的分析方法不能奏效, 称这一类奇异摄动问题为边界层型问题, 需用专门的分析方法或数值方法处理. 有不少专著论及分析方法^[1~5], 但对数值方法则只限于差分法^[6,7]. 本文将说明, 对于常微分方程边界层型奇异摄动问题, 自适应步长积分格式结合打靶技巧是有效的求解方法. 本文的部分结果曾在文献[11]中扼要报导过.

二、方法简介

关于自适应步长积分格式和打靶技巧, 在文献[8]中已有详细叙述, 这里根据本文算例的需要以较一般方式略述.

本文求解的是边值问题

* 戴世强推荐.

$$\begin{cases} \varepsilon u'' = f(x, u, u') & (a < x < b) \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta \end{cases} \quad (2.1)$$

$$u(a) = \alpha, u(b) = \beta \quad (2.2)$$

用双向打靶法, 选参数

$$s_1 = u'(a), s_2 = u'(b) \quad (2.3)$$

并取 $a < c < b$, 即可按常微分方程初值问题求解格式分别由 $x=a$ 端向右和由 $x=b$ 端向左算出 $x=c$ 处的 u 和 u' 值各两个, 并按解的连续性条件得到确定 s_1 和 s_2 的方程为

$$\begin{cases} F_1 = u_a(c; s_1) - u_b(c; s_2) = 0 \\ F_2 = u'_a(c; s_1) - u'_b(c; s_2) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$F_2 = u'_a(c; s_1) - u'_b(c; s_2) = 0 \quad (2.5)$$

其中下标 a, b 分别表示由 $x=a, b$ 端起算得的值。

(2.4) 和 (2.5) 是非线性代数方程组, 可用例如 Newton—Raphson 法求解, 这时需要计算参数 s_1, s_2 的修正量 $\Delta s_1, \Delta s_2$, 这可由以下方程求取:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_a}{\partial s_1} \Delta s_1 - \frac{\partial u_b}{\partial s_2} \Delta s_2 = F_1 \\ \frac{\partial u'_a}{\partial s_1} \Delta s_1 - \frac{\partial u'_b}{\partial s_2} \Delta s_2 = F_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u'_a}{\partial s_1} \Delta s_1 - \frac{\partial u'_b}{\partial s_2} \Delta s_2 = F_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

由 (2.1)~(2.3) 可知, 方程中诸偏导数值由以下初值问题

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial u'_a}{\partial s_1} = \frac{\partial f}{\partial u'} \frac{\partial u'_a}{\partial s_1} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u_a}{\partial s_1} \\ \frac{\partial u_a}{\partial s_1} \Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial u'_a}{\partial s_1} \Big|_{x=a} = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial u'_b}{\partial s_2} = \frac{\partial f}{\partial u'} \frac{\partial u'_b}{\partial s_2} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u_b}{\partial s_2} \\ \frac{\partial u_b}{\partial s_2} \Big|_{x=b} = 0, \quad \frac{\partial u'_b}{\partial s_2} \Big|_{x=b} = 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

分别计算 $x=c$ 时的解而得到, 注意对 s_1, s_2 的求导 (∂) 与对 x 的求导 (撇号) 显然可以交换次序。

注意若取 $c=b$, 得到简单打靶法; 取 $c=a$, 得到反向打靶法。两种情况下实际上都只需要一个参数 s_1 或 s_2 , 对它们的迭代改进就无需解方程组了。但这时积分区间较大从而数值积分的累积误差也较大, 另外, 初值的收敛域将缩小。有时双向打靶法的收敛域也太小而需采用多级打靶法^[8]。

这种打靶技巧已成功地应用于许多常微分方程边值问题 (参看 [12], 在非线形振动中的应用), 但对具有边界层的奇异摄动问题, 应用这种技巧时需特别注意选择适当的数值积分格式。一种自适应步长的积分格式是绝对必要的, 这样可以在边界层中自动取很小的积分步长而在边界层外自动取较大的积分步长, 以期在保证精度的前提下尽可能节约计算时间。自适应步长积分格式的基本原则是根据对同一点函数值的两次不同计算结果来确定本次步长是否保证了精度 (若未保证要重算), 以及下次步长应该如何调整。早期的方法比较同一格式两种不同步长的计算结果, 近来的趋势是采用较为节省机时的两种不同阶次的格式和相同的步长 (RKF 方法)。本文的算例采用三阶与四阶 RKF 方法, 效果很好, 当然不一定是最优的,

值得指出,对线性边值问题,理论上可以证明,不论初始条件怎样选取,打靶法均在一次迭代中收敛,这对实际应用自然极为方便。

三、算例分析

以下算例均在微型计算机上用单精度计算完成,数值积分的精度为6~7位有效数字,最终结果的精度大约有5位有效数字,在大型计算机上或采用双精度计算,很容易达到更高的精度。所有算例均采用根据第二节所述方法编制的通用程序,只需根据具体方程编写相应的用户子程序和填写需要的数据。

例1 线性边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + (1+x^2)y' - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 y = -(x^2 + e^x) & (0 < x < 1) \\ y(0) = -1, y(1) = 0 \end{cases}$$

文献[6]中曾对这个问题用一致收敛的差分格式作过仔细计算,并对不同的 ε 值给出了计算结果的详细图示。我们用简单打靶法进行了计算,对所取 ε 值,打靶过程确实都一次收敛,计算结果与[6]中结果的符合程度为4~5位有效数字,绘成曲线图后已无法加以区分。图1给出了其中(a) $\varepsilon=0.125$ 和(b) $\varepsilon=0.001953125$ 的计算结果。

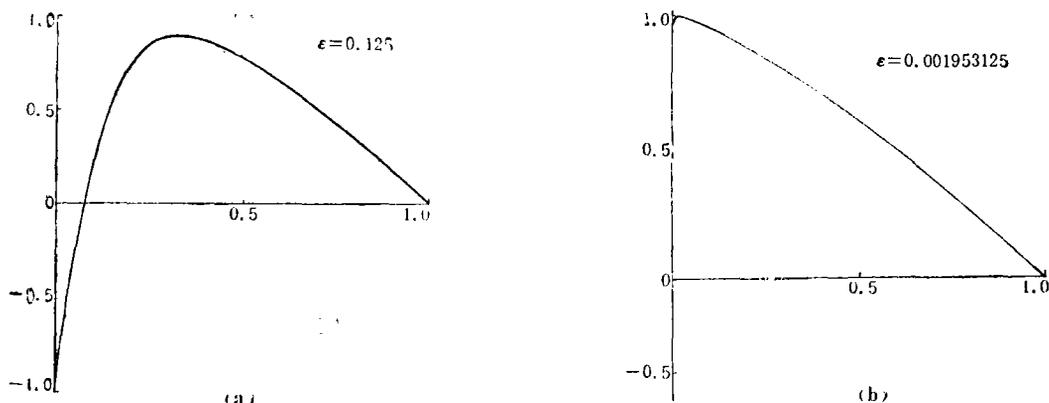


图1 线性边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + (1+x^2)y' - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 y = -(x^2 + e^x) \\ y(0) = -1, y(1) = 0 \end{cases}$$

例2 非线性边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon y y'' + y y' + x = 0 & (0 < x < 1) \\ y(0) = 1, y(1) = 1 \end{cases}$$

仍用简单打靶法进行计算。对 $\varepsilon=0.01$ 和 $\varepsilon=0.001$,都只经过三次迭代就收敛了。图2给出 $\varepsilon=0.001$ 时的计算结果。

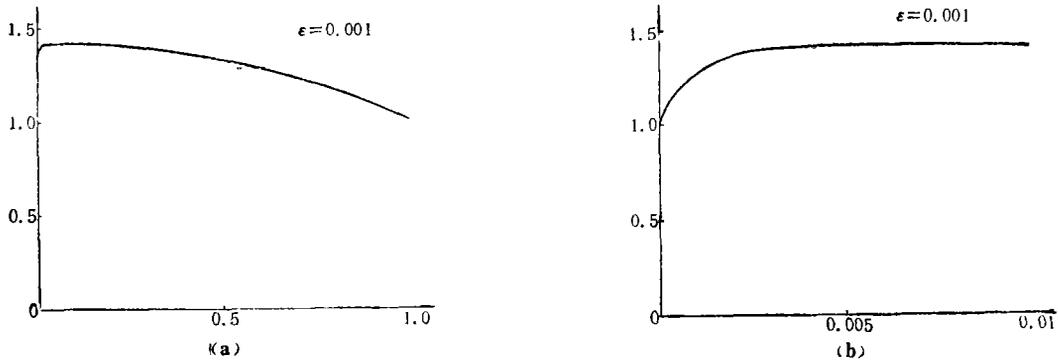


图 2 非线性边值问题

$$\begin{cases} \epsilon y y'' + y y' + x = 0 \\ y(0) = 1, y(1) = 1 \end{cases} \quad \text{(a) } \epsilon = 0.001, \text{ (b) } \epsilon = 0.001 \text{ (细部)}$$

例3 具有转向点的线性边值问题

$$\begin{cases} \epsilon y'' - 2xy' + y = 0 & (-1 < x < 1) \\ y(-1) = -1, y(1) = 2 \end{cases}$$

O'malley ([1]第8章) 曾对以下方程

$$\epsilon y'' + 2axy' - a\beta y = 0 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

用奇异摄动方法进行过详细的讨论, 并对本例画出了大致的图形. 我们用简单打靶法就方便地得到了结果, 打靶过程仍然一次收敛. 对 $\epsilon = 0.05$ 的计算结果见图3.

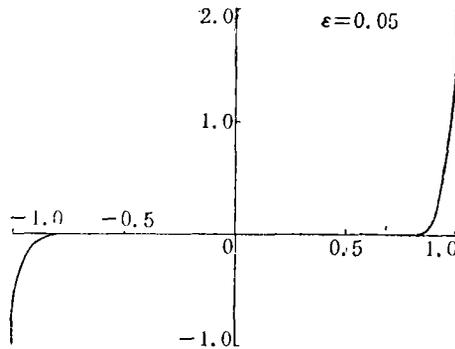


图 3 具有转向点的线性边值问题

$$\begin{cases} \epsilon y'' - 2xy' + y = 0 \\ y(-1) = -1, y(1) = 2 \end{cases} \quad (\epsilon = 0.05)$$

例4 两端均有边界层的线性边值问题

$$\begin{cases} \epsilon y'' - x^2 y' - y = 0 & (0 < x < 1) \\ y(0) = y(1) = 1 \end{cases}$$

Bender和Orszag ([2]第9章) 在讨论边界层厚度时, 曾对本问题作过摄动分析, 指出本问题的边界层厚度具有 $\sqrt{\epsilon}$ 量级, 并且给出了一致渐近近似解. 我们用简单打靶法对 $\epsilon = 0.05$ 进行了计算, 由于边界层效应不明显, 计算顺利. 但当 $\epsilon = 0.005$ 或更小时, 简单打靶法不再收敛, 改用双向打靶法后即可顺利解决本问题. 计算过程中发现, 匹配点的选择对收敛性能

影响很大, 对本例以取匹配点较靠近左端为佳, 直观地选取匹配点在区间中点有时效果不好, 其原因在于两端的边界层的性质有所不同. 图4给出了 $\varepsilon=0.0005$ 时的计算实例.

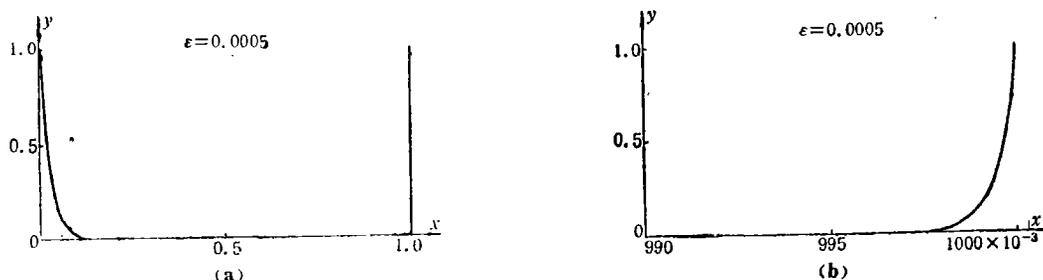


图4 两端均有边界层的线性边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon y'' - x^2 y' - y = 0 \\ y(0) = y(1) = 1 \end{cases} \quad (\text{a}) \quad \varepsilon = 0.0005, \quad (\text{b}) \quad \varepsilon = 0.0005 \text{ (细部)}$$

例5 具有多个边界层的非线性边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + y^2 = 1 + x & (0 < x < 1) \\ y(0) = y(1) = 1 \end{cases}$$

对 $\varepsilon=0.0001$, 用双向打靶法计算得到的结果如图5. 可以看出这个问题在它的定义区间 $[0, 1]$ 上有着相当多的内边界层.

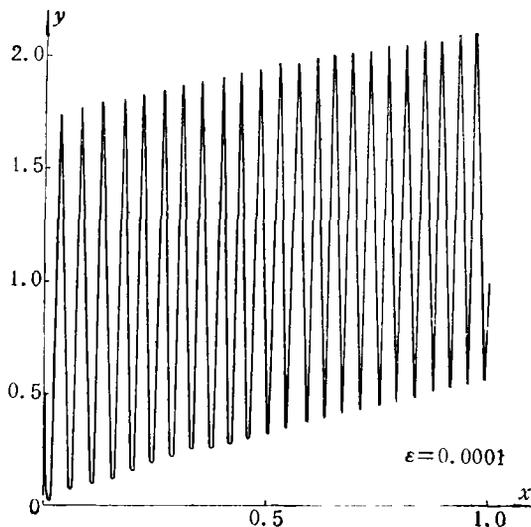


图5 具有多个边界层的非线性边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + y^2 = 1 + x \\ y(0) = y(1) = 1 \end{cases} \quad (\varepsilon = 0.0001)$$

例6 多解并具有多个边界层的非线性边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + 2(1-x^2)y + y^2 = 1 & (-1 < x < 1) \\ y(-1) = y(1) = 0 \end{cases}$$

这是Carrier提出的一个既漂亮又错综复杂的问题, 它有多解, 其摄动分析可见[2]第9章. 我

们对 $\epsilon=0.01$ 采用双向打靶法以不同初始条件进行了计算,结果得到了多个不同的解,图6给出了其中的两个例子。在计算过程中还发现收敛性和收敛速度与参数值的初始猜测有很大关系。

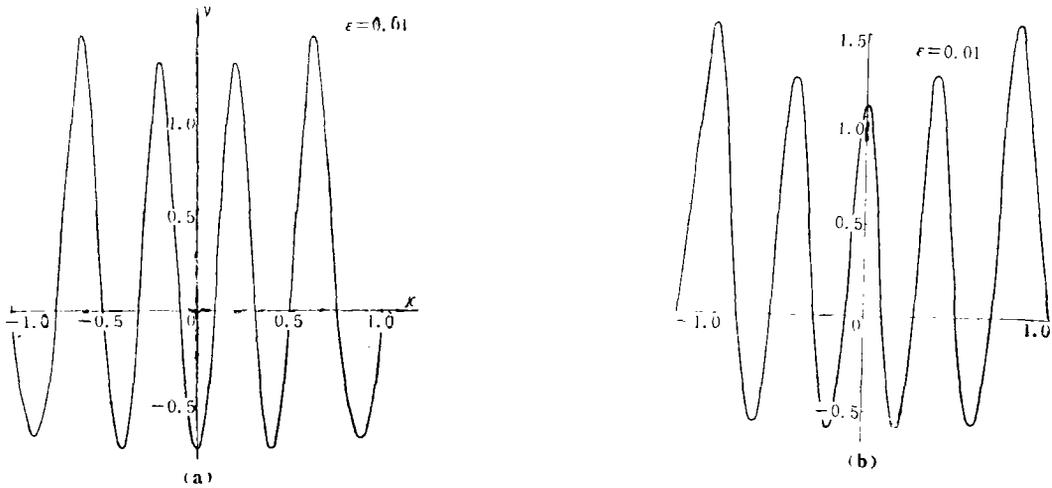


图 6 多解并具有多个边界层的非线性边值问题

$$\begin{cases} \epsilon y'' + 2(1-x^2)y + y^2 = 1 \\ y(-1) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (\epsilon = 0.01)$$

四、与差分法的比较

上节所讨论的几个例子,包括了常微分方程边界层型奇异摄动问题的主要类型。与惯用的差分法比较,本方法具有以下一些明显的优点。

1. 计算程序容易编制,通用性强

我们的上述算例都是用同一个简短的程序计算的,对具体问题只需编制少量的用户子程序。而差分法则需对每个方程编制相应的计算程序,特别对非线性问题,准备工作量很大。对小的 ϵ 值,用差分法时需变动节点的位置,或采用内、外两种不同的差分格式,这就使程序更加复杂。

2. 解的迭代始值容易给出

对二阶方程应用双向打靶法时只需给出两个始值,用简单打靶或反向打靶时更只需要一个,而差分法需给出解的全程的一个初始猜测,显然要麻烦得多。

3. 特别便于求出问题的多个解

例6所示具有多个内部边界层的多解很难用差分方法一一求出。采用打靶法时,只需变动解在两端的斜率就可以求出多个不同的解。

4. 积分步长自动调节

采用差分方法时,步长的选择是一个困难问题,对本方法根本不存在这个问题。

综上所述, 自适应步长积分格式结合打靶技巧, 是求解常微分方程边界层型奇异摄动问题的有效方法, 值得作进一步的研究和应用。

参 考 文 献

- [1] O'Malley, R. E. Jr., *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press, New York (1974).
- [2] Bender, C. M. and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York (1978).
- [3] Cole, J. D., *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Giun, Bleisdel (1968).
- [4] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, Wiley, New York (1973).
- [5] Wasow, W., *Asymptotic Expansion for Ordinary Differential Equations*, Interscience Publishers, New York (1965).
- [6] Doolan, E. P., J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Borle Press, Dublin (1980).
- [7] Pearson, C. E., On non-linear ordinary differential equations of boundary layer type, *J. Math. Phys.*, 47 (1968), 351—358.
- [8] Keller, H., *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*, Blaisdell, London (1968).
- [9] Stoer, J. and R. Bulirsch, *Einführung in die numerische Mathematik II*, Springer-Verlag Berlin (1978).
- [10] Hall, G. and J. M. Watt, *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford (1976).
- [11] Ling, F. H. and J. Y. Li, Two-way shooting method in nonlinear boundary value problems of ordinary differential equations with boundary layers, *Proceedings of Tenth International Conference on Nonlinear Oscillations* (1984), 678—681.
- [12] 凌复华, 非线性振动周期解的数值分析, *应用数学和力学*, 4, 4 (1983), 489—506.

Shooting Method in Singular Perturbation Problem of Ordinary Differential Equations with boundary Layers

Ling Fu-hua Li Ji-yao

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai)

Abstract

By using the adaptive steplength integration scheme with a shooting technique, a rather difficult singular perturbation problem of ordinary differential equations with boundary layers can be calculated effectively. Computing examples are given in this paper, which show the convergence within one iteration of the method in the case of a linear problem, the efficiency of the method for many boundary layers and turning points, especially the convenience in calculating multiple solutions. A comparison with traditional difference method is given at the end of this paper.