

文章编号: 1000-0887(2004) 08-0801-08

# 考虑高阶横向剪切正交各向异性板非线性弯曲的微分求积分析\*

李晶晶, 程昌钧

(上海市应用数学和力学研究所, 上海大学 力学系, 上海 200072)

(本刊编委程昌钧来稿)

**摘要:** 采用微分求积方法(DQ 方法) 讨论了计及高阶横向剪切的正交各向异性弹性板的非线性弯曲问题。导出了非线性控制方程的 DQ 形式, 利用推广的 DQWB 技巧处理了高阶矩的边界条件。进一步推广并运用新的分析技术简化了非线性方程的计算。为说明该方法的可靠性和有效性, 将考虑剪切变形及不计剪切变形的薄板的数值结果与三维弹性解析解及其它数值解进行了比较, 同时研究了数值结果的收敛性, 并考察了不同的节点分布对收敛速度的影响。还考察了几何、材料参数及横向剪切效应对正交各向异性板非线性弯曲的影响。分析结果表明横向剪切效应对正交各向异性中厚板的影响是显著的。

**关键词:** 高阶横向剪切; 有限变形; 微分求积方法; DQWB 途径; 收敛性和比较性研究

**中图分类号:** O343.8      **文献标识码:** A

## 引 言

复合材料正交各向异性板因其具有重量轻、高的比强度和轻刚度以及良好的可设计性等优点, 越来越广泛地使用于现代工程结构中。已有许多学者根据忽略横向剪切效应的 Kirchhoff 假设对复合薄板的非线性力学行为进行了研究<sup>[1]</sup>。然而, 考虑横向剪切效应的影响对复合材料正交各向异性板比对各向同性板显得更为重要。由于在有限变形条件下有关高阶剪切复合材料板非线性力学行为的分析较为复杂, 只有少量文献对剪切复合板的非线性问题进行了求解<sup>[2~5]</sup>。Reddy<sup>[2,3]</sup>对复合板的非线性问题提出了高阶横向剪切理论并应用有限元方法进行了研究。Shen<sup>[4,5]</sup>根据剪切变形理论并采用摄动技术分析了复杂条件下复合层合板非线性弯曲及屈曲问题。

与有限元、有限差分等数值方法相比, 由 Richard Bellman 等人<sup>[6]</sup>于 70 年代提出的微分求积方法(简称 DQ 方法), 在对各种结构的复杂的线性和非线性问题进行计算和分析时有较高的效率<sup>[7]</sup>。Bert 等人<sup>[8]</sup>将 DQ 方法成功地应用于 von Kármán 板的求解, 然而, 其求解程序非常

\* 收稿日期: 2003\_03\_10; 修订日期: 2004\_04\_16

基金项目: 上海市重点学科建设项目

作者简介: 李晶晶(1963—), 女, 长沙人, 讲师, 博士;

程昌钧(联系人, Tel: + 86\_21\_56331454; E\_mail: chjcheng@mail.shu.edu.cn)。

复杂。为简化非线性计算并提高 DQ 方法的计算精度和效率, Chen<sup>[9]</sup> 研究了相应的算法, 应用特殊矩阵乘积使耦合的非线性方程能直接解耦, 简化了非线性偏微分方程组的表达和计算。对于考虑高阶横向剪切有限变形板的非线性 DQ 分析还未见报道。

本文基于 Reddy 的高阶横向剪切理论, 采用微分求积方法 (DQ 方法) 对正交各向异性矩形板的非线性弯曲进行了研究, 导出了非线性控制方程的 DQ 形式, 利用推广的 DQWB<sup>[10~12]</sup> 技巧来处理了高阶矩的边界条件。进一步运用并推广新的分析技术<sup>[9]</sup> 和技巧, 简化了非线性计算。为表明该方法的可靠性和有效性, 将考虑剪切变形效应和不考虑这种效应的薄板的数值结果与三维弹性解析解及其它数值解进行了比较, 同时研究了数值结果的收敛性, 考察了不同的节点分布对收敛速度的影响。结果表明该方法收敛性好, 计算精度高, 计算量少。最后还考察了几何、材料参数及横向剪切效应对正交各向异性板非线性弯曲的影响。

## 1 数学模型

考察沿  $x$  和  $y$  轴方向的边长分别为  $a$ 、 $b$ , 厚度为  $h$  的正交各向异性矩形板。基于 Reddy 的高阶横向剪切理论<sup>[2]</sup>, 正交各向异性板非线性弯曲问题的无量纲控制方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} U_{,XX} + A_{66} \lambda^2 U_{,YY} + (A_{12} + A_{66}) \lambda W_{,XY} + W_{,X} (A_{66} \beta^{-1} \lambda^2 W_{,YY} + A_{11} \beta^{-1} W_{,XX}) + \\ (A_{12} + A_{66}) \lambda^2 \beta^{-1} W_{,XY} W_{,Y} = 0, \\ A_{22} \lambda^2 V_{,YY} + A_{66} V_{,XX} + (A_{12} + A_{66}) \lambda U_{,XY} + W_{,Y} (A_{22} \lambda^3 \beta^{-1} W_{,YY} + A_{66} \lambda \beta^{-1} W_{,XX}) + \\ (A_{12} + A_{66}) \lambda \beta^{-1} W_{,XY} W_{,X} = 0, \\ G_1 W_{,XXXX} + G_2 \lambda^4 W_{,YYYY} + G_3 \lambda^2 W_{,XXYY} + G_4 \beta \Phi_{,XXX} + G_5 \lambda^3 \beta \Psi_{,YY} + \\ G_6 (\lambda^2 \beta \Phi_{,XY} + \lambda \beta \Psi_{,XX}) - G_7 (\beta^3 \Phi_{,X} + \beta^2 W_{,XX}) - G_8 (\lambda \beta^3 \Psi_{,Y} + \\ \lambda^2 \beta^2 W_{,YY}) + (\lambda^2 \beta^2 A_{22} W_{,Y} + \beta^2 A_{12} W_{,XX}) \left[ \lambda \beta^{-1} V_{,Y} + \frac{1}{2} \lambda^2 \beta^{-2} W_{,Y}^2 \right] + \\ (\lambda^2 \beta^2 A_{12} W_{,Y} + \beta^2 A_{11} W_{,XX}) \left[ \beta^{-1} U_{,X} + \frac{1}{2} \beta^{-2} W_{,X}^2 \right] + \\ 2A_{66} \lambda \beta^2 W_{,XY} (\lambda \beta^{-1} U_{,Y} + \beta^{-1} V_{,X} + \lambda \beta^{-2} W_{,Y} W_{,X}) + Q = 0, \\ - G_4 W_{,XXX} - G_6 \lambda^2 W_{,XXY} + G_{10} \beta \Phi_{,XX} + G_{11} \lambda^2 \beta \Phi_{,YY} + G_9 \lambda \beta \Psi_{,XX} + \\ G_7 (\beta^3 \Phi_{,X} + \beta^2 W_{,X}) = 0, \\ - G_5 \lambda^3 W_{,YY} - G_6 \lambda W_{,XXY} + G_{11} \beta \Psi_{,XX} + G_9 \lambda \beta \Phi_{,XY} + G_{12} \lambda^2 \beta \Psi_{,YY} + \\ G_8 (\beta^3 \Psi_{,Y} + \lambda \beta^2 W_{,Y}) = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

式中, 系数  $G_i$  和  $A_i$  等列于附录 A 中。无量纲量为

$$\left\{ \begin{array}{l} X = x/a, \quad Y = y/b, \quad U = u(x, y)/h, \quad V = v(x, y)/h, \quad W = w(x, y)/h, \\ \Phi = \phi(X, Y), \quad \Psi = \psi(X, Y), \quad \lambda = a/b, \quad \beta = a/h, \quad Q = qa^4/E_1 h^4. \end{array} \right. \quad (2)$$

其中,  $u$ 、 $v$ 、 $w$  是板沿  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴的方向的位移,  $\phi$  和  $\psi$  分别是板中面绕  $y$  和  $x$  轴的转角,  $E_1$  为  $x$  轴方向的弹性模量,  $q$  是横向载荷。

为了方便, 设矩形板的边界为简支的, 则有无量纲边界条件

$$\begin{cases} U = V = W = \Psi = \Phi_{,X} = W_{,XX} = 0, & X = 0, \\ U = V = W = \Psi = \Phi_{,X} = W_{,XX} = 0, & X = 1, \\ U = V = W = \Phi = \Psi_{,Y} = W_{,YY} = 0, & Y = 0, \\ U = V = W = \Phi = \Psi_{,Y} = W_{,YY} = 0, & Y = 1 \end{cases} \quad (3)$$

## 2 求解方法

考虑函数  $F(X, Y)$  (相应于  $U, V$  和  $W$ ),  $\Phi(X, Y)$  和  $\Psi(X, Y)$  在二维区域上沿  $x_{-}$  和  $y_{-}$  方向分别具有  $N_x \times N_y$  个离散点, 根据 DQWB 技巧, 应用文[12]推广的 DQ 公式, 则函数  $F(X, Y)$  在二维区域内部各节点处的各阶偏导数可近似表达为下列矩阵形式<sup>[9]</sup>:

$$\begin{cases} F_{,X} = A_x F, F_{,XX} = B_x F, F_{,XXX} = C_x F, F_{,XXXX} = D_x F, \\ F_{,Y} = F A_y^T, F_{,YY} = F B_y^T, F_{,YYY} = F C_y^T, F_{,YYYY} = F D_y^T, \\ F_{,XY} = A_x F A_y^T, F_{,XYY} = A_x F B_y^T, \\ F_{,XXY} = B_x F A_y^T, F_{,XXYY} = B_x F B_y^T. \end{cases} \quad (4)$$

函数  $\Phi(X, Y)$  和  $\Psi(X, Y)$  在二维区域内部各节点处的各阶偏导数的 DQ 矩阵形式可相似的表达为

$$\begin{cases} \Phi_{,Y} = \Phi A_y^T, \Phi_{,YY} = \Phi B_y^T, \Phi_{,XYY} = A_x \Phi B_y^T, \\ \Phi_{,X} = A_x \Phi, \Phi_{,XX} = B_x \Phi, \Phi_{,XXX} = C_x \Phi, \Phi_{,XY} = A_x \Phi A_y^T, \\ \Psi_{,X} = A_x \Psi, \Psi_{,XX} = B_x \Psi, \Psi_{,XXY} = B_x \Psi A_y^T, \\ \Psi_{,Y} = \Psi A_y^T, \Psi_{,YY} = \Psi B_y^T, \Psi_{,YYY} = \Psi C_y^T, \Psi_{,XY} = A_x \Psi A_y^T, \end{cases} \quad (5)$$

这里, (4) 和 (5) 中的  $F, \Phi$  和  $\Psi$  分别是未知的  $(N_x - 2) \times (N_y - 2)$  阶矩阵. 带有下标  $x$  和  $y$  的矩阵  $A, B, C, D$  及  $A, B, C$  分别表示  $F, \Phi$  和  $\Psi$  沿  $x_{-}$  和  $y_{-}$  方向各阶偏导数的 DQ 权系数及修正的权系数矩阵, 上标 T 表示矩阵的转置.

因此, 应用 DQ 公式 (4) 和 (5), 控制方程 (1) 可转化为在二维区域内部各节点处离散的 DQ 形式的控制方程

$$A_{11} B_x U + A_{66} \lambda^2 U B_y^T + (A_{12} + A_{66}) M_x V A_y^T + (\beta^{-1} A_x W) \circ (A_{66} \lambda^2 W B_y^T + A_{11} B_x W) + (A_{12} + A_{66}) (M_x W A_y^T) \circ (\lambda \beta^{-1} W A_y^T) = 0, \quad (6a)$$

$$A_{22} \lambda^2 V B_y^T + A_{66} B_x V + (A_{12} + A_{66}) M_x U A_y^T + (\lambda \beta^{-1} W A_y^T) \circ (A_{22} \lambda^2 W B_y^T + A_{66} B_x W) + (A_{12} + A_{66}) (M_x W A_y^T) \circ (\beta^{-1} A_x W) = 0, \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} & G_1 D_x W + G_2 \lambda^4 W D_y^T + G_3 \lambda^2 B_x W B_y^T + G_4 \beta C_x \Phi + G_5 \lambda^3 \beta \Psi C_y^T + \\ & G_6 (\lambda^2 \beta A_x \Phi B_y^T + \lambda \beta B_x \Psi A_y^T) - G_7 (\beta^3 A_x \Phi + \beta^2 B_x W) - \\ & G_8 (\lambda \beta^3 \Psi A_y^T + \lambda^2 \beta^2 W B_y^T) + [\lambda^2 \beta^2 A_{22} (W B_y^T) + \beta^2 A_{12} (B_x W)] \circ \\ & [\lambda \beta^{-1} (V A_y^T) + \frac{1}{2} \lambda^2 \beta^{-2} (W A_y^T) \circ (W A_y^T)] + [\lambda^2 \beta^2 A_{12} (W B_y^T) + \\ & \beta^2 A_{11} (B_x W)] \circ [\beta^{-1} (A_x U) + \frac{1}{2} \beta^{-2} (A_x W) \circ (A_x W)] + \\ & 2 A_{66} \lambda \beta^2 (A_x W B_y^T) \circ [\lambda \beta^{-1} (U A_y^T) + \beta^{-1} (A_x V) + \\ & \lambda \beta^{-2} (A_x W) \circ (W A_y^T)] + Q = 0, \quad (6c) \\ & - G_4 C_x W - G_6 \lambda^2 A_x W B_y^T + G_{10} \beta B_x \Phi + G_{11} \lambda \beta \Phi B_y^T + \end{aligned}$$

$$G_9 \lambda \beta A_x \Psi A_y^T + G_7 (\beta^3 \Phi + \beta^2 A_x W) = 0, \quad (6d)$$

$$- G_5 \lambda^3 W C_y^T - G_6 \lambda B_x W A_y^T + G_{11} \beta B_x \Psi + G_9 \lambda \beta A_x \Phi A_y^T +$$

$$G_{12} \lambda^2 \beta W B_y^T + G_8 (\beta^3 \Psi + \lambda \beta^2 W A_y^T) = 0 \quad (6e)$$

这里, 我们已采用了 Hadamard 矩阵积的符号, 即  $A^\circ B = [a_{ij} b_{ij}] \in C^{N \times M}$ , 其中  $A = [a_{ij}]$  和  $B = [b_{ij}] \in C^{N \times M}$ , 而  $C^{N \times M}$  表示  $N \times M$  阶矩阵.

因为在计算区域内部节点  $i$  处各阶偏导数的权系数时边界条件式(3)已考虑了, 故对方程(6)求解时不必再考虑边界条件.

类似于文[9], 通过使用 Hadamard 和 Kronecker 矩阵积<sup>[13]</sup>, 耦合的非线性方程(6)可进一步表达为

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 U + L_2 V + (L_7 W)^\circ (L_1 W) + (L_8 W)^\circ (L_2 W) = 0, \\ L_2 U + L_3 V + (L_8 W)^\circ (L_3 W) + (L_7 W)^\circ (L_2 W) = 0, \\ L_4 W + H_7 \Phi + H_8 \Psi + (L_5 W)^\circ \left[ L_7 U + \frac{1}{2} (L_7 W)^\circ (L_7 W) \right] + \\ (L_6 W)^\circ \left[ L_8 V + \frac{1}{2} (L_8 W)^\circ (L_8 W) \right] + \\ \frac{2A_{66} \beta^2}{A_{12} + A_{66}} (L_2 W)^\circ [L_8 U + L_7 V + (L_7 W)^\circ (L_8 W)] + Q = 0, \\ H_1 W + H_2 \Phi + H_3 \Psi = 0, \\ H_4 W + H_5 \Phi + H_6 \Psi = 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

其中,  $L_i$  和  $H_i$  的表达形式见附录 B.  $U$ 、 $V$ 、 $W$ 、 $\Phi$  和  $\Psi$  是分别将  $(N_x - 2) \times (N_y - 2)$  阶矩阵  $U$ 、 $V$ 、 $W$ 、 $\Phi$  和  $\Psi$  的各列依次纵排得到的  $(N_x - 2)(N_y - 2)$  维列向量,  $Q$  是载荷列阵.

与文[9]直接对耦合的非线性控制方程的解耦方法不同, 为使耦合的非线性控制方程能够解耦, 这里先采用代数演算的技巧对耦合的非线性 DQ 控制方程(7)作等价变形, 以避免病态矩阵, 从而使解耦成功. 这样, 由方程(7a)和(7b), 未知向量  $U$  和  $V$  可由  $W$  表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} U = L_9^{-1} L_{23}^{-1} H_{21}(W) - L_9^{-1} L_{32}^{-1} H_{12}(W), \\ V = L_{10}^{-1} L_{12}^{-1} H_{21}(W) - L_{10}^{-1} L_{21}^{-1} H_{12}(W), \end{array} \right. \quad (8)$$

其中,

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{21} = L_1 + L_2, \quad L_{12} = L_1 - L_2, \quad L_{32} = L_2 + L_3, \quad L_{23} = L_2 - L_3, \\ L_9 = L_{32}^{-1} L_{21} - L_{23}^{-1} L_{12}, \quad L_{10} = L_{21}^{-1} L_{32} - L_{12}^{-1} L_{23}, \\ H_{12}(W) = (L_{21} W)^\circ (L_7 W) + (L_{32} W)^\circ (L_8 W), \\ H_{21}(W) = (L_{12} W)^\circ (L_7 W) + (L_{23} W)^\circ (L_8 W). \end{array} \right. \quad (9)$$

类似地, 由方程(7d)和(7e), 未知向量  $\Phi$  和  $\Psi$  可由  $W$  表达为

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = H_7^{-1} H_{36}^{-1} H_{14} W - H_7^{-1} H_{63}^{-1} H_{41} W, \\ \Psi = H_8^{-1} H_{25}^{-1} H_{14} W - H_8^{-1} H_{52}^{-1} H_{41} W, \end{array} \right. \quad (10)$$

式中,

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{25} = H_2 - H_5, \quad H_{52} = H_2 + H_5, \quad H_{63} = H_3 + H_6, \\ H_{36} = H_3 - H_6, \quad H_{41} = H_1 + H_4, \quad H_{14} = H_1 - H_4, \\ H_7 = H_{63}^{-1} H_{52} - H_{36}^{-1} H_{25}, \quad H_8 = H_{52}^{-1} H_{63} - H_{25}^{-1} H_{36}. \end{array} \right. \quad (11)$$

通过使用公式(8)和(10), 耦合的非线性方程(7)已经被方便地解耦, 使得  $W$  成为计算中的基

本的变向量。未知量的减少极大地简化了非线性问题的计算。同时式(7c)成为基本的迭代方程。

为了考察不同的节点分布对 DQ 解收敛速度及计算精度的影响, 本文分别采用了均匀节点及不均匀节点分布两种模型进行了分析。不均匀节点分布模型为

$$\begin{cases} X_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{N-1} \right] & (i = 1, 2, \dots, N), \\ Y_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{N-1} \right] & (i = 1, 2, \dots, N), \end{cases} \quad (12)$$

其中  $X_i$  和  $Y_i$  是相应于  $x_$  和  $y_$  方向的分布节点。

### 3 数值结果和讨论

本文中的程序可以同时求解非线性及相应的线性问题, 并对两者进行比较。相应的线性问题的解可被用作非线性问题计算的初值。数值算例表明, 即使初值比相应非线性问题的数值解大得多, 迭代解仍是收敛的, 且收敛速度非常快。

#### 3.1 方法的收敛性和比较性研究

为表明该方法的可靠性和有效性, 首先研究数值解的收敛性和精确性。为了与现有的三维弹性解析解及其它数值结果进行比较, 我们对考虑剪切变形的矩形板和不考虑剪切变形的矩形板进行了分析。计算中的材料参数列在表 1 中。

表 1 计算中的材料参数

材料	$E_1/\text{GPa}$	$E_2/\text{GPa}$	$g_{12}/\text{GPa}$	$g_{13}/\text{GPa}$	$g_{23}/\text{GPa}$	$\nu_1$	$\nu_2$	$E_1/g_{13}$
各向同性	14.7					0.25		2.5
正交各向异性 A	145.5	76.4	42.6	25.91	43.23	0.44	0.23	5.6
正交各向异性 B	128	8	4.5	4.5	1.6	0.28	0.28	28.4
正交各向异性 C	174.6	6.98	3.49	3.49	1.4	0.25	0.25	50

图 1 示出了采用均匀节点和不均匀节点分布时各向同性弹性方板的中心挠度比值  $w/w^*$  (其中,  $w^*$  为三维解析解) 的收敛性比较。计算中, 我们取  $a = 100$ ,  $h = 1.0$ ,  $q = 1.0$ 。从图 1 可以观察到, 随着节点的增加, DQ 解很快收敛到三维解析解。与文[14]的结果一致, 具有不均匀节点分布的 DQ 解的收敛性明显优于均匀节点的 DQ 解的收敛性。具有  $7 \times 7$  个不均匀节点的 DQ 解可达到与  $9 \times 9$  个均匀节点的 DQ 解相同的精度, 即使取  $7 \times 7$  个不均匀节点 DQ 解也可收敛达精确结果, 因此, 下面的数值算例中均采用  $7 \times 7$  个不均匀节点进行计算。表 2 中, 给出了本文  $7 \times 7$  个不均匀节点的 DQ 解和三维薄板解析解及其它方法所给的薄板的数值结果<sup>[9]</sup>, 可见与有限元方法相比, 本文的 DQ 解具有更高的计算精度, 但比有限元方法具有少得多的计算量。还可以看到, 当板的厚度较小时, 有限变形薄板理论与剪切板理论的 DQ 解相当吻合。当板不是太薄时, 两者的差别将在下面讨论。

表 2 方板 ( $h/a = 0.01$ ) 的中心挠度

方法	解析解 <sup>[9]</sup>	FEM <sup>[9]</sup>	FEM <sup>[9]</sup>	DQ <sup>[9]</sup>	DQ 薄板解[本文]	DQ[本文]
$w$	0.940	1.028	0.942	0.944	0.9409	0.9414
$(w - w^*)/w^*$		(9.3%)	(0.3%)	(0.4%)	(0.09%)	(0.15%)

### 3.2 几何、材料参数及横向剪切效应对非线性弯曲的影响

图2为具有不同的长宽比情况下的正交各向异性板(材料A)的无量纲中心挠度随无量纲载荷的变化曲线。计算中,板的宽厚比为  $h/a = 0.1$ 。

从图2可以观察到,在一定的无量纲载荷下,随着长宽比  $\lambda = a/b$  的减少,无量纲中心挠度  $w/h$  不断增加,而且,板的非线性程度也随着增加。可以看到,当  $Q = qa^4/E_1h^4 = 4.8$ , 长宽比  $\lambda = a/b = 1.5, 1, 0.5$  时,中心挠度的相对误差  $(w_{linear} - w_{nonlinear})/w_{linear}$  分别是 4.6%, 10.1%, 29.4%。这表明非线性问题与相应的线性问题结果的差异,随着无量纲中心挠度  $w/h$  的增加而增加。与线性理论相比,非线性理论更具合理性。

图3表明随着板的厚宽比  $h/a$  的增加,横向剪切效应的影响明显地增大,尤其对各向异性板。特别,当厚宽比  $h/a = 0.1$  和  $0.2$  时,对各向同性板,剪切板的中心挠度  $w$  比相应薄板的中心挠度  $w_1$  分别大出 5% 和 20%; 而对各向异性板,剪切板的中心挠度  $w$  比相应薄板的中心挠度  $w_1$  分别大出 50% 和 188%。同时,对具有相同的厚宽比  $h/a$  的各向异性板,随着材料参数比  $E_1/g_{13}$  的增加,当  $h/a \geq 0.05$ , 剪切板与相应薄板的中心挠度的相对误差  $(w - w_1)/w_1$  明显地增大。这表明随着厚宽比  $h/a$  和材料参数比  $E_1/g_{13}$  的增加,必须计及横向剪切效应的影响。

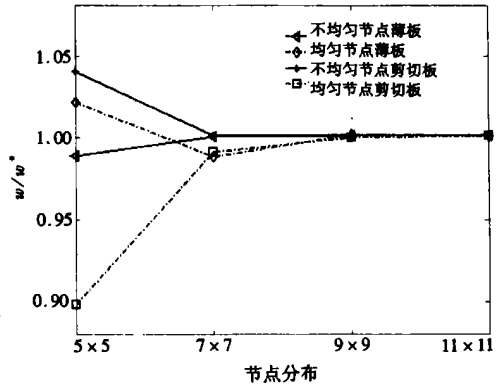


图1 方板 ( $h/a = 0.01$ ) 的中心挠度在不同节点分布时的收敛性

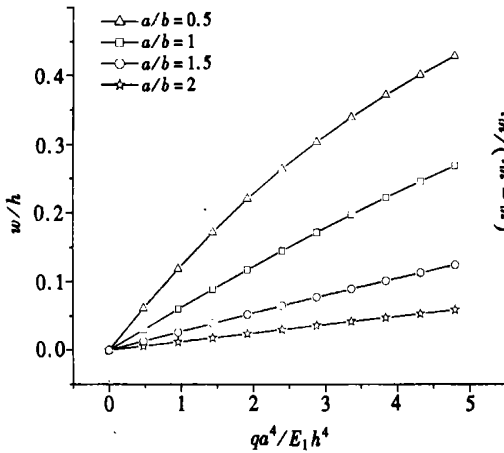


图2 不同长宽比对板的中心挠度  $w$  与载荷  $q$  间的关系曲线的影响

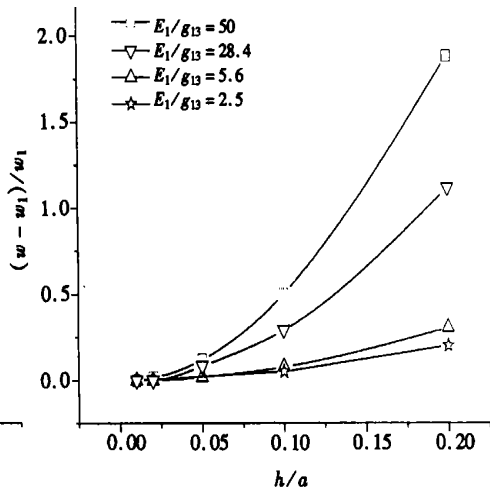


图3 横向剪切效应对板的非线性弯曲的影响

### 3.3 结论

以上数值结果的分析表明:对考虑高阶横向剪切效应的正交各向异性板的非线性弯曲问题,采用 DQWB 微分求积方法,即使取较少的节点,所得到的结果也能收敛到精确解。采用不均匀节点分布时 DQ 解的收敛性明显优于均匀节点分布时 DQ 解的收敛性。由于运用了新的

分析技巧减少了未知变量,简化了非线性方程的计算,与有限元方法、有限差分方法和边界元方法相比,DQ方法在计算复杂的非线性问题时具有较高的效率,较少的计算量,更易于工程应用。

## 附录 A

公式(1)中的  $G_i$  和  $A_i$  给定为

$$\begin{aligned} A_{11} &= \mu, A_{12} = e\nu_1\mu, A_{22} = e\mu, A_{66} = g_{12}, \\ G_1 &= -\mu/252, G_2 = -e\mu/252, G_3 = -(2g_{12}/E_1 + \nu_1 e\mu)/126, \\ G_4 &= 4\mu/315, G_5 = 4e\mu/315, G_6 = 4(2g_{12}/E_1 + \nu_1 e\mu)/315, \\ G_7 &= -8g_{12}/15E_1, G_8 = -8g_{23}/15E_1, G_{10} = 17\mu/315, \\ G_9 &= 17(g_{12}/E_1 + \nu_1 e\mu)/315, G_{11} = 17g_{12}/315E_1, G_{12} = 17e\mu/315, \end{aligned}$$

其中  $\mu = 1/(1 - \nu_1\nu_2)$ ,  $e = E_2/E_1$

## 附录 B

公式(7)中的  $H_i$  和  $L_i$  给定为

$$\begin{aligned} L_1 &= A_{11}(I_y \times B_x) + A_{66}\lambda^2(B_y \times I_x), L_2 = (A_{12} + A_{66})\lambda(A_y \times A_x), \\ L_3 &= A_{22}\lambda^2(B_y \times I_x) + A_{66}(I_y \times B_x), \\ L_4 &= G_1(I_y \times D_x) + G_2\lambda^4(D_y \times I_x) + G_3\lambda^2(B_y \times B_x) - \\ &G_7\beta^2(I_y \times B_x) - G_8\lambda^2\beta^2(B_y \times I_x), \\ L_5 &= \lambda^2\beta^2A_{12}(B_y \times I_x) + \beta^2A_{11}(I_y \times B_x), \\ L_6 &= \lambda^2\beta^2A_{22}(B_y \times I_x) + \beta^2A_{12}(I_y \times B_x), \\ L_7 &= \beta^{-1}(I_y \times A_x), L_8 = \lambda\beta^{-1}(A_y \times I_x), \\ H_1 &= -G_4(I_y \times C_x) - G_6\lambda^2(B_y \times A_x) + G_7\beta^2(I_y \times A_x), \\ H_2 &= G_{10}\beta(I_y \times B_x) + G_{11}\lambda\beta(B_y \times I_x) + G_7\beta^3(I_y \times I_x), \\ H_3 &= G_9\lambda\beta(A_y \times A_x), H_5 = G_9\lambda\beta(A_y \times A_x), \\ H_4 &= -G_5\lambda^3(C_y \times I_x) - G_6\lambda(A_y \times B_x) + G_8\lambda\beta^2(A_y \times I_x), \\ H_6 &= G_{12}\lambda^2\beta(B_y \times I_x) + G_{11}\beta(I_y \times B_x) + G_8\beta^3(I_y \times I_x), \\ H_7 &= G_4\beta(I_y \times C_x) + G_6\lambda^2\beta(B_y \times A_x) - G_7\beta^3(I_y \times A_x), \\ H_8 &= G_5\lambda^3\beta(C_y \times I_x) + G_6\lambda\beta(A_y \times B_x) - G_8\lambda\beta^3(A_y \times I_x), \end{aligned}$$

其中  $\times$  表示 Kronecker 矩阵积,  $I_x$  和  $I_y$  是单位矩阵

## [参考文献]

- [1] Chia C Y. Geometrically nonlinear behavior of composite plate: a review[J]. Applied Mechanics Reviews, 1988, 41(2): 439—451.
- [2] Reddy J N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation[J]. Internat J Solids and Structures, 1984, 20(9/10): 881—896.
- [3] Reddy J N. Mechanics of Laminated Composite Plates [M]. New York: CRC Press, 1997.
- [4] Shen H S. Nonlinear bending of shear deformable laminated plates under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations[J]. Comput Struct, 2000, 50(2): 131—142.
- [5] Shen H S. Postbuckling of shear deformable laminated plates under biaxial compression and lateral pressure and resting on elastic foundations[J]. Int J Mech Sci, 2000, 42(6): 1171—1195.
- [6] Bellman R E, Casti J. Differential quadrature and long term integration[J]. J Math Anal Appl, 1971,

- 34(2): 235—238.
- [7] Bert C W, Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review[J]. Applied Mechanics Reviews, 1996, 49(1): 1—28.
- [8] Bert C W, Striz A G, Jang S K. Nonlinear bending of analysis of orthotropic rectangular plates by the method of differential quadrature[J]. Comput Mech, 1989, 5(2): 217—226.
- [9] Chen W, Shu C, He W, et al. The applications of special matrix products to differential quadrature solution of geometrically nonlinear bending of orthotropic rectangular plates[J]. Comput Struct, 2000, 74(1): 65—76.
- [10] Wang X, Bert C W. A new approach in applying differential quadrature to static and free vibrational analyses of beams and plates[J]. J Sound Vibration, 1993, 162(3): 566—572.
- [11] Wang X, Bert C W. Differential quadrature analysis of deflection, buckling and free vibration of beams and rectangular plates[J]. Comput Struct, 1993, 48(3): 473—479.
- [12] LI Jing\_jin, CHENG Chang\_jun. Differential quadrature method for bending problem of plates with transverse shear effects[J]. Journal of Shanghai University, 2003, 7(3): 228—233.
- [13] Lancaster P, Timenetsky M. The Theory of Matrices With Applications [M]. 2nd ed. Orlando, FL: Academic Press, 1985.
- [14] Bert C W, Wang X, Striz A G. Differential quadrature for static and free vibrational analyses of anisotropic plates[J]. Int J Solids Struct, 1993, 30(13): 1737—1744.

## Differential Quadrature Method for Bending of Orthotropic Plates With Finite Deformation and Transverse Shear Effects

LI Jing\_jin, CHENG Chang\_jun

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, and Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

**Abstract:** Based on the Reddy's theory of plates with the effect of higher\_order shear deformations, the governing equations for bending of orthotropic plates with finite deformations were established. The differential quadrature method of nonlinear analysis to the problem was presented. DQWB approach was extended to handle the multiple boundary conditions of plates. The techniques were also further extended to simplify nonlinear computations. The numerical convergence and comparison of solutions were studied. The results show that the DQ method presented is very reliable and valid. Moreover, the influences of geometric and material parameters as well as the transverse shear deformations on nonlinear bending were investigated. Numerical results show the influence of the shear deformation on the static bending of orthotropic moderately thick plate is significant.

**Key words:** higher\_order transverse shear deformation; finite deformation; differential quadrature method; DQWB approach; convergence and comparison study of solution