应用数学和力学，第 9 卷第 7 期(1988年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

一种经典时空理论(Ⅱ)——爱丁顿判别*

余 燊

(中国科学院北京天文台，1987年4月4日收到)

摘 要

本文利用$SU(2)$结构得到Eddington和 Weyl 判别方法，并讨论了由这两种方法所得到的结果。

一、引 言

1921 年，Eddington 指出[1]，可把 Weyl 几何推广（后来叫做 Eddington 几 何）到经典的统一场理论（UFT）。在那篇文章中，推广的爱因斯坦张量

$$\mathcal{G}=G_{\mu\nu}dx^{\mu}\otimes dx^{\nu} \tag{1.1}$$

是用 Eddington 联络定义的，且对于确定的物理定律这一张量是一基本不变量。张量(1.1)对应于两个二次型

$$\Gamma=G_{(\lambda\mu)}dx^{\lambda}dx^{\mu} \tag{1.2}$$

和

$$F=G_{[\lambda\mu]}dx^{\lambda}\wedge dx^{\mu} \tag{1.3}$$

的直和。

二次型（1.2）与引力场有关，而（1.3）则是用磁场来判别的。本文将研究在经典时空理论(Ⅰ)中提出的 $SU(2)$ 几何可否作为这种判别法，如果可以，这种判别法将得到哪些逻辑上的和物理上的结果。在文(Ⅰ)中提出的UFT 本身是完备的，而 Eddington 方法则可导出该理论的若干结果。正如 Eddington曾经指出的[2]：“在路经不确定的地方，不考虑沿任意路径的进程是不合适的。”

二、Eddington方 法

在文(Ⅰ)中指出，$SU(2)$联络的系数

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}+\frac{1}{2}S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} \tag{2.1}$$

可用16 个分量势（$g_{\alpha\beta}$，$a_{\alpha\beta}$）来明显的表示，要确定这16个未知量，推广的爱因斯坦方程

*邵明珠、罗诗裕译，陈明伦、杨砚校对。

$$G^{\lambda}{}_{\mu}=\kappa T^{\lambda}{}_{\mu} \tag{2.2}$$

可提供12个基本的独立方程，而方程（2.2）又等价于

$$\mathring{R}_{\lambda\mu}-\frac{1}{2}g_{\lambda\mu}(\mathring{R}-2\Lambda)+\frac{1}{4}\Big(S_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\beta}S_{\beta\mu}^{\cdot\cdot\rho}$$

$$-\frac{1}{2}g_{\lambda\mu}S_{\rho\cdot\cdot}^{\cdot\alpha\beta}S_{\beta\alpha}^{\cdot\cdot\rho}=\kappa T_{(\lambda\mu)} \tag{2.3}$$

和

$$R_{[\lambda\mu]}=\kappa T_{[\lambda\mu]} \tag{2.4}$$

按照Eddington 方法，方程（2.3）可视为引力场方程，而电磁场则是用 $R_{[\lambda\mu]}$，即

$$\mathring{F}_{\lambda\mu}\cong QR_{[\lambda\mu]} \tag{2.5}$$

来判别的，其中 Q 是物理常数。根据已知的任何一种判别方法可知，判别式（2.5）似乎不满足麦克斯韦齐次方程。现在，我们有

$$R_{[\lambda\mu]}=\frac{1}{2}\nabla_{\rho}S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho} \tag{2.6}$$

但是，考虑到（$S_{\lambda\mu\nu}$）是完全反对称的，且只有4个独立分量，因此，它可以用四次型矢量表示如下

$$S_{\lambda\mu\nu}=\mathscr{E}_{\lambda\mu\nu\rho}A^{\rho} \tag{2.7}$$

$$S^{\lambda\mu\nu}=\mathscr{E}^{\lambda\mu\nu\rho}A_{\rho} \tag{2.8}$$

其中 $\mathscr{E}$ 是 Levi-Civita 符号。于是（2.6）式可表示为

$$R^{[\lambda\mu]}=\frac{1}{2}\nabla_{\nu}(\mathscr{E}^{\lambda\mu\nu\rho}A_{\rho}) \tag{2.9}$$

考虑到

$$\nabla_{\alpha}\mathscr{E}^{\lambda\mu\nu\rho}=0 \tag{2.10}$$

再用 $\mathscr{E}_{\lambda\mu\alpha\beta}$ 乘式(2.9)，可得

$$\mathscr{E}_{\lambda\mu\alpha\beta}R^{[\lambda\mu]}=\frac{1}{2}\nabla_{\alpha}(\mathscr{E}_{\lambda\mu\alpha\beta}\mathscr{E}^{\lambda\mu\nu\rho}A_{\rho})$$

即

$$\mathscr{E}_{\lambda\mu\alpha\beta}R^{[\lambda\mu]}=-\left(\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right) \tag{2.11}$$

在求导时，只须注意到

$$A_{\rho}S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\rho}=S_{\alpha\beta\rho}A^{\rho}=\mathscr{E}_{\alpha\beta\rho\sigma}A^{\rho}A^{\sigma}=0$$

即可。因此，我们令

$$F_{\alpha\beta}=Q\,\mathscr{E}_{\lambda\mu\alpha\beta}R^{[\lambda\mu]} \tag{2.12}$$

来代替式(2.5)，则 $F_{\alpha\beta}$ 满足

$$\mathring{\nabla}_{\lambda}F_{\mu\nu}+\mathring{\nabla}_{\mu}F_{\nu\lambda}+\mathring{\nabla}_{\nu}F_{\lambda\mu}=0 \tag{2.13}$$

这就是用 Levi-Civita 联络表示的齐次麦克斯韦方程。而非齐次麦克斯韦方程

$$\mathring{\nabla}_{\mu}F^{\lambda\mu}=\beta J^{\lambda} \tag{2.14}$$

可通过微分（2.4）式得到，如果我们令

$$J^{\rho}=Q\kappa\mathring{\nabla}_{\sigma}(g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\mathscr{E}_{\lambda\mu\alpha\beta}T^{[\lambda\mu]}) \tag{2.15}$$

的话。此外，利用式（2.7）和（2.8），方程（2.4）还可写为

$$\mathring{R}^{\lambda}{}_{\mu}-\frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\mu}(\mathring{R}-2\Lambda)=\kappa\mathring{T}^{\lambda}{}_{\mu}+\frac{1}{2}\Big(A^{\lambda}A_{\mu}-\frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\mu}A_{\alpha}A^{\alpha}\Big) \tag{2.16}$$

按照Eddington解释，上式中的$2^{-1}(A^{\lambda}A_{\mu}-2^{-1}\delta^{\lambda}_{\mu}A_{\alpha}A^{\alpha})$是与电子束缚力有关的$EMT$。除了电磁场具有现在这种解释外，方程（2.14）和（2.16）再现了爱因斯坦-麦克斯韦理论的结果。

三、Weyl作用密度的模拟

以上结果是基于Eddington判别原理。而Weyl却是基于与作用密度[2]

$$\mathscr{A}=(R^2-\alpha F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}) \tag{3.1}$$

有关的作用原理，其中R是Ricci标量（当然是用Weyl联络定义的）。根据Eddington[2]，"显然，按照实际情况，它的作用还不是十分重要，而仅仅是把两种不同形式的变量联系起来…"。虽然如此，Eddington后来仍用一个很简单的区域不变量，通过$2^{-1}R_{\mu\nu}R^{\nu\mu}$导出了（3.1）式，这里协变指标的秩序是与逆变指标秩序相反的。实际上，从（2.12）出发可以更自然地用区域不变量导出（3.1）式，这时，协变和逆变指标的秩序是相同的。因为我们有

$$\mathscr{A}=R^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu}/2=[R^{(\lambda\mu)}R_{(\lambda\mu)}+R^{[\lambda\mu]}R_{[\lambda\mu]}]/2 \tag{3.2}$$

且（2.12）式给出了

$$R^{[\lambda\mu]}=Q^{-1}\mathscr{E}^{\lambda\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

则（3.2）式变为

$$\mathscr{A}=[R^{(\lambda\mu)}R_{(\lambda\mu)}-Q^{-2}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}]/2 \tag{3.3}$$

利用Eddington假设，我们可以得到类似于（3.1）式的表达式，仅管这样，利用$SU(2)$联络,由变分原理得到的结果是与Weyl所得到的结果是不同的。另一方面，我们同时利用V_4几何（Cartan几何）和式（2.7）也可以得到场方程。

四、讨　论

仅管Eddington方法的结果形式简明，但它仍存在两个主要困难。因为张量$(a_{\alpha\beta})$不出现在这个理论中，且有14个未知的场分量$(g_{\alpha\beta}, A_\alpha)$，而独立方程（2.14）和（2.16）只有10个，可见UFT与爱因斯坦-麦克斯韦理论一样是4度不确定的。而且，对于四次型矢量的定义（2.15）似乎显得有些任意，但它却是齐次麦克斯韦方程必需的。式（2.15）也许可用某些（至今还不知道的）物理学原理来证实，不过这里也可导出该理论若干有趣的结果。由式（2.4）和（2.6）给出的关系

$$\nabla_\rho S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho}/2=\kappa T_{[\lambda\mu]} \tag{4.1}$$

不再是用来确定未知数的场方程，而只是给出了挠率$\underset{\sim}{S}$，即本征自旋角动量张量的物理意义，式（2.8）中的余矢量A_α是"自旋角动量矢量"。方程（2.11）和（2.12）表明，电磁场矢势QA_α可以理解为"旋转电荷"。从经典来看，电磁矢势只是一种数学符号，不具有任何物理意义；不过，Aharonov-Bohm的实验指出，QA_μ有确定的物理意义，仅管至今还没有弄清它的意义究竟是什么。而本文的UFT则提出了一种可能的物理解释。

此外，(2.15)还可写为

$$J^\rho=\mathring{\nabla}_\sigma H^{\rho\sigma} \tag{4.2}$$

其中

$$H^{\rho\sigma}=Q\kappa g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\mathscr{E}_{\lambda\mu\alpha\beta}T^{[\lambda\mu]} \tag{4.3}$$

是反对称的物理张量。因此，要试图把上述物理解释扩广到"势"(A_α, $H^{\rho\sigma}$)，正如Weyl指出的一样[3]，方程 (2.11)，(2.12)和(4.2) 构成了Mie电磁理论的基本方程。Eddington方法自然地使 Einstein-Mie 理论几何化。而且，这个方法使反对称势($a_{\alpha\beta}$)变得不再是必要的了。

如果不用 Eddington 不变量(1.1)，我们把

$$\underset{\sim}{P}=P_{\alpha\beta}dx^\alpha\otimes dx^\beta \tag{4.4}$$

当作基本"势张量"，可以看出，它分别对应于两个二次型

$$dS^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{4.5}$$

和

$$\Omega=\frac{1}{2!}a_{\alpha\beta}dx^\alpha\wedge dx^\beta \tag{4.6}$$

的直和。这里

$$g_{\alpha\beta}=P_{(\alpha\beta)} \tag{4.7}$$

和

$$a_{\alpha\beta}=P_{[\alpha\beta]} \tag{4.8}$$

因此，我们可自然得到$SU(2)$几何学和文(Ⅰ)中所提出的方法。式 (4.5) 对应于"距离的度量"，而 (4.6) 对应于"面积度量"，可见，基本张量 (4.4) 完全与相邻的两个时空点有关。而且，这样的基本张量构成了 Einstein 和 Strauss 场论[4]以及 Eistein 场论[5]的几何基础，有关的工作将在第Ⅲ部份$SU(2)$统一场理论中讨论。

参 考 文 献

[1] Eddington, A. S., *Proc. Roy. Soc.*, A99 (1931), 104.

[2] Eddington, A. S., *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press (1957).

[3] Weyl, H., *Space-Time-Matter*, Dover (1950).

[4] Einstein, A. and Strauss, *J. Math.*, 47 (1946), 731.

[5] Einstein, A., *The Meaning of Relativity*, fifth edition, Princeton University Press (1956).

A Theory of Classical Spacetime, Part Ⅱ: Eddington's Identification

Yu Xin

(Peking Astronomical Observatory, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

Based on the $SU(2)$-structure, the identification procedures of Eddington and Weyl are followed in order to see what logical conclusions these two schemes lead to.