

具有间隙动力系统的自激振动

李 骊 任保经

(天津大学) (河南师范大学)

(1987年6月10日收到)

摘 要

本文应用微分方程的定性方法, 给出具有间隙动力系统产生自激振动的一个充分条件。

一、前 言

在工程中, 有不少工作部件, 除受弹性恢复力以及摩擦阻力外, 在连接或支承处还不可避免地出现间隙。当这些间隙很小时, 略去不计是可以的, 但当间隙较大时, 实践证明, 它将是部件在运转过程中产生自激振动的一个重要因素, 而且这种自激振动有时相当强烈, 以致造成部件的损坏。例如, 轧钢厂轧钢机的轧辊就经常会出现这种情况。在此情况下, 间隙就不能再略去不计而必需加以考虑。这种将间隙考虑在内的动力系统, 我们称为具有间隙的动力系统。如上所述, 对于这种具有间隙动力系统自激振动的研究, 有着重要的实际意义。

工程中具有间隙动力系统的一般方程为

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) + f(y) \quad (1.1)$$

其中 $g(x)$ 和 $f(y)$ 分别是 x 和 y 的连续奇函数 (这是工程中动力系统的一般特点)。 $g(x)$ 的具体表达式为

$$g(x) = \begin{cases} g(x-e) & (x > e) \\ 0 & (|x| \leq e) \\ g(x+e) & (x < -e) \end{cases} \quad (1.2)$$

这里 x 表位移, y 表速度, $e > 0$ 表间隙宽度。若 $g(x)$ 和 $f(y)$ 满足 Lipschitz 条件, 则方程(1.1)的解存在、唯一。

这里要指出(1.1)不像一般的 Lienard 方程那样由单一的方程组成^[1,2], (1.1)实际上是由三组不同的方程 (分别对应于 $x < -e$, $|x| \leq e$ 与 $x > e$) 组成, 这是具有间隙动力系统的一个基本特点。此外它的平衡位置不是一个孤立的点(0,0), 对于(1.1)而言, 在线段 $|x| \leq e$, $y=0$ 上处处是奇点。因此, (1.1)实质上是一种特殊的方程, 所以, 对它的极限环问题也就需要另作研究。

本文给出动力系统(1.1)产生自激振动的一个充分条件, 而且这种自激振动是唯一的。就数学上来说, 即(1.1)存在唯一稳定的极限环。

定理 若 $g(x)$ 和 $f(y)$ 满足下列条件:

1° $f(y)$ 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续奇函数; $f'(y)$ 存在; $f(0)=0$; $f'(0)=a>0$; 方程 $f(y)=0$ 有唯一的正实根 a ; 当 $y>a$ 时, $f'(y)<0$; $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y)=-\infty$. 至于 $f(y)$ 在轴 $y<0$ 部分的性质, 可由 $f(y)$ 是奇函数而推得.

2° $g(x)$ 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续奇函数; 当 $|x|>e$ 时, $g'(x)>0$.

3° 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ ($\delta=\delta(M, \varepsilon)$), 当 $x\geq e+\delta$ 时, 有 $g(x-e)>M+\varepsilon$. 这里 $M=\max_{0<y<a} f(y)>0$.

则方程(1.1)有唯一稳定的极限环.

下面我们将利用Poincaré-Bendixson 环域定理证明方程(1.1)存在稳定的极限环, 然后再利用可微分函数的线积分证明极限环唯一. 为此, 我们先研究弹性势能 $G(x)$.

1. 当 $x\geq e$ 时, 令

$$G(x-e) = \int_e^x g(x-e) dx$$

则当 $x=e$ 时有 $G(0)=0$, 并且当 $x>e$ 时有 $G(x-e)>0$; 此外, 由条件3°知, 当 $x\geq e+\delta$ 时,

$$\int_{e+\delta}^x g(x-e) dx > \int_{e+\delta}^x (M+\varepsilon) dx = (M+\varepsilon)(x-e-\delta)$$

$$G(x-e) = \int_e^{e+\delta} g(x-e) dx + \int_{e+\delta}^x g(x-e) dx = G(\delta) + \int_{e+\delta}^x g(x-e) dx$$

所以当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $G(x-e) \rightarrow +\infty$.

2. 当 $x \leq -e$ 时, 令

$$G(x+e) = \int_{-e}^x g(x+e) dx$$

同样有 $x=-e$ 时 $G(0)=0$; $x<-e$ 时 $G(x+e)>0$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $G(x+e) \rightarrow +\infty$.

二、存 在 性

(i) 环域的内境界线由下列线段组成(图1):

1. 直线段 l_1 : $y=K$ ($0<K<a$, $|x|\leq e$)

由于在 l_1 上各点处 $dy/dt|_{(1.1)}=f(y)>0$, 所以轨线 l_1 的走向是由里向外的.

2. 曲线段 l_2 : $G(x-e)+y^2/2=K^2/2$ ($x\geq e$)

3. 直线段 l_3 : $y=-K$ ($|x|\leq e$)

由于在 l_3 上各点处 $dy/dt|_{(1.1)}=f(y)<0$, 所以轨线 l_3 的走向是由里向外的.

4. 曲线段 l_4 : $G(x+e)+y^2/2=K^2/2$ ($x\leq -e$)

由于 $dl_2/dt|_{(1.1)}=dl_4/dt|_{(1.1)}=yf(y)\geq 0$ (等号仅在 $y=0$ 处成立), 所以在 l_2 和 l_4 上各点处轨线的走向是由里向外的.

设区域 R 是由下列线段所围成: $y=\pm a$ ($|x|\leq e$); $G(x-e)+y^2/2=a^2/2$ ($x\geq e$); $G(x+e)+y^2/2=a^2/2$ ($x\leq -e$). 则方程(1.1)的极限环应位于 R 的外边.

(ii) 环域的外境界线由下列线段组成(图1):

1. 在直线 $x=e+\delta$ 上取点 $A(x_A=e+\delta, y_A>0$ 充分大).

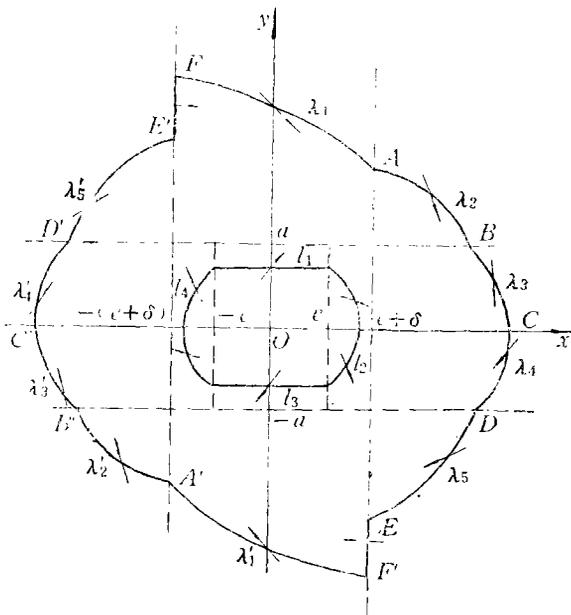


图 1

过点A作曲线段 $\lambda_1 = \widehat{FA}$:

$$cx + \frac{1}{2}y^2 = c(c+\delta) + \frac{1}{2}y_A^2 \quad (|x| \leq e+\delta, y > 0) \quad (2.1)$$

这里
$$c > \frac{1}{2} \frac{b}{e+\delta}, \quad b = \frac{a^2}{4} + \frac{(M+\varepsilon/2)a^2}{\varepsilon} \quad (2.2)$$

由于 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(\lambda_1)} = -\frac{c}{y} < 0$

所以在 λ_1 上有 $y \geq y_A$. (1.1) 轨线的斜率为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1.1)} = \frac{-g(x) + f(y)}{y}$$

由(1.2)及条件2°可知, 对于 λ_1 上各点, 有 $|g(x)| \leq g(\delta)$. 又因 $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = -\infty$, 所以当 y_A 充分大时有

$$-g(x) + f(y) < -c$$

成立, 从而在 λ_1 上各点处有

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1.1)} < \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(\lambda_1)} < 0$$

此外, $dx/dt|_{(1.1)} = y > 0$, 所以在 λ_1 上各点处(1.1)的轨线是由外向里的.

设 λ_1 与直线 $x = -(e+\delta)$ 的交点为 F, 则有

$$y_F^2/2 = 2c(e+\delta) + y_A^2/2 > b + y_A^2/2 \quad (2.3)$$

2. 过点A作曲线段 $\lambda_2 = \widehat{AB}$:

$$G(x-e) + y^2/2 = G(\delta) + y_A^2/2 \quad (x \geq e+\delta, y \geq a) \quad (2.4)$$

由于 $d\lambda_2/dt|_{(1.1)} = yf(y) \leq 0$ (等号仅在 $y=a$ 处成立), 所以在 λ_2 上各点处轨线的走向是

由外向里的.

设 λ_2 与直线 $y=a$ 的交点为 B , 则有

$$G(x_B - e) + a^2/2 = G(\delta) + y_B^2/2 \quad (2.5)$$

3. 过点 B 作曲线段 $\lambda_3 = \widehat{BC}$:

$$G(x - e) - \left(M + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x - e - \delta) + \frac{1}{2}y^2 = G(x_B - e) - \left(M + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_B - e - \delta) + \frac{1}{2}a^2 \quad (0 \leq y \leq a) \quad (2.6)$$

由条件3°可知, 当 $x \geq e + \delta$ 时, 有

$$G(x - e) - \left(M + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x - e - \delta) > \frac{\varepsilon}{2}(x - e - \delta)$$

所以当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $G(x - e) - (M + \varepsilon/2)(x - e - \delta) \rightarrow +\infty$.

由于 $d\lambda_3/dt|_{(1,1)} = y[-M - \varepsilon/2 + f(y)] \leq 0$ (等号仅在 $y=0$ 处成立), 所以在 λ_3 上各点处轨线的走向是由外向里的.

设 λ_3 与直线 $y=0$ 的交点为 C , 则有

$$G(x_C - e) - \left(M + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_C - e - \delta) = G(x_B - e) - \left(M + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_B - e - \delta) + \frac{1}{2}a^2 \quad (2.7)$$

因为曲线 λ_3 的斜率为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(\lambda_3)} = \frac{M + (\varepsilon/2) - g(x - e)}{y}$$

由条件3°可知, 当 $0 < y < a$ 时有 $dy/dx|_{(\lambda_3)} < 0$, 所以 $x_B < x_C$.

4. 过点 C 作曲线段 $\lambda_4 = \widehat{CD}$:

$$G(x - e) + (M + \varepsilon)(x - e - \delta) + y^2/2 = G(x_C - e) + (M + \varepsilon)(x_C - e - \delta) \quad (-a \leq y \leq 0) \quad (2.8)$$

由于 $d\lambda_4/dt|_{(1,1)} = y[M + \varepsilon + f(y)]$, 由条件1°可知, $\min_{-a < y < 0} f(y) = -M$, 同时沿 λ_4 有 $y < 0$, 故得 $d\lambda_4/dt|_{(1,1)} \leq 0$ (等号仅在 $y=0$ 处成立), 所以在 λ_4 上各点处轨线的走向是由外向里的.

设 λ_4 与直线 $y=-a$ 的交点为 D , 则有

$$G(x_D - e) + (M + \varepsilon)(x_D - e - \delta) + a^2/2 = G(x_C - e) + (M + \varepsilon)(x_C - e - \delta) \quad (2.9)$$

因为曲线 λ_4 的斜率为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(\lambda_4)} = - \frac{M + \varepsilon + g(x - e)}{y}$$

当 $-a < y < 0$ 时 $dy/dx|_{(\lambda_4)} > 0$, 所以 $x_D < x_C$.

5. 过点 D 作曲线段 $\lambda_5 = \widehat{DE}$:

$$G(x - e) + y^2/2 = G(x_D - e) + a^2/2 \quad (x \geq e + \delta, y \leq -a) \quad (2.10)$$

由于 $d\lambda_5/dt|_{(1,1)} = yf(y) \leq 0$ (等号仅在 $y=-a$ 处成立), 所以在 λ_5 上各点处轨线的走向是由外向里的.

设 λ_5 与直线 $x=e+\delta$ 的交点为 E , 则有

$$y_E^2/2 = a^2/2 - G(\delta) + G(x_D - e) \quad (2.11)$$

由(2.7)式 $G(x_C - e) - G(x_B - e) = (M + \varepsilon/2)(x_C - x_B) + a^2/2$, 又因为 $G(x_C - e) - G(x_B - e) > (M + \varepsilon)(x_C - x_B)$, 所以

$$(M + \varepsilon)(x_C - x_B) < (M + \varepsilon/2)(x_C - x_B) + a^2/2$$

亦即 $\frac{e}{2}(x_C - x_B) < \frac{1}{2}a^2$

故 $0 < x_C - x_B < a^2/\varepsilon$ (2.12)

由(2.9)式 $G(x_C - e) - G(x_D - e) + (M + \varepsilon)(x_C - x_D) = a^2/2$ 又因为

$$G(x_C - e) - G(x_D - e) > (M + \varepsilon)(x_C - x_D), \text{ 所以}$$

$$2(M + \varepsilon)(x_C - x_D) < a^2/2$$

故 $0 < x_C - x_D < a^2/4(M + \varepsilon)$ (2.13)

由(2.11), (2.9), (2.7), (2.5)和(2.2)可以推出

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y_B^2 &= \frac{1}{2}y_A^2 + (M + \varepsilon)(x_C - x_D) + \left(M + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_C - x_B) \\ &< \frac{1}{2}y_A^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{(M + \varepsilon/2)a^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2}y_A^2 + b \end{aligned} \quad (2.14)$$

结合(2.3)和(2.14)得到

$$|y_B| < y_A \quad (2.15)$$

6. 在直线 $x = e + \delta$ 上取点 F' , 使 $y_{F'} = -y_F$, 则点 F' 位于点 E 的下方. 由于在线段 EF' 上有 $dx/dt|_{(1.1)} = y < 0$, 所以在 EF' 上各点处轨线的走向是自右向左的穿过 EF' .

这样, 我们就构造出外境界线的一半 $\widehat{F'ABCDEF'}$. 由于(1.1)的方向场是对原点对称的, 所以外境界线的另一半 $\widehat{F'A'B'C'D'E'F}$ 可由 $\widehat{F'ABCDEF'}$ 向原点作对称映射而得到.

由于环域内无方程(1.1)的奇点, 由Poincaré-Bendixson 环域定理可知在环域内至少有方程(1.1)的一个稳定极限环.

三、唯一性

由存在性的证明, 我们知道在环域内至少有一个稳定的极限环, 因此只需要再证明在环域内只有一个极限环就行了. 假如在环域内有两个极限环 Γ_1 和 Γ_2 , 且 $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ (如图 2 所示), 我们要证明这是不可能的.

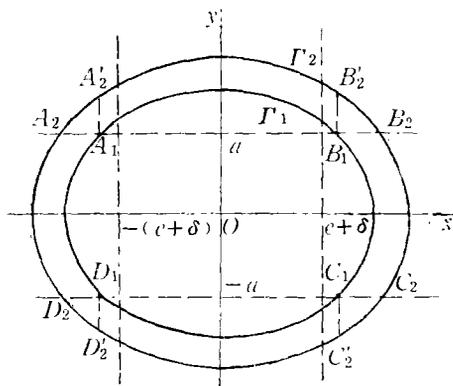


图 2

图中线段 $A_1A_2' \parallel B_1B_2' \parallel C_1C_2' \parallel D_1D_2' \parallel Oy$.

引入定正可微分函数:

$$\lambda(x, y) = G(x) + y^2/2 \quad (3.1)$$

其中

$$G(x) = \begin{cases} G(x-e) & (x > e) \\ 0 & (|x| \leq e) \\ G(x+e) & (x < -e) \end{cases} \quad (3.2)$$

由于 $\lambda(x, y)$ 在 Γ_1 和 Γ_2 所围成的环域内无奇点, 故由Green公式可得

$$\oint_{\Gamma_1} d\lambda = \oint_{\Gamma_2} d\lambda \quad (3.3)$$

下面我们来具体地计算 $\oint_{\Gamma_1} d\lambda$ 和 $\oint_{\Gamma_2} d\lambda$.

由于方程(1.1)的方向场是对原点对称的, 所以 Γ_1 和 Γ_2 也是对原点对称的, 同时 $\lambda(x, y)$

也是对原点对称的, 故有

$$\oint_{\Gamma_1} d\lambda = 2 \left[\int_{A_1 B_1} d\lambda + \int_{B_1 C_1} d\lambda \right]$$

$$\oint_{\Gamma_2} d\lambda = 2 \left[\int_{A_2 A'_2} d\lambda + \int_{A'_2 B'_2} d\lambda + \int_{B'_2 B_2} d\lambda + \int_{B_2 C_2} d\lambda \right]$$

此外沿 Γ_1 与 Γ_2 有

$$\begin{aligned} d\lambda &= \frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= yf(y)dt = \begin{cases} f(y)dx \\ -\frac{yf(y)}{-g(x)+f(y)} dy \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

1. 在 $\widehat{A_2 A'_2}$ 和 $\widehat{B'_2 B_2}$ 上, $f(y) \leq 0$ (等号仅在 A_2 和 B_2 处成立), 并且 $dx > 0$, 所以

$$\int_{A_2 A'_2} d\lambda = \int_{A_2 A'_2} f(y) dx < 0, \quad \int_{B'_2 B_2} d\lambda = \int_{B'_2 B_2} f(y) dx < 0 \quad (3.5)$$

2. 比较 $\int_{A_1 B_1} d\lambda$ 和 $\int_{A'_2 B'_2} d\lambda$

设点 $P_1 \in \widehat{A_1 B_1}$, 点 $P_2 \in \widehat{A'_2 B'_2}$, 且 $x_{P_1} = x_{P_2}$, 则有 $y_{P_2} > y_{P_1} \geq a$ (等号仅在 A_1 和 B_1 处成立), 因为当 $y \geq a$ 时, $f'(y) < 0$, 故 $f(y_{P_1}) > f(y_{P_2})$, 由此知

$$\int_{A_1 B_1} d\lambda = \int_{A_1 B_1} f(y) dx > \int_{A'_2 B'_2} f(y) dx = \int_{A'_2 B'_2} d\lambda \quad (3.6)$$

3. 比较 $\int_{B_1 C_1} d\lambda$ 和 $\int_{B_2 C_2} d\lambda$

前已指出, 沿 $\widehat{B_1 C_1}$ 与 $\widehat{B_2 C_2}$ 有 (参看(3.4))

$$d\lambda = \frac{yf(y)}{-g(x)+f(y)} dy$$

设点 $P_1 \in \widehat{B_1 C_1}$, 点 $P_2 \in \widehat{B_2 C_2}$, 且 $y_{P_1} = y_{P_2}$, 则有 $x_{P_1} < x_{P_2}$, 由条件2°知, 当 $x > e$ 时, $g'(x-e) > 0$, 所以 $g(x_{P_1}) < g(x_{P_2})$, 从而

$$[-g(x)+f(y)]_{(x=x_{P_1}, y=y_{P_1})}^{-1} < [-g(x)+f(y)]_{(x=x_{P_2}, y=y_{P_2})}^{-1} \quad (3.7)$$

又因沿 $\widehat{B_1 C_1}$ 与 $\widehat{B_2 C_2}$ 有 $|y| \leq a$, 故 $yf(y) \geq 0$ (等号仅在 $y=0$ 与 $|y|=a$ 处成立), 同时 $dy < 0$, 所以

$$\int_{B_1 C_1} d\lambda = \int_{B_1 C_1} \frac{yf(y)}{-g(x)+f(y)} dy > \int_{B_2 C_2} \frac{yf(y)}{-g(x)+f(y)} dy = \int_{B_2 C_2} d\lambda \quad (3.8)$$

由不等式(3.5)、(3.6)和(3.8)知

$$\oint_{\Gamma_1} d\lambda > \oint_{\Gamma_2} d\lambda \quad (3.9)$$

如此, 我们得到了与等式(3.3)相矛盾的结论. 这一矛盾表明在环域内不存在两个不同的极限环, 亦即方程(1.1)有唯一的极限环, 从而它也是稳定的. 定理证毕.

$$\text{例1} \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) + \alpha y - \beta y^3 \quad (3.10)$$

这里

$$g(x) = \begin{cases} \omega^2(x-e) & (x > e) \\ 0 & (|x| \leq e) \quad (e > 0) \\ \omega^2(x+e) & (x < -e) \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 则存在唯一稳定的极限环。

$$\text{例2} \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) + f(y) \quad (3.11)$$

这里

$$g(x) = \begin{cases} \omega^2(x-e) + b(x-e)^3 & (x > e) \\ 0 & (|x| \leq e) \quad (e > 0) \\ \omega^2(x+e) + b(x+e)^3 & (x < -e) \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} \alpha y - \beta y^2 & (y > 0) \\ 0 & (y = 0) \\ \alpha y + \beta y^2 & (y < 0) \end{cases}$$

并且 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b > 0$, 则存在唯一稳定的极限环。

$$\text{例3} \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) + f(y) \quad (3.12)$$

这里

$$g(x) = \begin{cases} \omega^2(x-e) \left[1 - \frac{1}{1+(x-e)^2} \right] & (x > e) \\ 0 & (|x| \leq e) \quad (e > 0) \\ \omega^2(x+e) \left[1 - \frac{1}{1+(x+e)^2} \right] & (x < -e) \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} y(\alpha - \beta y^{\frac{1}{3}}) & (y > 0) \\ 0 & (y = 0) \\ y(\alpha + \beta y^{\frac{1}{3}}) & (y < 0) \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$. 可以验证 $g(x)$ 与 $f(y)$ 满足定理的条件 1° , 2° , 3° , 所以方程 (3.12) 存在唯一稳定的极限环。

若将定理条件 1° 中的 $f'(0) = \alpha > 0$ 改为 $f'(0) = \alpha \geq 0$, 定理的结论仍成立, 这时定理的适用范围可扩大一些。

$$\text{例4} \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) + \alpha y^{5/3} - \beta y^{7/3} \quad (3.13)$$

这里

$$g(x) = \begin{cases} \omega^2(x-e) + b(x-e)^3 & (x > e) \\ 0 & (|x| \leq e) \quad (e > 0) \\ \omega^2(x+e) + b(x+e)^3 & (x < -e) \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b > 0$. 则方程 (3.13) 存在唯一稳定的极限环。

参 考 文 献

- [1] 张芷芬等, 《微分方程定性理论》, 科学出版社 (1985).
 [2] Sansone, G. and R. Conti, *Nonlinear Differential Equations*, Pergamon Press (1964),
 黄敏昌等译: 《非线性微分方程》, 科学出版社 (1983).

On Self-Excited Oscillation of Dynamic Systems with Gap

Li Li

(Tianjin University, Tianjin)

Ren Bao-jing

(Henan Normal University, Xinxiang, Henan)

Abstract

In this paper, the sufficient condition for self-excited oscillation of dynamic systems with gap is given by using qualitative method of differential equations.