应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的一类具高稳定性的三层显式格式*

林 鹏 程

(福州大学计算机科学系，1987年6月3日收到)

摘 要

本文对色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 提出一类三层显式格式，它的稳定性条件为 $|r| = |a|\Delta t/(\Delta x)^3 \leqslant 2.382484$，比[1，2]中的 $|r| \leqslant 0.3849$ 和[3]中的 $|r| \leqslant 0.701659$ 以及[4]中的 $|r| \leqslant 1.1851$ 有较大改进。

一、引 言

近年来，由于孤立波的产生，人们对色散方程 $u_t = au_{xxx}$（a 为常数，可正可负）的差分解法产生了浓厚的兴趣。在显式格式中稳定性条件较强，在[1]、[2]中最好的稳定性条件为 $|r| = |a|\Delta t/(\Delta x)^3 \leqslant 0.3849$。最近，[3]和[4]的作者分别提出不同的三层显式格式，其稳定性条件为 $|r| \leqslant 0.701659$ 和 $|r| \leqslant 1.1851$，均优于[1,2]的结果。本文我们提出一类三层显式格式，其稳定性条件为 $|r| \leqslant 2.382484$，明显优于[1]～[4]的结果。

二、差分格式的构造

把求解区域用两族平行于坐标轴且等距的直线组成均匀网格。设 h，τ 分别表示空间方向和时间方向的步长，网域由求解区域上的点集 (x_m, t_n) 构成，这里 $x_m = x_0 + mh, t_n = t_0 + n\tau$，$m, n$ 为整数。在结点 (x_m, t_n) 处，用 u_m^n 和 V_m^n 分别表示微分方程和差分方程在 (x_m, t_n) 处的解。

首先，类似于在一阶微分方程中引进具有小参数、对应于粘性的二阶导数，我们在色散方程中加进具有小参数 $\varepsilon > 0$ 的人工粘性项 εu_{xxxx}，则得方程

$$u_t = au_{xxx} + \varepsilon u_{xxxxx} \tag{2.1}$$

然后将下列数值微分公式代入上式

* 林宗池推荐。

$$\left.\begin{aligned}
&(u_t)_m^n=\frac{1}{2}[(u_t)_{m-1}^n+(u_t)_{m+1}^n]+O(h^2)\\
&(u_t)_{m-1}^n=\frac{1}{\tau}\ (u_{m-1}^n-u_{m-1}^{n-1})+O(\tau)\\
&(u_t)_{m+1}^n=\frac{1}{\tau}(u_{m+1}^{n+1}-u_{m+1}^n)+O(\tau)\\
&(u_{xxx})_m^n=\frac{1}{2h^3}\ (u_{m+2}^n-2u_{m+1}^n+2u_{m-1}^n-u_{m-2}^n)+O(h^2)\\
&(u_{xxxxx})_m^n=\frac{1}{2h^5}(u_{m+3}^n-4u_{m+2}^n+5u_{m+1}^n-5u_{m-1}^n+4u_{m-2}^n-u_{m-3}^n)+O(h^2)
\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

则得

$$u_{m+1}^{n+1}=u_{m+1}^n-u_{m-1}^n+u_{m-1}^{n-1}+r\,(u_{m+2}^n-2u_{m+1}^n+2u_{m-1}^n-u_{m-2}^n)$$

$$+\frac{\varepsilon\tau}{h^5}(u_{m+3}^n-4u_{m+2}^n+5u_{m+1}^n-5u_{m-1}^n+4u_{m-2}^n-u_{m-3}^n)+O(\tau+h^2)\tag{2.3}$$

其中$r=a\tau/h^3$．在上式中令$\varepsilon=rah^2/8$且舍去截断误差，则得本文的第一个差分格式

$$V_{m+1}^{n+1}=V_{m+1}^n-V_{m-1}^n+V_{m-1}^{n-1}+r(V_{m+2}^n-2V_{m+1}^n+2V_{m-1}^n-V_{m-2}^n)+\frac{r^2}{8}(V_{m+3}^n$$

$$-4V_{m+2}^n+5V_{m+1}^n-5V_{m-1}^n+4V_{m-2}^n-V_{m-3}^n)\tag{2.4}$$

或改写为形式

$$V_m^{n+1}=V_m^n-V_{m-2}^n+V_{m-2}^{n-1}+r\,(V_{m+1}^n-2V_m^n+2V_{m-2}^n-V_{m-3}^n)+\frac{r^2}{8}(V_{m+2}^n$$

$$-4V_{m+1}^n+5V_m^n-5V_{m-2}^n+4V_{m-3}^n-V_{m-4}^n)\tag{2.4$'$}$$

如果在导出差分格式(2.4)的过程中，将(2.2)中的$(u_t)_{m-1}^n$, $(u_t)_{m+1}^n$用下列公式代替：

$$(u_t)_{m-1}^n=\frac{1}{\tau}(u_{m-1}^{n+1}-u_{m-1}^n)+O(\tau)$$

$$(u_t)_{m+1}^n=\frac{1}{\tau}\ (u_{m+1}^n-u_{m+1}^{n-1})+O(\tau)$$

且取$\varepsilon=-rah^2/8$，略去截断误差后，则得本文的第二个差分格式

$$V_{m-1}^{n+1}=V_{m-1}^n-V_{m+1}^n+V_{m+1}^{n-1}+r(V_{m+2}^n-2V_{m+1}^n+2V_{m-1}^n-V_{m-2}^n)-\frac{r^2}{8}(V_{m+3}^n$$

$$-4V_{m+2}^n+5V_{m+1}^n-5V_{m-1}^n+4V_{m-2}^n-V_{m-3}^n)\tag{2.5}$$

或改写为形式

$$V_m^{n+1}=V_m^n-V_{m+2}^n+V_{m+2}^{n-1}+r(V_{m+3}^n-2V_{m+2}^n+2V_m^n-V_{m-1}^n)$$

$$-\frac{r^2}{8}(V_{m+4}^n-4V_{m+3}^n+5V_{m+2}^n-5V_m^n+4V_{m-1}^n-V_{m-2}^n)\tag{2.5$'$}$$

三、差分格式的稳定性

为分析差分格式的稳定性，先叙述如下的Miller准则[5]：

设$f(\lambda)$为复平面上的n次多项式

$$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n \qquad (a_0a_n\neq 0)$$

定义多项式

$$f^*(\lambda)=\lambda^n\bar{f}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\bar{a}_n+\bar{a}_{n-1}\lambda+\cdots+\bar{a}_1\lambda^{n-1}+\bar{a}_0\lambda^n$$

和降幂多项式

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}[f^*(0)f(\lambda)-f(0)f^*(\lambda)]$$

其中$\bar{a}_i$表示$a_i(i=0,1,\cdots,n)$的共轭复数。

Miller准则 多项式$f(\lambda)$的所有根按模小于或等于1的充要条件为

(A) $|f^*(0)|>|f(0)|$且$\hat{f}(\lambda)=0$只有按模小于等于1的根；

或

(B) $\hat{f}(\lambda)\equiv 0$且$f'(\lambda)=0$所有根按模小于或等于1。

用Fourier方法[6]分析差分格式(2.4)或(2.4)′的稳定性。

令$V_m^n=\lambda^n\exp[im\theta]$, $\qquad (|\theta|<\pi,\ i^2=-1)$ (3.1)

将其代入(2.4)式，化简后得到特征多项式为

$$\lambda^2\exp[i\theta]=2\sin\theta\left(1-4r\sin^2\frac{\theta}{2}+2r^2\sin^4\frac{\theta}{2}\right)i\lambda+\exp[-i\theta] \tag{3.2}$$

记 $$f(\lambda)=\lambda^2\exp[i\theta]-2\sin\theta\left(1-4r\sin^2\frac{\theta}{2}+2r^2\sin^4\frac{\theta}{2}\right)i\lambda-\exp[-i\theta] \tag{3.3}$$

熟知，差分格式(2.4)稳定的条件为它的特征方程

$$f(\lambda)=0 \tag{3.4}$$

的全部根按模小于或等于1，且模为1的根为单根，由前述定义

$$f^*(\lambda)=-\lambda^2\exp[i\theta]+2i\sin\theta\left(1-4r\sin^2\frac{\theta}{2}+2r^2\sin^4\frac{\theta}{2}\right)\lambda+\exp[-i\theta] \tag{3.5}$$

由于

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}[f(0)f^*(\lambda)-f(\lambda)f^*(0)]\equiv 0$$

于是，由Miller准则知，只要考察

$$f'(\lambda)=2\lambda\exp[i\theta]-2i\sin\theta\left(1-4r\sin^2\frac{\theta}{2}+2r^2\sin^4\frac{\theta}{2}\right)=0 \tag{3.6}$$

的根

$$\lambda=i\sin\theta\left(1-4r\sin^2\frac{\theta}{2}+2r^2\sin^4\frac{\theta}{2}\right)\exp[-i\theta] \tag{3.7}$$

按模小于等于1的条件。

由$|\lambda|\leqslant 1$得

$$-1\leqslant\sin\theta\left(1-4r\sin^2\frac{\theta}{2}+2r^2\sin^4\frac{\theta}{2}\right)\leqslant 1 \tag{3.8}$$

不难看出，1不是特征方程(3.4)的重根。当$\sin\theta=0$时，(3.8)恒成立。今设$\sin\theta\neq 0$，当$a>0$时有$r>0$。

当$\sin\theta>0$时，(3.8)的左边不等式为

$$2r^2\sin^4\frac{\theta}{2}-4r\sin^2\frac{\theta}{2}+1+\frac{1}{\sin\theta}=2\left(r\sin^2\frac{\theta}{2}-1\right)^2+\frac{1}{\sin\theta}-1\geqslant 0 \tag{3.9}$$

此式对任何r均成立。

(3.8)的右边不等式为

$$2r^2\sin^4\frac{\theta}{2}-4r\sin^2\frac{\theta}{2}+1-\frac{1}{\sin\theta}\leqslant 0$$

导出

$$r\leqslant\frac{2+\sqrt{2\left(1+\dfrac{1}{\sin\theta}\right)}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}},\ \sin\theta>0 \tag{3.10}$$

同理可得，当$\sin\theta<0$时

$$r\leqslant\frac{2+\sqrt{2\left(1-\dfrac{1}{\sin\theta}\right)}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}} \tag{3.11}$$

注意到三角函数的周期性，上面两个不等式对r的限制完全一致。在$a<0$时有$r<0$，当$\theta\sim\frac{\pi}{2}$时(3.8)恒不成立。

综上所述，差分格式(2.4)或(2.4)′的稳定性条件为

$$r\leqslant\frac{2+\sqrt{2\left(1+\dfrac{1}{\sin\theta}\right)}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\qquad(a>0,\ 0<\theta<\pi) \tag{3.12}$$

当$a<0$时，差分格式(2.4)或(2.4)′绝对不稳定。

下面我们来求(3.12)右端函数的下确界。

令

$$F(x)=\frac{2+\sqrt{2\left(1+\dfrac{1}{\sin x}\right)}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}} \tag{3.13}$$

先求出$F'(x)=0$在$(0,\pi)$的全部根以求出$F(x)$的极值点。记

$$F'(x)=\frac{G(x)}{4\sin^4\dfrac{x}{2}\sqrt{2\left(1+\dfrac{1}{\sin x}\right)}}$$

则

$$G(x)=-\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{ctg}x+2\sin x+2\sin x\sqrt{2\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)}+2\right]$$

于是，由$F'(x)=0$就推出

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{ctg}x+2\sin x+2\sin x\sqrt{2\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)}+2=0 \tag{3.14}$$

用二分法求出方程(3.14)的近似根为

$$x_1=148.0533 \tag{3.15}$$

代入(3.13)式求得

$$F(x_1)=2.382484 \tag{3.16}$$

类似于[3]的讨论，可以证明(3.16)中的$F(x_1)$为$F(x)$的近似下确界，故得格式(2.4)或(2.4)′的稳定性条件为

当$a>0$，$|r|\leqslant 2.382484$；

当$a<0$，绝对不稳定。

类似地，格式(2.5)或(2.5)′的稳定性条件为

当$a>0$，绝对不稳定；

当$a<0$，$|r|\leqslant 2.382484$。

格式(2.4)和(2.5)的稳定性条件比[1]～[4]中格式的最好条件有较大的提高。

四、数 值 例 子

考虑色散方程的初值问题[3]

$$\begin{cases} u_t=au_{xxx} \\ u(x,0)=2x^3+4 \end{cases} \tag{4.1}$$

精确解为

$$u(x,t)=12at+2x^3+4 \tag{4.2}$$

为了验证差分格式 (2.4)或 (2.5) 的稳定性条件 (3.17)。我们在IBM4361机上进行计算，定义误差

$$T_m^n=U_m^n-V_m^n$$

其中$U_m^n=u(x_m,t_n)$为用(4.2)式算出的精确解，V_m^n为用差分格式(2.4)′或 (2.5)′ 算出的差

表1 格式(2.4)：$a=1$, $h=0.01$, $r=2.38$

m \ n	1	551
3100	0.02533	0.04488
3300	0.04797	0.00529
3500	0.01971	0.07962
3700	0.04053	0.05585
3900	0.00372	0.04782

表2 格式(2.4)：$a=1$, $h=0.01$, $r=2.39$

m \ n	1	151
3100	0.02672	2.40886×10^9
3300	0.04649	3.39911×10^7
3500	0.01736	5.07093×10^9
3700	0.04276	2.69866×10^9
3900	0.00187	3.46430×10^9

表3 格式(2.5)：$a=-1$, $h=0.01$, $-r=2.38$

m \ n	1	851
1100	0.00084	0.00798
1300	0.00100	0.01197
1500	0.00177	0.01124
1700	0.02705	0.11243
1900	0.02952	0.01402

表4 格式(2.5)：$a=-1$, $h=0.01$, $-r=2.39$

m \ n	1	151
1100	0.00083	2.74766×10^8
1300	0.00097	1.81496×10^8
1500	0.00182	1.07277×10^9
1700	0.02665	3.88102×10^8
1900	0.02882	3.47318×10^9

分解，表1～4列出按差分格式(2.4)′或(2.5)′计算的部分误差数据，由表1和表3说明，当$|r|=2.38$时计算过程为稳定的，当$|r|=2.39$时计算过程不稳定，这跟理论分析相吻合。

参 考 文 献

[1] Zabusky, N. J. and M. Kruskal, Interaction of "Solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Letters*, 15 (1965), 240—243.

[2] 秦孟兆，色散方程$u_t=au_{xxx}$的差分格式，计算数学，6,1 (1984). 1—13.

[3] 黎益、李北杰，关于色散方程$u_t=au_{xxx}$的两个显式差分格式，计算数学，8,3 (1986), 275—280.

[4] 邬华谟，一类具高稳定性的三层显式格式H_3，计算数学，8,3 (1986), 329—331.

[5] Miller, J. J. H., On the location of zeros of certain classes of polynomials with application to numerical analysis, *J. Inst. Math. Appls.* 8 (1971), 397—406.

[6] Richtmyer, R. D. and K. W. Morton, *Difference Method for Initial-Value Problems*, 2nd edi. Wiley, New York (1967).

A Class of Three-Level Explicit Schemes with Higher Stability Properties for a Dispersive Equation $u_t=au_{xxx}$

Lin Peng-cheng

(*Fuzhou University, Fuzhou*)

Abstract

In this paper, a class of three-level explicit schemes for a dispersive equation $u_t=au_{xxx}$ with stability condition $|r|=|a|\Delta t/(\Delta x)^3\leqslant 2.382484$ are considered. The stability condition for this class of schemes is much better than $|r|\leqslant 0.3849$ in[1] and [2], and $|r|\leqslant 0.7016$ in[3], and $|r|\leqslant 1.1851$ in[4].