

文章编号: 1000-0887(2004) 08\_0779\_08

# 线性主动结构及模态( ) 离散系统及梁

王永刚<sup>1,2</sup>, 龚 靖<sup>1,3</sup>, 张景绘<sup>1</sup>

(1. 西安交通大学 建力学院, 西安 710049;

2. 长安大学 理学院, 西安 710064;

3. 东北电力学院 建筑工程系, 吉林 132012)

(我刊原编委张景绘来稿)

**摘要:** 在线性主动结构及模态( ) 中给出了主动结构的基本概念及模态的若干属性的基础上, 对主动离散系统及主动梁的属性做了进一步的讨论, 包括稳定性和正交性, 并用具体实例对模态做了解释 将伴随结构概念在梁结构中推广, 具体讨论了两种配置的主动梁, 它们分别代表离散传感和作动及分布传感和作动的配置, 并给出了用主动梁振型和伴随主动梁振型表示的正交性条件 用实例给出了同位和非同位主动刚度梁的特征值随反馈大小的变化

**关键词:** 主动结构; 梁; 模态; 正交条件

**中图分类号:** O32; TB53 **文献标识码:** A

## 引 言

经典结构动力学研究的对象是被动结构, 当被动结构中引入控制器件或机敏材料, 并施加控制作用, 则被动结构变为主动结构, 广义上称主动系统 由于对主动结构的定义还是一个值得讨论的概念<sup>[1]</sup>, 所以严格的定义有待主动结构动力学的深入研究 在文( )<sup>[2]</sup>中讨论的主动结构范畴内, 给出了线性主动结构模态的一系列属性:

属性 1 右特征向量是主动结构自由振动的模式 振型

属性 2 左特征向量为一类特定伴随主动结构的模态

属性 3 互为伴随结构的两个主动结构的模态振型加权正交

属性 4 左特征向量表征主动结构强迫振动的模态分量

属性 5(互易定理) 两个互为伴随主动结构, 若反馈增益矩阵对偶, 即  $K^T = K^{\text{adj}}$ , 则二者有相同的特征值集合, 其左、右特征向量互易

属性 6 满足互易定理的两互为伴随主动结构的传递函数对偶, 即  $H^{(a)\text{adj}}(s) =$

收稿日期: 2002\_11\_01; 修订日期: 2004\_03\_08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272087); 国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金资助项目(10176042)

作者简介: 王永刚(1960 ), 女, 四川人, 副教授, 现从事结构振动控制与检测研究(联系人, Tel: + 86\_29\_88069830; Fax: + 86\_29\_83237910; E\_mail: ygwang@xahu. edu. cn)

$H^{(a)T}(s)$

属性 7 测量点对任意点的传递函数与控制作用无关

在很多文献中<sup>[3,4]</sup>用特征值分析讨论主动振动控制系统的稳定性,本文对离散主动系统,从特征值分析,进一步给出了同位和非同位线性主动结构稳定性的属性

大量的文献研究梁的主动振动控制,这些文献中选取了各种作动原理、配置及控制律目前,在理论研究中仍使用梁作为具体实例<sup>[5]</sup> 本文对主动梁,从模态振型概念,给出了非同位线性主动结构的正交性条件

为了更具体比较线性主动结构与被动结构模态的差别,本文讨论了两个实例:7 自由度离散主动系统和简支梁

## 1 离散主动系统模态

离散主动系统方程的一种具体形式为

$$Mx + Cx + Qx = F_u u + F_v v, \quad (1)$$

$$u = - \left[ K_1 + K_2 \frac{d}{dt} \right] y, \quad (2)$$

$$y = F_y x, \quad (3)$$

$$\min J(K, F_u, F_y), \quad (4)$$

或闭合形式

$$Mx + C_a x + Q_a x = F_v v, \quad (5)$$

方程中参数的符号与 线性主动结构及模态(I) <sup>[2]</sup> 相同

属性 8 一渐进稳定的线性被动结构,其对应的具有负反馈正定增益矩阵的同位线性主动结构是渐进稳定的<sup>[3]</sup>

同位线性主动结构,当有  $m$  个自由度测量和控制时,可令

$$F_y = \begin{bmatrix} I_{m \ m} & \mathbf{0}_{m \ (n-m)} \end{bmatrix},$$

则

$$F_u = F_y^T = \begin{bmatrix} I_{m \ m} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \ m} \end{bmatrix},$$

若反馈矩阵  $K_1$  为对角阵,则对主动结构的刚度矩阵  $Q_a$  只增加了被动结构刚度矩阵的对角线元素,  $Q_a$  仍是对称的;若反馈矩阵  $K_2$  为对角阵,则对主动结构的阻尼矩阵  $C_a$  也只增加了被动结构阻尼矩阵的对角线元素,主动结构的特征值的实部仍为负,系统是渐进稳定的 当反馈矩阵是满秩时,属性 8 也成立

属性 9 线性主动结构是渐进稳定的,则伴随主动结构也是渐进稳定的

由互易定理可知,主动结构和伴随主动结构有相同的特征值集合,所以它们的稳定问题也是一致的

用以下实例进一步具体解释主动结构模态的若干属性

实例 一幢 7 层楼房,设有主动振动控制装置,为一主动结构,测量点为第 1 层,作动器作用于第 7 层,方程(1)~(4)中的参数为

$$M = \text{diag} \left\{ 6.569 \ 4 \quad 5.294 \ 7 \quad 4.964 \ 7 \quad 4.634 \ 6 \quad 4.634 \ 6 \quad 4.742 \ 2 \quad 2.841 \ 2 \right\} \quad 10^5 \text{ kg}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1.1099 & -0.5890 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5890 & 1.1779 & -0.5890 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5890 & 1.1779 & -0.5890 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5890 & 1.1779 & -0.5890 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5890 & 1.1779 & -0.5890 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5890 & 1.1396 & -0.5890 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5890 & 0.5506 \end{bmatrix} \times 10^{10} N/m,$$

$$C = \mathbf{0},$$

$$F_y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad F_u = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

是非同位主动结构 忽略被动结构的阻尼是为了更容易观察控制对主动结构动力学特性的影响 主动结构的模态取决于反馈增益  $K$ , 当  $K_1$  或  $K_2$  取常数时, 即为位移反馈或速度反馈 图 1 为主动刚度结构的固有频率与  $K_1$  的关系, 随着反馈的增大, 奇数阶频率增大, 而偶数阶频率减小 这是由于相同奇数阶振型在第 1 自由度和第 7 自由度同符号, 而偶数阶振型在这两个自由度上符号相反 当反馈增大到一定程度, 首前两阶频率曲线相交, 这一点标明第 1 和第 2 阶模态失稳, 此点左侧部分对应的特征值为实数, 右侧部分对应的特征值是复数 当反馈继续增大, 第 3 和第 4 阶模态失稳 在稳定范围内, 图 2 给出了主动刚度结构的第 1 和第 2 阶右和左特征向量随反馈增大的变化趋势, 也表明了二者的差异, 随  $K_1$  的增加差异增大 图 3 是主动阻尼结构的阻尼比与  $K_2$  的关系, 奇数阶为正值, 是正阻尼, 偶数阶为负阻尼 从特征向量中很容易理解,  $K_2$  对特征向量影响不大

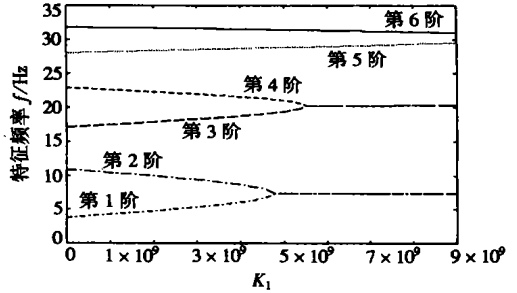
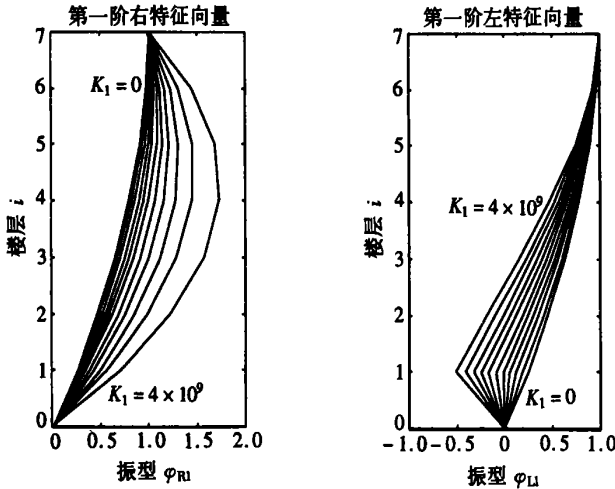


图 1 主动刚度结构的特性值

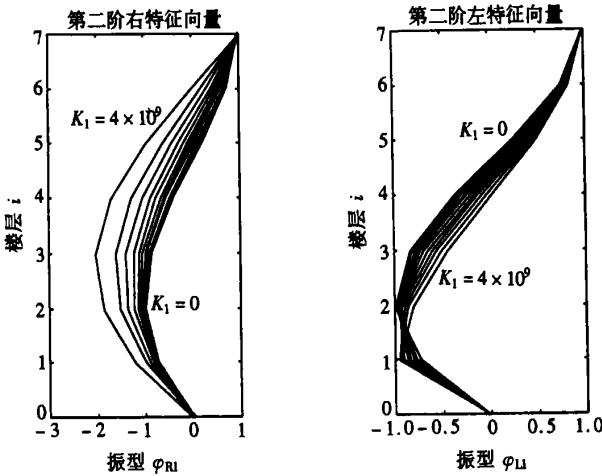
当反馈增大到一定程度, 首前两阶频率曲线相交, 这一点标明第 1 和第 2 阶模态失稳, 此点左侧部分对应的特征值为实数, 右侧部分对应的特征值是复数 当反馈继续增大, 第 3 和第 4 阶模态失稳 在稳定范围内, 图 2 给出了主动刚度结构的第 1 和第 2 阶右和左特征向量随反馈增大的变化趋势, 也表明了二者的差异, 随  $K_1$  的增加差异增大 图 3 是主动阻尼结构的阻尼比与  $K_2$  的关系, 奇数阶为正值, 是正阻尼, 偶数阶为负阻尼 从特征向量中很容易理解,  $K_2$  对特征向量影响不大

## 2 主动梁

当主动结构用偏微分方程描述时, 文( )<sup>[2]</sup>中的和上述的定义及对模态注释都可以推广



(a) 第 1 阶右、左特征向量



(b) 第2阶右、左特征向量

图2 主动刚度结构的特征向量

在这节中, 具体讨论两种配置的主动梁: 单点测量\_单点作动的非同位主动梁; 分布测量和分布作动的主动梁 前者是集中测控结构的代表, 后者是分布测控结构的代表

2.1 主动梁( )

对于比例位移(或速度或加速度)同位主动梁的分折, 与具有集中弹簧(或阻尼器或质量)的被动梁的特性一样, 可参阅有关教科书 主动梁( )只讨论单点测量\_单点作动的非同位主动梁, 欧拉梁方程可写为

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = (x - x_0)[K_w w(x_1, t) + K_v \dot{w}(x_1, t)], \tag{6}$$

其中  $x_0, x_1$  分别为作动点和测量点坐标,  $K_w, K_v$  分别为位移和速度反馈增益,  $\delta(x - x_0)$  表示 Dirac 函数 方程(6)的解可表示为

$$w(x, t) = W(x)e^{st}, \tag{7}$$

为一复数, 实部和虚部分别表示主动梁的阻尼特性和频率特性 考虑两端简支梁, 并令  $y = l - x, l$  是梁的长度, 振型函数  $W(x)$  为

$$W_l(x) = L_1 B(x) + L_2 D(x), \quad 0 \leq x \leq x_0, \tag{8}$$

$$W_r(y) = L_3 B(y) + L_4 D(y), \quad 0 \leq y \leq l - x_0 \tag{9}$$

这里使用了克雷洛夫(Kralove)函数:

$$A(x) = 0.5 (\text{ch}kx + \text{cos}kx), \quad B(x) = 0.5 (\text{sh}kx + \text{sin}kx), \\ C(x) = 0.5 (\text{ch}kx - \text{cos}kx), \quad D(x) = 0.5 (\text{sh}kx - \text{sin}kx),$$

其中  $k^2 = \rho A \omega^2 / EI, a = \sqrt{EI / \rho A}$  利用作动点的连续性条件可有

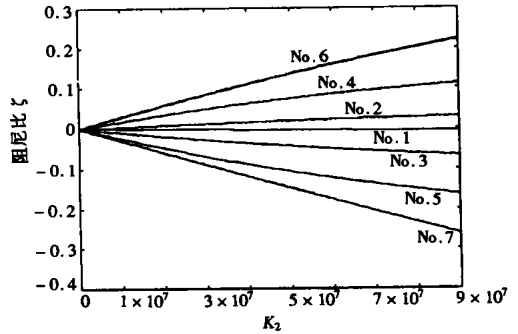


图3 主动阻尼结构的阻尼比

$$\begin{bmatrix} B(x_0) & D(x_0) & 0 & -B(l-x_0) & -D(l-x_0) \\ A(x_0) & C(x_0) & 0 & A(l-x_0) & C(l-x_0) \\ D(x_0) & B(x_0) & 0 & -D(l-x_0) & -B(l-x_0) \\ C(x_0) & A(x_0) & -\frac{(K_w + K_w)}{EI} & C(l-x_0) & A(l-x_0) \\ 0 & 0 & -1 & B(l-x_1) & D(l-x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ W_r(l-x_1) \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

上面 3 个方程即为主动梁的频率和振型方程 若作动位置和测量位置对换, 即  $x_0$  为测量点,  $x_1$  为作动点, 则伴随主动梁的频率和振型方程为

$$W_l^{\text{adj}}(x) = L_1^{\text{adj}} B(x) + L_2^{\text{adj}} D(x), \quad 0 \leq x \leq x_1, \quad (11)$$

$$W_r^{\text{adj}}(y) = L_3^{\text{adj}} B(y) + L_4^{\text{adj}} D(y), \quad 0 \leq y \leq l - x_1, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} B(x_1) & D(x_1) & 0 & -B(l-x_1) & -D(l-x_1) \\ A(x_1) & C(x_1) & 0 & A(l-x_1) & C(l-x_1) \\ D(x_1) & B(x_1) & 0 & -D(l-x_1) & -B(l-x_1) \\ C(x_1) & A(x_1) & -\frac{(K_w^{\text{adj}} + K_w^{\text{adj}})}{EI} & C(l-x_1) & A(l-x_1) \\ B(x_0) & D(x_0) & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^{\text{adj}} \\ L_2^{\text{adj}} \\ W_l^{\text{adj}}(l-x_0) \\ L_3^{\text{adj}} \\ L_4^{\text{adj}} \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

若将坐标  $x$  和  $y$  对换, 可将方程(11)、(12)及(13)写成和方程(8)、(9)及(10)的对应形式

$$W_r^{\text{adj}}(x) = L_1^{\text{adj}} B(x) + L_2^{\text{adj}} D(x), \quad 0 \leq x \leq x_1, \quad (14)$$

$$W_l^{\text{adj}}(y) = L_3^{\text{adj}} B(y) + L_4^{\text{adj}} D(y), \quad 0 \leq y \leq l - x_1, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} B(x_1) & D(x_1) & 0 & -B(l-x_1) & -D(l-x_1) \\ A(x_1) & C(x_1) & 0 & A(l-x_1) & C(l-x_1) \\ D(x_1) & B(x_1) & 0 & -D(l-x_1) & -B(l-x_1) \\ C(x_1) & A(x_1) & -\frac{(K_w^{\text{adj}} + K_w^{\text{adj}})}{EI} & C(l-x_1) & A(l-x_1) \\ 0 & 0 & -1 & B(l-x_0) & D(l-x_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_1^{\text{adj}} \\ L_2^{\text{adj}} \\ W_l^{\text{adj}}(l-x_0) \\ L_3^{\text{adj}} \\ L_4^{\text{adj}} \end{bmatrix} = 0 \tag{16}$$

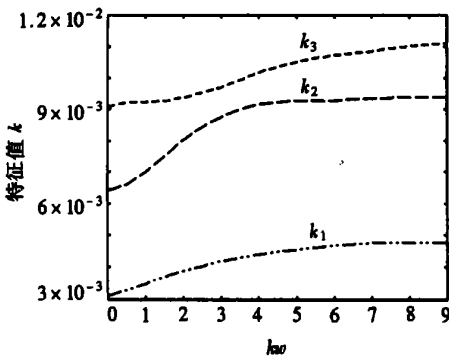
可以证明, 当  $K_w = K_w^{\text{adj}}$  和  $K_w = K_w^{\text{adj}}$  时, 方程(10) 和(13) 或(16) 系数行列式等于零有相同的解, 即如互易定理陈述的两互为伴随主动结构有相同的特征值集合。正交性条件可由方程(6) 直接给出, 当  $K_w = K_w^{\text{adj}}$  和  $K_w = K_w^{\text{adj}}$  时, 令  $W_i$  和  $W_j^{\text{adj}}$  分别为主动梁的第  $i$  阶振型和伴随主动梁的第  $j$  阶振型, 正交性条件为

$$\int_0^l W_i(x) W_j^{\text{adj}}(x) dx = \frac{K_w}{(i+j)} W_i(x_1) W_j^{\text{adj}}(x_0), \quad i \neq j \tag{17}$$

显然, 对于主动刚度梁有

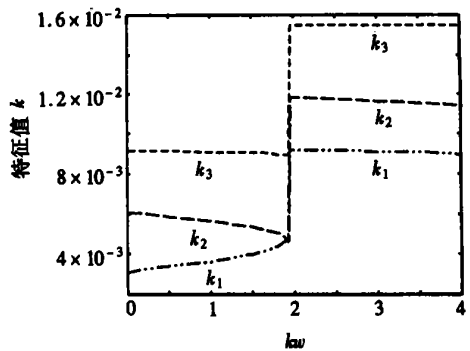
$$\int_0^l W_i(x) W_j^{\text{adj}}(x) dx = 0, \quad i \neq j \tag{18}$$

属性 10 当  $K_w = K_w^{\text{adj}}$  和  $K_w = K_w^{\text{adj}}$  时, 主动梁的振型和伴随主动梁的振型加权正交



( $kw = K_w/EI$ )

图 4 同位主动刚度梁的特征根



( $kw = K_w/EI$ )

图 5 非同位主动刚度梁的特征根

图 4 和图 5 是一个具体主动刚度简支梁的数值结果, 和伴随主动梁有相同的固有频率, 图 4 是同位主动简支梁的前三阶特征根随反馈增大时的变化曲线, 反馈越大, 频率越高。图 5 是非同位主动简支梁的前三阶特征根随反馈增大时的变化曲线, 可以看出这里存在一个稳定性问题。

### 2.2 主动梁( )

主动梁( ) 讨论分布作动和/ 或分布测量时的主动梁, 仍以欧拉梁方程表示为

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = F_u(x) u(x, t), \tag{19}$$

$$u(x, t) = \int_0^l K_w(x, \xi, t) y(\xi, t) d\xi + \int_0^l K_w(x, \xi, t) y(\xi, t) d\xi, \tag{20}$$

$$y(x, t) = F_y(x) w(x, t) \tag{21}$$

方程(20) 和(21) 为作动和测量模式, 式中  $K_w(x, \xi, t)$  和  $K_w(x, \xi, t)$  分别为  $t$  时刻位移和速度反馈增益,  $x$  为作动力坐标,  $\xi$  为测量坐标。一般情况下,  $K_w(x, \xi, t)$  和  $K_w(x, \xi, t)$  还与响应有关, 具体由控制律确定, 对线性主动梁, 独立于响应, 并假定不显含  $t$ , 即  $K_w(x, \xi), K_w(x, \xi)$ ,

)  $F_u(x)$  和  $F_y(x)$  分别为作动和测量位置函数, 具体可写成

$$F_u(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \leq x \leq x_2, \quad x_1, x_2 \in [0, l], \\ 0, & \text{其它}; \end{cases}$$

$$F_y(x) = \begin{cases} 1, & x_3 \leq x \leq x_4, \quad x_3, x_4 \in [0, l], \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对于多区域作动和测量, 很容易写出类似的  $F_u(x)$  和  $F_y(x)$  其伴随主动梁的方程为

$$\frac{\partial^2 w^{\text{adj}}(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w^{\text{adj}}(x, t)}{\partial x^4} = F_y(x) u^{\text{adj}}(x, t), \quad (22)$$

$$u^{\text{adj}}(x, t) = \int_0^l K_w^{\text{adj}}(x, \xi) y^{\text{adj}}(\xi, t) d\xi + \int_0^l K_w^{\text{adj}}(x, \xi) y^{\text{adj}}(\xi, t) d\xi, \quad (23)$$

$$y^{\text{adj}}(x, t) = F_u(x) w^{\text{adj}}(x, t) \quad (24)$$

当  $K_w^{\text{adj}}(x, \xi) = K_w(\xi, x)$  和  $K_w^{\text{adj}}(x, \xi) = K_w(\xi, x)$  时, 根据互易定理, 互为伴随两主动梁有相同的特征值, 其解分别为  $w(x, t) = W(x)e^t$  和  $w^{\text{adj}}(x, t) = W^{\text{adj}}(x)e^t$ , 可证明其振型  $W_i(x)$  和  $W_j^{\text{adj}}(x)$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j$ , 满足以下正交性条件

$$\int_0^l W_i(x) W_j^{\text{adj}}(x) dx = \frac{1}{(i+j)} \int_0^l F_u(x) F_y(\xi) K_w(x, \xi) W_i(x) W_j^{\text{adj}}(\xi) d\xi, \quad i \neq j \quad (25)$$

对于主动刚度梁有

$$\int_0^l W_i(x) W_j^{\text{adj}}(x) dx = 0, \quad i \neq j \quad (26)$$

属性 10 仍成立

### 3 结 论

使用不同的控制和测量器件及不同的配置、不同的机敏材料、不同的控制律, 可得到各种构形(或配置)的主动结构。以数学模型分类, 仍可分为离散主动结构和连续主动结构。本文用一个 7 自由度离散系统和梁分别代表这两类主动结构, 在文( )<sup>[2]</sup>的基础上, 进一步注释了线性主动结构模态的属性, 包括:

同位线性主动结构和被动结构的稳定性是相同的

主动结构和伴随主动结构稳定性的一致

对作动和传感的两种配置形式的非同位简支梁, 给出了正交性条件的表达式

用一个 7 自由度系统代表主动结构离散数学模型, 展示了左和右特征向量的差别及物理意义, 并显示了稳定性问题的存在

用一具体主动梁对比了同位和非同位时特征值变化的不同

对主动板和壳将做继续研究

#### [参 考 文 献]

- [1] Preumont A. Vibration Control of Active Structures [M]. Dordrecht, The Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [2] 张景绘, 龚静, 王永刚. 线性主动结构及模态(I) 基本概念及属性[J]. 应用数学和力学 2004, 25 (8): 771-778.

- [3] Ganesan R. Vibration analysis for stability of singular non\_self\_adjoint beam\_columns using stochastic FEM[ J]. Computers and Structures, 1998, 68(5): 543-554.
- [4] 顾仲权, 马扣根, 陈卫东. 振动主动控制[ M]. 北京: 国防工业出版社, 1979.
- [5] Mohammad K S, Al\_Dmoour A S. Vibration control of unknown flexible beam structures[ J]. Journal of Vibration & Control, 2002, 8(1): 69-87.

## Linear Active Structures and Modes( I ) Discrete Systems and Beams

WANG Yong\_gang<sup>1,2</sup>, GONG Jing<sup>1,3</sup>, ZHANG Jing\_hui<sup>1</sup>

( 1. School of Civil Engineering and Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China;  
2. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, P. R. China;  
3. Department of Civil Engineering, Northeast China Institute of Electric Power, Jilin 132012, P. R. China )

**Abstract:** The basic concepts about the active structures and some attributes of the modes were presented in paper Linear Active Structures and Modes ( I ). The characteristics of the active discrete systems and active beams were discussed, specially, the stability of the active structures and the orthogonality of the eigenvectors. The notes about modes were portrayed by a model of a seven-storeyed building with sensors and actuators. The concept of the adjoint active structure was extended from the discrete systems to the beams that were the representations of the continuous structures. Two types of beams with different placements of the measuring and actuating systems were discussed in detail. One is the beam with the discrete sensors and actuators, and the other is the beam with distributed sensor and actuator function. The orthogonality conditions were derived with the modal shapes of the active beam and its adjoint active beam. An example shows that the variation of eigenvalues with feedback amplitude for the homo\_configuration and non\_homo\_configuration active structures.

**Key words:** active structure; beam; mode; orthogonal condition