

广义协调等参元

龙驭球 黄民丰

(清华大学, 1987年10月15日收到)

摘要

本文根据广义协调条件, 对平面应力四边形单元提出一个广义协调等参元GC-Q6。

单元GC-Q6是对Wilson非协调等参元Q6的一个改进方案: 单元Q6只对平行四边形网格情况能通过分片检验, 对一般四边形情况却不能通过, 而本文的单元GC-Q6则对一般四边形情况也能通过。当单元为平行四边形时, GC-Q6单元即退化为Q6单元。

算例表明, 广义协调等参元的应力精度高于文献中已有的单元, 对不规则网格均能保持良好的性态。

一、引言

平面四结点等参元(Q4元)已得到广泛应用(图1)。对于位移 u 和 v , 采用插值函数如下:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i \quad (1.1)$$

其中 u_i 和 v_i ($i=1, 2, 3, 4$)为结点位移, N_i 为形状函数, 它是自然坐标 ξ, η 的双线性函数:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (1.2)$$

Q4元的一个缺点是对弯曲问题的计算精度较差。

Wilson等人^[1]为了改进Q4单元的性能, 将单元位移设为协调位移和非协调位移两部分之和:

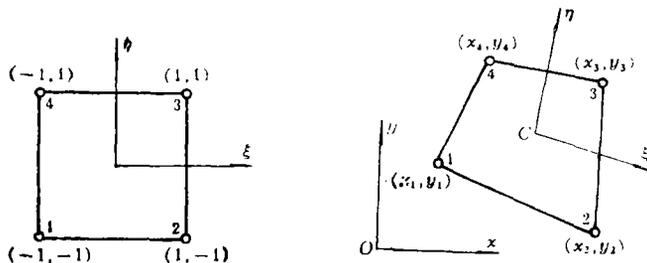


图 1

$$\{u\} = \{u_q\} + \{u_\lambda\} \quad (1.3)$$

其中协调位移 $\{u_q\}$ 仍采用双线性插值, 由式(1.1), (1.2)表示, 而非协调位移 $\{u_\lambda\}$ 设为

$$\{u_\lambda\} = \begin{Bmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi^2 & 1-\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi^2 & 1-\eta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

此单元记为 Q6. 应用 Q6 单元曾得出一些很好的数值结果, 但对一般的四边形单元不能通过分片检验.

文献[2],[3]分别提出使单元能够通过分片检验的处理方案, 得到非协调元 QM6 和 QP6.

文献[4]应用拟协调元方法, 得到两个等参拟协调元 QC5 和 QC6.

文献[5]根据常应力分片检验的一种强形式, 得到非协调元 NQ6.

本文根据广义协调元^[6]的基本思路, 应用常应力和线性应力下的广义协调条件, 得到广义协调等参元 GC-Q6. 这里利用常应力下的广义协调条件来保证收敛, 利用线性应力下的广义协调条件来提高计算精度.

二、常应力和线性应力下的广义协调条件

在协调元中, 单元的位移场 $\{u\}$ 在单元周边 ∂A_0 上要求满足如下的协调条件

$$\{u\} - \{\bar{u}\} = \{0\} \quad (\text{在 } \partial A_0 \text{ 上}) \quad (2.1)$$

这里 $\{\bar{u}\}$ 为单元的边界位移.

在广义协调元中, 对协调条件加以放宽, 只要求在网格无限细分 (单元的应力和应变趋于均匀) 的情况下满足如下的广义协调条件:

$$\oint_{\partial A_0} \{T_0\}^T (\{u\} - \{\bar{u}\}) ds = 0 \quad (2.2)$$

这里 $\{T_0\}$ 是常应力状态下的单元边界力.

文献[6]在推导广义协调元时, 应用了在单元每边 S_i 上的平均位移的协调条件:

$$\int_{S_i} (\{u\} - \{\bar{u}\}) ds = \{0\} \quad (2.3)$$

显然, 条件(2.3)是条件(2.2)的一种强形式.

本文在推导另一类广义协调元时将采用条件(2.2)的另一种强形式, 即

$$\oint_{\partial A_0} \{T\}^T (\{u\} - \{\bar{u}\}) ds = 0 \quad (2.4)$$

这里 $\{T\}$ 是常应力和线性应力状态下的边界力. 将式(1.3)代入式(2.4), 再应用协调位移 $\{u_q\}$ 所满足的条件:

$$\{u_q\} - \{\bar{u}\} = \{0\} \quad (\text{在 } \partial A_0 \text{ 上})$$

即得

$$\oint_{\partial A_0} \{T\}^T \{u_\lambda\} ds = 0 \quad (2.5)$$

考虑如下的线性应力状态:

$$\sigma_x = \beta_1 + \beta_2 \eta, \quad \sigma_y = \beta_2 + \beta_3 \xi, \quad \tau_{xy} = \beta_3 \quad (2.6)$$

令 l, m 表示单元周边向外法线的方向余弦, 则边界力为

$$T_x = l\beta_1 + m\beta_3 + l\eta\beta_4, \quad T_y = m\beta_2 + l\beta_3 + m\xi\beta_5 \quad (2.7)$$

将式(2.7)代入式(2.5), 得

$$\oint_{\partial A_i} [\beta_1 l u_x + \beta_2 m v_x + \beta_3 (m u_x + l v_x) + \beta_4 l \eta u_x + \beta_5 m \xi v_x] ds = 0 \quad (2.8)$$

由于五个参数 β_i 彼此独立, 故得五个条件如下:

$$\left. \begin{aligned} \oint_{\partial A_i} l u_x ds = 0, \quad \oint_{\partial A_i} m v_x ds = 0, \quad \oint_{\partial A_i} (m u_x + l v_x) ds = 0 \\ \oint_{\partial A_i} l \eta u_x ds = 0, \quad \oint_{\partial A_i} m \xi v_x ds = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

式(2.9)即为常应力和线性应力下的广义协调条件.

三、确定广义协调位移 $\{u_x\}$

首先将广义协调位移 u_x 和 v_x 表示为完整二次式:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \lambda_1 + \lambda_2 \xi + \lambda_3 \eta + \lambda_4 \xi^2 + \lambda_5 \xi \eta + \lambda_6 \eta^2 \\ v_x &= \lambda'_1 + \lambda'_2 \xi + \lambda'_3 \eta + \lambda'_4 \xi^2 + \lambda'_5 \xi \eta + \lambda'_6 \eta^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

由此可求出单元形心 $C(\xi=0, \eta=0)$ 处的位移 u_0, v_0 及转角 ω_0 如下:

$$u_0 = \lambda_1, \quad v_0 = \lambda'_1, \quad \omega_0 = \frac{1}{2|J|_C} (a_3 \lambda_2 - a_1 \lambda_3 + b_3 \lambda'_2 - b_1 \lambda'_3) \quad (3.2)$$

这里采用如下记号:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4} (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4), \quad a_2 = \frac{1}{4} (x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \quad a_3 = \frac{1}{4} (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) \\ b_1 &= \frac{1}{4} (-y_1 + y_2 + y_3 - y_4), \quad b_2 = \frac{1}{4} (y_1 - y_2 + y_3 - y_4), \quad b_3 = \frac{1}{4} (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) \\ |J|_C &= a_1 b_3 - a_3 b_1 \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

其次, 将式(3.1)代入广义协调条件(2.9), 得

$$\left. \begin{aligned} 3b_3 \lambda_2 - 3b_1 \lambda_3 + 2b_2 (\lambda_4 - \lambda_6) &= 0 \\ 3a_3 \lambda'_2 - 3a_1 \lambda'_3 + 2a_2 (\lambda'_4 - \lambda'_6) &= 0 \\ [3a_3 \lambda_2 - 3a_1 \lambda_3 + 2a_2 (\lambda_4 - \lambda_6)] + [3b_3 \lambda'_2 - 3b_1 \lambda'_3 + 2b_2 (\lambda'_4 - \lambda'_6)] &= 0 \\ 3b_1 \lambda_1 + 2b_2 \lambda_3 + b_1 \lambda_4 - b_3 \lambda_5 + 3b_1 \lambda_6 &= 0 \\ 3a_3 \lambda'_1 + 2a_2 \lambda'_2 + 3a_3 \lambda'_4 - a_1 \lambda'_5 + a_3 \lambda'_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

利用式(3.4)和(3.2)中的八个方程, 可将八个参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_5$ 用四个独立参数 $\lambda_4, \lambda_6, \lambda'_4, \lambda'_6$ 以及形心位移 u_0, v_0, ω_0 来表示.

最后, 形心位移取为

$$u_0 = -\lambda_4 - \lambda_6, \quad v_0 = -\lambda'_4 - \lambda'_6, \quad \omega_0 = 0 \quad (3.5)$$

由式(3.1), 得

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x \\ v_x \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \xi^2 - 1 + F_1 & \eta^2 - 1 + F_2 & F_3 & -F_3 \\ F'_3 & -F'_3 & \xi^2 - 1 + F'_1 & \eta^2 - 1 + F'_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_6 \\ \lambda'_4 \\ \lambda'_6 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{3|J|c} \{ -(2a_1b_2 - a_2b_1)\xi - (2a_3b_2 - a_2b_3)\eta + [(3a_1b_1 + 2a_2b_2) - \frac{a_3}{b_3}(3b_1^2 + 4b_2^2)] \\
 &\quad - \frac{b_1}{b_3}|J|c]\xi\eta \} \\
 F'_1 &= \frac{1}{3|J|c} \{ (2a_2b_1 - a_1b_2)\xi + (2a_2b_3 - a_3b_2)\eta + [(9a_3b_3 - 2a_2b_2) + \frac{b_1}{a_1}(4a_2^2 - 9a_3^2) \\
 &\quad - \frac{a_3}{a_1}|J|c]\xi\eta \} \\
 F_2 &= -F_1 - \frac{2b_1}{b_3}\xi\eta, \quad F'_2 = -F'_1 - \frac{2a_3}{a_1}\xi\eta \\
 F_3 &= \frac{-1}{3|J|c} [b_1b_2\xi + b_2b_3\eta + 2b_2^2\xi\eta], \quad F'_3 = \frac{1}{3|J|c} [a_1a_2\xi + a_2a_3\eta + 2a_2^2\xi\eta]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

式(3.5)即为所求的满足条件(2.9)的广义协调位移, 含四个内部位移式(3.6)即为所求的广义协调位移, 含四个内部位参数 $\lambda_i, \lambda_0, \lambda'_i, \lambda'_0$ 。如果单元为平行四边形, 则式(3.6)即退化为式(1.4)的形式。

四、广义协调元GC-Q6的刚度矩阵

选定了广义协调位移(3.6)之后, 单元刚度矩阵即可按常规方法导出。

将式(1.1)和(3.6)代入式(1.3), 位移可表示为

$$\{u\} = \{u_q\} + \{u_\lambda\} = [N]\{q\}^e + [N_\lambda]\{\lambda\} \quad (4.1)$$

应变可表示为

$$\{e\} = [B]\{q\}^e + [B_\lambda]\{\lambda\} \quad (4.2)$$

应变能为

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{t}{2} \iint_{A_e} \{e\}^T [D] \{e\} dA \\
 &= \frac{1}{2} \{q\}^{eT} [K_{qq}] \{q\}^e + \frac{1}{2} \{\lambda\}^T [K_{\lambda\lambda}] \{\lambda\} + \{\lambda\}^T [K_{\lambda q}] \{q\}^e
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中 t 是厚度

$$\left. \begin{aligned}
 [K_{qq}] &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \\
 [K_{\lambda\lambda}] &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\lambda]^T [D] [B_\lambda] |J| d\xi d\eta \\
 [K_{\lambda q}] &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_\lambda]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta
 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

$|J|$ = Jacobian矩阵的行列式

$[D]$ = 弹性系数矩阵

由 $\partial U / \partial \{\lambda\} = \{0\}$, 得

表 2 例2的计算结果比较 (五种单元)

单元类型	荷载1 (纯弯)		荷载2 (横向弯曲)	
	位移 v_A	应力 σ_{xB}	位移 v_A	应力 σ_{xB}
Q4 (等参元)	45.7	-1761	50.7	-2448
Q6 (Wilson ^[1])	98.4	-2428	100.4	-3354
QC6 (拟协调 ^[4])	96.1	-2439	98.1	-3339
NQ6 (下学锁 ^[5])	96.1	-2439	98.0	-3294
GC-Q6 (本文)	95.0	-3036*	96.1	-4182*
精确解	100	-3000	102.8	-4050

* B点应力由 2×2 高斯积分点应力外插求出。

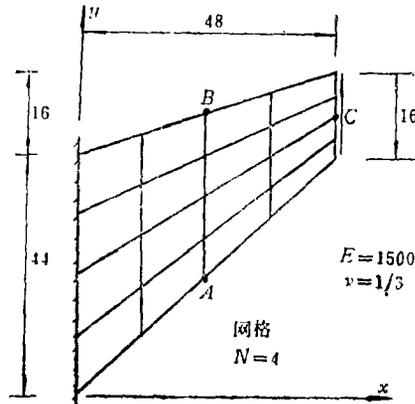


图 4

表 3 例3的计算结果比较 (五种单元)

(a) C点位移 v_C

单元类型	$N=2$	$N=4$	$N=8$	$N=16$
HL (Cook ^[7])	18.17	22.03	23.39	23.81
Q4 (等参元)	11.85	18.30	22.08	—
Q6 (Wilson ^[1])	22.94	23.48	—	—
QM6 (Taylor ^[2])	21.05	23.02	—	—
GC-Q6 (本文)	27.61	24.31	23.99	—

(b) B点应力 σ_{Bmin}

单元类型	$N=2$	$N=4$	$N=8$	$N=16$
HL (Cook ^[7])	-0.1335	-0.1700	-0.1931	-0.2005
Q4 (等参元)	-0.0916	-0.1510	-0.1866	—
Q6 (Wilson ^[1])*	-0.1734	-0.1915	—	—
QM6 (Taylor ^[2])*	-0.1580	-0.1856	—	—
GC-Q6 (本文)*	-0.1688	-0.1930	-0.1965	—

果作为参考标准, 本文GC-Q6单元在粗网格下的计算精度均高于HL单元。

六、结 语

广义协调等参元 GC-Q6 显示出广义协调元的优点: 由于满足常应力状态下的广义协调

表 3

(c) A点应力 σ_{Amix}

单元类型	$N=2$	$N=4$	$N=8$	$N=16$
HL(Cook ^[7])	0.1682	0.1980	0.2205	0.2294
Q4 (等参元)	0.1281	0.1905	0.2201	—
Q6(Wilson ^[1])*	0.2029	0.2258	—	—
QM6(Taylor ^[2])*	0.1928	0.2243	—	—
GC-Q6 (本文)*	0.2538	0.2349	0.2318	—

* 结点应力由 2×2 高斯积分点应力外插, 并取相邻单元的平均值。

条件, 因而对不规则网格能通过分片检验, 保证收敛。此外, 由于满足线性应力状态下的广义协调条件, 因而对不规则网格能保持良好的性态, 与文献中已有单元相比, 它是精度最好的单元之一。

参 考 文 献

- [1] Wilson, E. L., et al., Incompatible displacement models, *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, ed. Fenves S. J., et al., Academic Press, New York (1973), 43—57.
- [2] Taylor, R. L., et al., A non-conforming element for stress analysis, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 10 (1976), 1211—1219.
- [3] Wachspress, E. L., Incompatible quadrilateral basis functions, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 12 (1978), 589—595.
- [4] 陈万吉、唐立民, 等参拟协调元, 大连工学院学报, 20, 1 (1981), 63—74.
- [5] Pian, T. H. H. and Wu Chang-chun, General formulation of incompatible shape function and an incompatible isoparametric element, *Proc. of the Invitational China-American Workshop on FEM*, Chengde, China, June 2—6 (1986), 159—165.
- [6] 龙驭球、辛克贵, 广义协调元, 土木工程学报, 20, 1 (1987), 1—14.
- [7] Cook, R. D., Improved two-dimensional finite element, *J. Struct. Div.*, ASCE, 100, ST9 (1974), 1851—1863.

A Generalized Conforming Isoparametric Element

Long Yu-qiu Huang Min-feng

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

Based on the generalized compatibility condition under constant and linear stress field, a quadrilateral generalized conforming isoparametric element, GC-Q6, for plane stress analysis, is developed. The element GC-Q6 can be regarded as an improved form of Wilson's non-conforming isoparametric element Q6. GC-Q6 can pass the patch test for arbitrary irregular mesh while Q6 can not. GC-Q6 degenerates to Q6 when it is a parallelogram. Numerical examples show that the GC-Q6 element gives more accurate stress solution than the existing non-conforming elements and is less sensitive to geometric distortion.