

计算机求解渐开线齿轮齿廓 的保角映射函数*

程乃士 刘 温

(东北工学院, 1987年7月11日收到)

摘 要

平面弹性理论的复变函数保角映射解法可以求得齿轮的应力和位移的精确解。而相应于各种不同参数的轮齿齿廓的保角映射函数的求得却是比较困难的。以往均采用试算法, 这是费时且昂贵的。作者编制了求解保角映射函数的计算机程序, 并通过大量的计算证明这一程序是成功的, 所取得的映射函数是精确的。从而解决了保角映射法求解渐开线齿轮应力和位移应用于实际工程计算的主要障碍。

一、前 言

齿轮轮齿的应力分析是齿轮强度计算和承载能力研究的基础。齿轮轮齿的位移(也即刚度)分析是齿轮传动的振动、噪音研究以及修形计算的基础。

保角映射法是求解应力和位移的解析方法, 这种方法是把齿的轮廓映射到半无限平面的边界上, 在边界上受力作用的半平面域的应力和位移的解就可以变换到齿轮受力的状态中去。因此, 这种解比现行的国际齿轮强度计算标准所采用的悬臂梁法(也即 30° 切线法)要精确得多, 也比有限单元法及积分方程法等数值解法精确。

1961年日本的会田俊夫和寺内喜男^[3]运用这种方法求解了齿根过渡圆角的应力, 1972年加拿大的C. N. Baronet和G. V. Tordion^[4]计算了标准齿轮的应力分布, 1980年寺内喜男和永村和照^[2]又运用这种方法求解了齿的位移(刚度), 1985年作者又发表了考虑赫兹分布压力的精度更高的位移计算结果。

对于保角映射法求解齿轮轮齿的应力和位移的方法来说, 具有决定意义的是映射函数的精度和求得这种函数的方法是否简便。上述所有的文章中都是用试算法求出保角映射函数的, 这是费时而且精度不高的。因此, 这种方法在解决实际工程问题方面受到了限制。

作者编制了求解渐开线齿轮齿廓的保角映射函数的非线性复变函数方程组的计算机程序。大量的计算表明, 解的收敛性是没有异议的, 解一组解所需要的时间也只有几秒钟。

* 杨桂通推荐。

二、映 射 函 数

为了将具有齿形边界的 z 平面的域 D 保角地映射为 ζ 平面中以 η 轴为边界的 $\xi \geq 0$ 的半平面 (见图 1), 采用下面形式的映射函数

$$z = \omega(\zeta) = m_0 \zeta - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\zeta + a_j} \quad (2.1)$$

式中

$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

从理论上讲, 项数 n 越大, 计算结果越精确, 但所需要的计算时间也越多. 项数 n 越小则反之. 根据作者的经验, $n=10$ 是可行的.

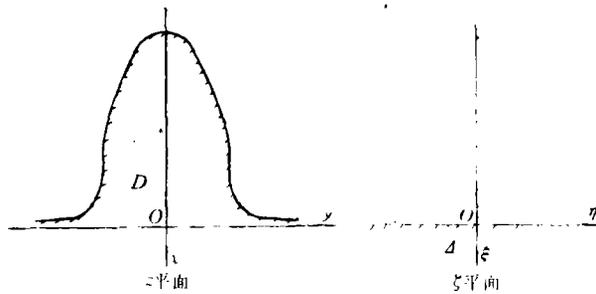


图 1

这里, m_0, m_j, a_j 是待求的系数. 为了解得这些系数需求解下面的方程组:

$$z_k = x_k + iy_k = \omega(\zeta_k) = m_0 \zeta_k - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\zeta_k + a_j} \quad (k=1, 2, \dots, 2n+1) \quad (2.2)$$

在边界上

$$x_k + iy_k = im_0 \eta_k - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{a_j + i\eta_k} \quad (k=1, 2, \dots, 2n+1) \quad (2.3)$$

也即

$$\begin{cases} x_k = - \sum_{j=1}^n \frac{m_j a_j}{a_j^2 + \eta_k^2} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} y_k = m_0 \eta_k + \sum_{j=1}^n \frac{m_j \eta_k}{a_j^2 + \eta_k^2} \end{cases} \quad (2.5)$$

理论齿廓由渐开线和过渡圆弧两部分组成, 渐开线部分的计算点由下式决定 (参看图 2):

$$\begin{cases} x_k^* = r_a - (h + 0.15) - \frac{r_0}{\cos \alpha_k} \cos \left[\frac{\pi - 4xtg \alpha_0}{2Z} + tg \alpha_0 - \alpha_0 - tg \alpha_k + \alpha_k \right] \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} y_k^* = - \frac{r_0}{\cos \alpha_k} \sin \left[\frac{\pi - 4xtg \alpha_0}{2Z} + tg \alpha_0 - \alpha_0 - tg \alpha_k + \alpha_k \right] \end{cases} \quad (2.7)$$

式中, Z 为齿数, h 为全齿高系数, x 为变位系数, α_0 为齿形角, α_k 为计算点 k 处的压力角, r_0 为基圆半径, r_a 为齿顶圆半径。

渐开线与过渡曲线的界限点的压力角

$$\alpha_g = \text{tg}^{-1} \left[\text{tg} \alpha_0 - 2 \frac{h_{a0} - \rho(1 - \sin \alpha_0) - x}{Z \cos \alpha_0 \sin \alpha_0} \right] \quad (2.8)$$

式中, h_{a0} 为刀具齿顶高系数, ρ 为刀具齿顶圆角半径。

齿轮齿顶压力角

$$\alpha_a = \cos^{-1} \frac{r_0}{r_a} \quad (2.9)$$

则 α_k 应在下面的范围内选取

$$\alpha_g \leq \alpha_k \leq \alpha_a \quad (2.10)$$

齿形过渡曲线部分计算点由下式确定

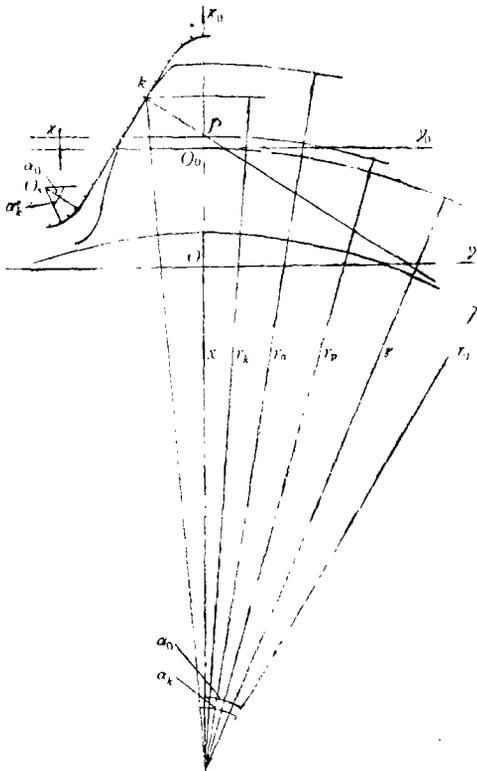


图 2

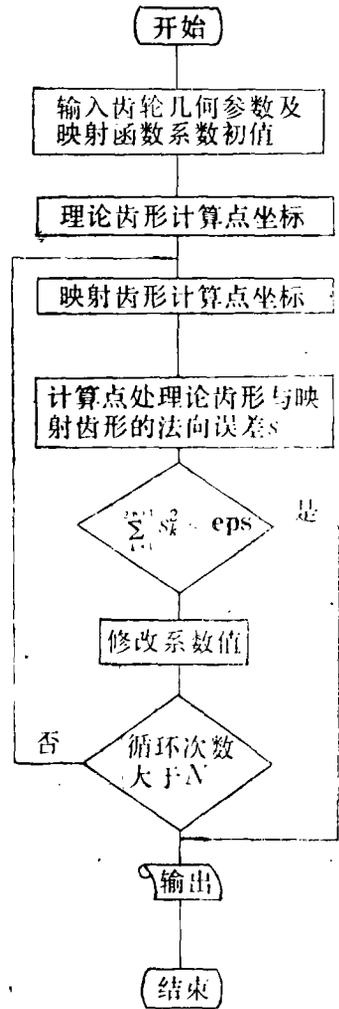


图 3 计算程序框图

$$\begin{cases} y_{0k} = -\frac{\pi}{4} - [h_{a0} - \rho(1 - \sin \alpha_0)] \text{tg} \alpha_0 + \rho(\cos \alpha'_k - \cos \alpha_0) & (2.11) \\ x_{0k} = -(h_{a0} - x) + \rho(1 - \sin \alpha'_k) & (2.12) \end{cases}$$

$$\varphi_k = \frac{2(y_{0k} + x_{0k} \text{ctg} \alpha'_k)}{Z} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} x_i^* = r_a - (h + 0.15) + y_{0k} \sin \varphi_k - x_{0k} \cos \varphi_k - \frac{Z}{2} (\cos \varphi_k + \varphi_k \sin \varphi_k) & (2.14) \\ y_i^* = y_{0k} \cos \varphi_k + x_{0k} \sin \varphi_k + \frac{Z}{2} (\sin \varphi_k - \varphi_k \cos \varphi_k) & (2.15) \end{cases}$$

式中, α'_i 为相应于齿形过渡曲线上计算点的刀具齿顶圆角的计算点的展开角。
 α'_i 应在下面的范围内选取:

$$\alpha_0 \leq \alpha'_i < \frac{\pi}{2} \quad (2.16)$$

三、求解方法和计算程序框图

在理论齿形上按需要在渐开线部分和过渡曲线部分取 $k=2n+1$ 个计算点, 坐标为 x_k^* , y_k^* 。对应的映射齿形计算点坐标为 x_k, y_k 。调整映射函数的各系数, 使 x_k, y_k 与理论齿形的法向误差的平方和小于给定的界限。迭代计算是收敛的。作者取 $n=10$, 平均每组参数的计算时间少于 7 秒。当然, 初值是十分重要的。计算程序框图见图 3。

四、计算结果举例

作者对常用范围的齿数、变位系数的轮齿齿廓的映射函数做了大量计算。现将几例列表如下:

$$m=1, h_a=1, h=2.25, \alpha_0=20^\circ, h_{a0}=1.25, \rho=0.38$$

当 $m \neq 1$ 时

$$m_j = mm_j^* \quad (j=0, 1, \dots, n)$$

$Z=20 \quad x=0$

| | | | |
|----------|-----------|----------|-----------|
| m_0 | 0.0381118 | a_1 | 9.8000088 |
| m_1 | 2.5479638 | a_2 | 8.0500098 |
| m_2 | 2.0929572 | a_3 | 5.4300108 |
| m_3 | 1.4117433 | a_4 | 3.1400107 |
| m_4 | 0.8163229 | a_5 | 2.0460119 |
| m_5 | 0.5318681 | a_6 | 1.3700145 |
| m_6 | 0.3560970 | a_7 | 0.9000198 |
| m_7 | 0.2338738 | a_8 | 0.4330214 |
| m_8 | 0.1124170 | a_9 | 0.1660504 |
| m_9 | 0.0428391 | a_{10} | 0.0860591 |
| m_{10} | 0.0219808 | | |

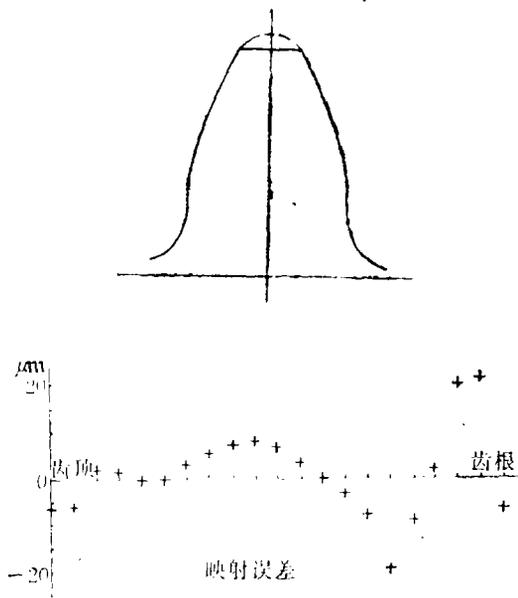
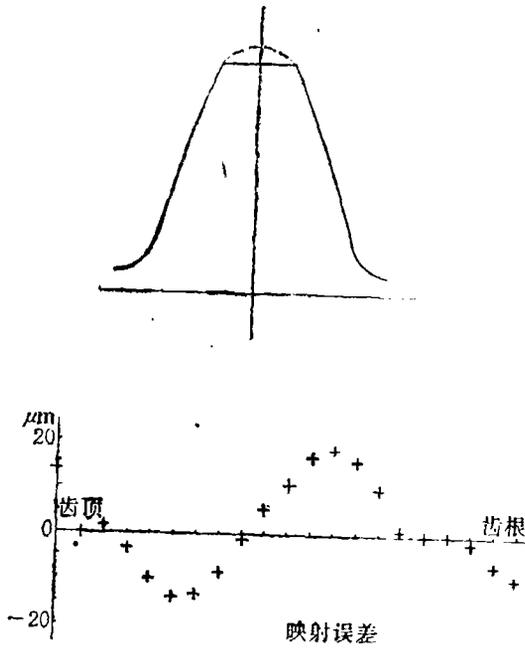


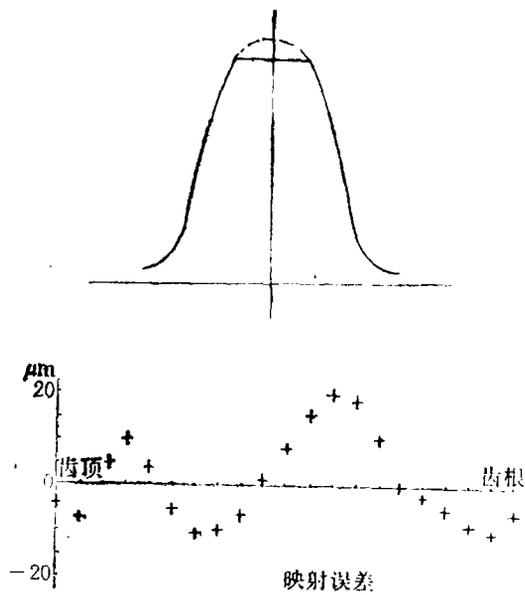
图 4



$Z=50 \quad x=0$

| | | | |
|----------|-----------|----------|-----------|
| m_0 | 0.0516249 | | |
| m_1 | 2.5480725 | a_1 | 9.7999689 |
| m_2 | 2.0930925 | a_2 | 8.0499647 |
| m_3 | 1.4119330 | a_3 | 5.4299622 |
| m_4 | 0.8165664 | a_4 | 3.1399876 |
| m_5 | 0.5320801 | a_5 | 2.0460280 |
| m_6 | 0.3562353 | a_6 | 1.3700464 |
| m_7 | 0.2338631 | a_7 | 0.9000198 |
| m_8 | 0.1123105 | a_8 | 0.4328665 |
| m_9 | 0.0433150 | a_9 | 0.1656209 |
| m_{10} | 0.0233688 | a_{10} | 0.0855997 |

图 5



$Z=100 \quad x=0$

| | | | |
|----------|-----------|----------|-----------|
| m_0 | 0.0561124 | | |
| m_1 | 2.5540872 | a_1 | 9.7932695 |
| m_2 | 2.1046600 | a_2 | 8.0419096 |
| m_3 | 1.4342691 | a_3 | 5.4216650 |
| m_4 | 0.8460052 | a_4 | 3.1395837 |
| m_5 | 0.5494778 | a_5 | 2.0546538 |
| m_6 | 0.3537638 | a_6 | 1.3821875 |
| m_7 | 0.2217015 | a_7 | 0.9083833 |
| m_8 | 0.0908916 | a_8 | 0.4122382 |
| m_9 | 0.0472241 | a_9 | 0.1647472 |
| m_{10} | 0.0269852 | a_{10} | 0.0809802 |

图 6

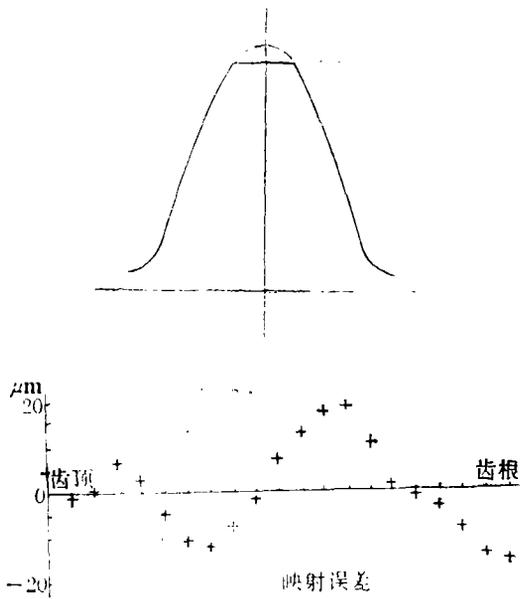


图 7

$Z=50 \quad x=0.5$

| | | | |
|----------|-----------|----------|-----------|
| m_0 | 0.0863652 | | |
| m_1 | 1.5665243 | a_1 | 5.9038582 |
| m_2 | 1.3112932 | a_2 | 4.8418124 |
| m_3 | 0.9405771 | a_3 | 3.2621833 |
| m_4 | 0.5975841 | a_4 | 1.9132543 |
| m_5 | 0.3735833 | a_5 | 1.2784542 |
| m_6 | 0.2055079 | a_6 | 0.8718400 |
| m_7 | 0.0687584 | a_7 | 0.5628772 |
| m_8 | 0.0619413 | a_8 | 0.2676859 |
| m_9 | 0.0405869 | a_9 | 0.1345692 |
| m_{10} | 0.0108926 | a_{10} | 0.0355818 |

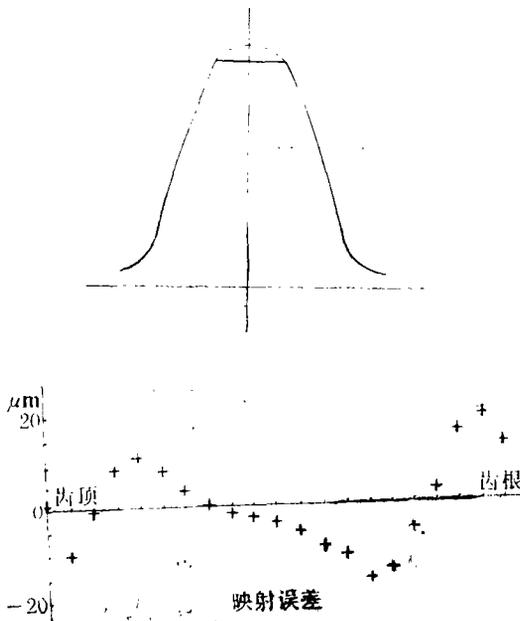


图 8

$Z=50 \quad x=-0.$

| | | | |
|----------|-----------|----------|-----------|
| m_0 | 0.0473474 | | |
| m_1 | 2.5187348 | a_1 | 9.7044751 |
| m_2 | 2.0662758 | a_2 | 7.9727258 |
| m_3 | 1.3861679 | a_3 | 5.2802382 |
| m_4 | 0.7865155 | a_4 | 3.1134469 |
| m_5 | 0.4983163 | a_5 | 2.0285185 |
| m_6 | 0.3230621 | a_6 | 1.3551137 |
| m_7 | 0.2085823 | a_7 | 0.8843992 |
| m_8 | 0.1045522 | a_8 | 0.4186853 |
| m_9 | 0.0590047 | a_9 | 0.1641516 |
| m_{10} | 0.0243917 | a_{10} | 0.0868041 |

五、结 束 语

将所求得的映射函数

$$z = \omega(\xi) = m_0 \xi - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\xi + a_j}$$

代入公式^[1]

$$u + iv = \frac{3-\mu}{E} \varphi(\xi) - \frac{1+\mu}{E} \left[\frac{\omega(\xi)}{\omega'(\xi)} \bar{\varphi}'(\xi) + \psi(\xi) \right]$$

中, 便可求得轮齿承受 Herrz 压力的中心点的 x 方向和 y 方向的位移 u 和 v 。这在论文[1]中已经阐明, 这里不再赘述。

同样, 将映射函数代入公式

$$\begin{aligned} \sigma_n + \sigma_t &= 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \right] \\ \sigma_t - \sigma_n + 2i\tau_{nt} &= \frac{2}{\omega'(\xi)} \left\{ \bar{\omega}'(\xi) \left[\frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \right]' + \psi'(\xi) \right\} \\ e^{2i\gamma} &= \frac{\omega'(\xi)}{\bar{\omega}'(\xi)} \end{aligned}$$

便可求得轮齿表面受载时表面和内部任意一点的应力状态。这在论文[3]、[4]中均已得到解答, 这里也不再赘述。

至此, 可以认为, 保角映射法精确求解渐开线齿轮轮齿的应力和位移的道路已经畅通。而且由于它无论在计算精度方面还有在计算时间方面均优越于有限单元法。因此, 完全有理由认为, 保角映射法应成为齿轮强度计算标准的A方法(即精确方法)的基础。

同时也可以看出, 用保角映射法分析齿形参数如 α_0 , ρ , h_a 以及 Z , x 对齿轮轮齿应力和位移的影响, 也要比有限单元法方便得多。

参 考 文 献

- [1] 程乃士、刘温, 用平面弹性理论的复变函数解法精确确定直齿齿轮齿的挠度, 应用数学和力学, 6, 7 (1985), 619—632.
- [2] 寺内喜男、永村和照, 平歯車の歯のなわみに関する研究, 日本機械学会論文集, 46, 402 (1980), 160; 46, 406 (1980), 649.
- [3] 会田俊夫、寺内喜男, 平歯車の曲げ応力にへいて, 日本機械学会論文集, 27, 187(1961), 857.
- [4] Baronet, C. N. and G. V. Tordion, Exact stress distribution in standard gear teeth and geometry factors, ASME, *Journal of Engineering for Industry*, 95 (1973), 1159—1163.

Calculation of Conformal Mapping Function of the Tooth Profile on Evolvent Gear by Computer

Cheng Nai-shi Liu Wen .

(Northeast Institute of Technology, Shenyang)

Abstract

The exact solution of the stress and the displacement on spur gear can be gained by the method of conformal mapping of complex variables in plane elasticity. But it is difficult to get the conformal mapping function for the tooth profile with different parameters. They used to be obtained through trial method. This is time-consuming and expensive. In this paper a computer program is drawn up for the conformal mapping function. A large amount of calculation has given proof of its success and of the precision of the mapping function; thereby the main obstacles has been removed for the practical application of the conformal mapping method to the stress and displacement of tooth on evolvent gear.